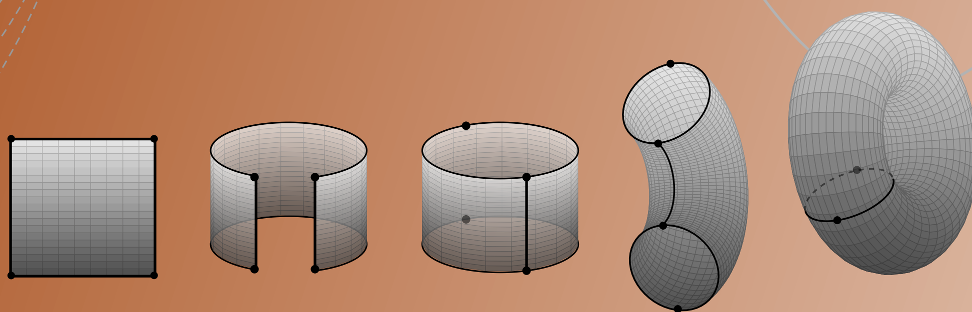
Σπύρου Καπελλίδη

Τοπολογία





Ιωάννινα 2024

Σπύρου Καπελλίδη

Τοπολογία

Ιωάννινα 2024

Στοιχεία επικοινωνίας συγγραφέα:
Σπύρος Καπελλίδης
email: skapellidis@gmail.com
ISBN: 978-618-87373-1-0
Έκδοση: 1.1.2
Σελίδες: 617+x
Σχήμα: A4
Εκδότης: Τεχνοτυπία Ο.Ε.
Εξώφυλλο-Σχήματα: Γρηγόρης Κωστάκος
Στοιχειοθεσία: XƎLATEX

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για να δώσουμε μια απάντηση στο ερώτημα τι είναι η τοπολογία, όσο γίνεται πιο προσιτή, σε εκείνον που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με αυτήν θα επιχειρήσουμε να κάνουμε μια σύγκριση με εκείνο τον κλάδο των μαθηματικών, με τον οποίο είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι: την άλγεβρα. Ποιο είναι το αντικείμενο και ο στόχος της άλγεβρας; Συνοπτικά στην άλγεβρα γίνεται δόμηση των συνόλων με κάποιες πράξεις και ακολούθως τα δομημένα αυτά σύνολα συσχετίζονται μεταξύ τους με απεικονίσεις από το ένα στο άλλο έτσι, ώστε οι απεικονίσεις αυτές (ομομορφισμοί) να μεταφέρουν, χωρίς να αλλοιώνουν, την πράξη του ενός στο άλλο.

Στην τοπολογία, αντί των πράξεων εφοδιάζουμε τα σύνολα με οικογένειες υποσυνόλων τους, μέσω των οποίων καθορίζουμε την γειτονικότητα των σημείων τους. Εδώ, αντί για τις απεικονίσεις της άλγεβρας, οι οποίες διατηρούν τις πράξεις, μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις από το ένα σύνολο στο άλλο που διατηρούν την γειτονικότητα (συνεχείς απεικονίσεις).

Με την έννοια της συνέχειας έρχεται σε επαφή ένας σπουδαστής των μαθηματικών, ήδη από τα πρώτα του βήματα στον απειροστικό λογισμό. Εκεί είδαμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν οι τιμές της είναι όσο κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$, αρκεί να παίρνουμε κατάλληλα κοντινά αρχέτυπα στο x_0. Το κοντά, δηλαδή η γειτονικότητα, στον απειροστικό λογισμό προσδιορίζεται μέσω της Ευκλείδειας απόστασης. Όμως ο ποσοτικός αυτός προσδιορισμός της γειτονικότητας, αφενός δεν καλύπτει την πολυπλοκότητα των χώρων που συναντάμε στα μαθηματικά και, αφετέρου δεν βολεύει σε πολλές περιπτώσεις ως εργαλείο, ακόμη και όταν μπορεί να οριστεί απόσταση στους χώρους με τους οποίους ασχολούμαστε. Έτσι προκύπτει η ανάγκη ποιοτικού ορισμού της γειτονικότητας και αυτό είναι η απαρχή της δημιουργίας της τοπολογίας. Αν έχουμε ορίσει την γειτονικότητα, τότε συνεχής απεικόνιση είναι η απεικόνιση που διατηρεί την γειτονικότητα του χώρου αφετηρίας της στον χώρο αφίξεως της.

Ιδιαίτερη σημασία για την τοπολογία έχουν ένα είδος συνεχών απεικονίσεων μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων,], οι οποίες λέγονται ομοιομορφισμοί. Οι ομοιομορφισμοί είναι για την τοπολογία το ανάλογο των ισομορφισμών της άλγεβρας ή των ισομετριών στις γεωμετρίες. Όπως στην άλγεβρα δύο αλγεβρικά αντικείμενα (δομές) είναι ίσα, όταν η μία εξ' αυτών προκύπτει από την άλλη από τη δράση ενός ισομορφισμού ή στην γεωμετρία ένα σχήμα δύο σχήματα είναι ίσα, όταν το ένα προκύπτει από το άλλο από τη δράση μιας ισομετρίας, έτσι και στην τοπολογία δύο χώροι είναι ίσοι (ομοιόμορφοι), αν ο ένας προκύπτει από τον άλλον από τη δράση ενός ομοιομορφισμού. Οι ιδιότητες, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες στους ομοιομορφισμούς, τα λεγόμενα τοπολογικά αναλλοίωτα είναι ένα από τα κεντρικά θέματα της τοπολογίας. Αν εργαζόμαστε στο Ευκλείδειο επίπεδο και καθορίσουμε την γειτονικότητα με βάση την γνωστή Ευκλείδεια απόσταση, τότε τα τοπολογικά αναλλοίωτα δεν

έχουν καμία σχέση με τα γνωστά γεωμετρικά αναλλοίωτα. Στους ομοιομορφισμούς από το Ευκλείδειο επίπεδο στον εαυτό του δεν είναι απαραίτητο να διατηρούνται ούτε τα μήκη, ούτε τα μέτρα των γωνιών, ούτε τα εμβαδά, όπως γίνεται στους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς που είναι γνωστοί με το όνομα ισομετρίες. Ο τοπολόγος δεν βρίσκει καμία απολύτως διαφορά μεταξύ ενός τετραγώνου, ενός τριγώνου, ενός κύκλου, ή μιας έλλειψης. Για αυτόν όλα τα παραπάνω σχήματα είναι ίσα, γιατί είναι το ένα αποτέλεσμα της δράσης ενός ομοιομορφισμού επί του άλλου. Ένα κεντρικό ζήτημα είναι η απάντηση στο ερώτημα: πότε δύο χώροι είναι ομοιόμορφοι, δηλαδή υπάρχει ένας ομοιομορφισμός από τον έναν στον άλλον. Έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος θα αποφαίνεται για την κατάταξη κατ' ομοιομορφισμό των τοπολογικών χώρων.

Μεγάλη εξ' ίσου σημασία για την μελέτη των τοπολογικών χώρων και την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων έχει η ασθενέστερη του ομοιομορφισμού έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας. Στους ομοτοπικά ισοδύναμους τοπολογικούς χώρους αντιστοιχούν ισόμορφα αλγεβρικά αντικείμενα, κυρίως ομάδες και αυτό είναι κατ' ουσίαν η αλγεβρική τοπολογία.

Η τοπολογία έχει δύο βασικούς κλάδους: Την γενική τοπολογία που πραγματευόμαστε στα κεφάλαια από 1 έως και 8 και στο κεφάλαιο 10 και την αλγεβρική τοπολογία πραγματευόμαστε στα κεφάλαια από 12 έως και 18. Τα κεφάλαια 9 και 11 είναι σύνορο μεταξύ των δύο κλάδων. Στο κεφάλαιο 19 που φέρει τον τίτλο "Επίμετρο" εξετάζουμε με σύντομο τρόπο κάποια θέματα αλγεβρικής τοπολογίας, γιατί μια εκτενής διερεύνησή τους ξεπερνά τους σκοπούς του παρόντος. Την γενική ή συνολοθεωρητική τοπολογία εύστοχα θα μπορούσε κάποιος να την χαρακτηρίσει ως τη γλώσσα της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης. Άλλωστε η αφετηρία βρίσκεται στην μελέτη των ιδιοτήτων των συνόλων της πραγματικής ευθείας από τον G. Cantor, καθώς και στις μελέτες του M. Frechet για τη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων. Στον αντίποδα αυτής η αλγεβρική τοπολογία, οι βάσεις της οποίας τέθηκαν από τον μεγάλο Γάλλο H. Poincare έχει ως αντικείμενο τη χρήση αλγεβρικών μεθόδων και εργαλείων για την επίλυση τοπολογικών προβλημάτων, τα οποία στην πλειονότητά τους έχουν γεωμετρική φύση και αφετηρία. Έχουμε, έτσι, μια επαναφορά στις καταβολές τις τοπολογίας, μιας και στις απαρχές της ήταν μια διαφορετική γεωμετρία, όπως γράφουν και οι Courant και Robinson στο εξαιρετικό έργο τους "What is mathematics":
"Στα μέσα του δεκάτου ενάτου αιώνα άρχισε μια εντελώς νέα εξέλιξη στη γεωμετρία, που σύντομα επρόκειτο να γίνει μια από τις μεγάλες δυνάμεις στα σύγχρονα μαθηματικά. Το νέο αντικείμενο, το οποίο ονομάστηκε ανάλυση θέσεως (analysis situs) ή τοπολογία, μελετά τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που παραμένουν, ακόμη και, όταν αυτά υφίστανται τέτοιες δραστικές παραμορφώσεις που χάνονται όλες οι μετρικές ή προβολικές τους ιδιότητες"

Για την μελέτη του παρόντος απαιτείται μια καλή γνώση του απειροστικού λογισμού, της γραμμικής άλγεβρας, της βασικής άλγεβρας, καθώς και της βασικής συνολοθεωρίας. Στα δύο κεφάλαια του παραρτήματος κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα βασικά της θεωρίας συνόλων και της θεωρίας ομάδων που είναι απαραίτητα για την μελέτη του βιβλίου. Παρότι έχει καταβληθεί μεγάλη προσπάθεια, ώστε η μελέτη του βιβλίου να είναι προσιτή σε εκείνους που δεν έχουν ιδιαίτερες τοπολογικές γνώσεις, το αντικείμενο της τοπολογίας είναι εξαιρετικά δύσκολο και, ως εκ' τούτου απαιτεί μια μαθηματική ωριμότητα.

Οφείλω θερμές ευχαριστίες στον Γρηγόρη Κωστάκο, τόσο για τις χρήσιμες συμβουλές του, για την στοιχειοθεσία, για την κατασκευή των σχημάτων με κώδικα latex και γενικά για την φροντίδα του για την καλύτερη δυνατή εμφάνιση του παρόντος.

Ακολουθεί επεξήγηση των βασικών συμβόλων, τα οποία δεν επεξηγούνται στο κύριο μέ-

ρος.

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, ...\}$ συμβολίζουμε με το $\mathbb{N}$.

2. Το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με το 0, συμβολίζουμε με το $\mathbb{N}_0$.

3. Τα σύνολα των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών συμβολίζουμε αντιστοίχως, με $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$. Όταν σε ένα αριθμοσύνολο A που περιέχει το 0 βάλουμε στο πάνω μέρος το $*$ σημαίνει ότι από το σύνολο αυτό "διώχνουμε" το 0. Δηλαδή, $A^* = A \setminus \{0\}$.

4. Με $\mathbb{R}^+$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών, με $\mathbb{R}_{\geq 0}$ συμβολίζουμε το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών και με $\mathbb{A}$ το σύνολο των αρρήτων.

5. Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z συμβολίζουμε με $\Re z$ και το φανταστικό του μέρος με $\Im z$.

6. $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ και $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \geq 1\}$ για $n > 1$.

7. $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ και $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ για $n > 1$.

8. $\mathbb{B}^1 = (-1, 1)$ και $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$ για $n > 1$.

9. Για έναν $m \times n$ πίνακα A, με A^t δηλώνουμε τον ανάστροφό του.

10. Με $GL(\mathbb{R}, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

11. Με $O(\mathbb{R}, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορθογωνίων $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

12. Με $SO(\mathbb{R}, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με ορίζουσα ίση με 1.

13. Αν A είναι ένα σύνολο, τότε με το σύμβολο $|A|$ δηλώνουμε τον πληθάριθμό του. Με το σύμβολο $\aleph_0$ δηλώνουμε τον πληθάριθμο των άπειρων αριθμήσιμων συνόλων. Με c δηλώνουμε τον πληθάριθμο των συνόλων, τα οποία είναι ισοδύναμα με το $\mathbb{R}$.

14. Το $\exists x \in A; p(x)$ διαβάζεται: υπάρχει $x \in A$, ώστε να αληθεύει η πρόταση $p(x)$.

Στο τέλος της απόδειξης κάθε πρότασης τίθεται το σύμβολο $\Box$, το οποίο σημαίνει ότι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1.1 Μετρικοί χώροι

Με την εισαγωγή μετρικής σε ένα σύνολο, προσδιορίζουμε την εγγύτητα των στοιχείων του συνόλου, δηλαδή το πόσο "κοντά" βρίσκονται δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου. Ο προσδιορισμός αυτός είναι απαραίτητος για τον ορισμό των συνεχών απεικονίσεων. Συνεχής απεικόνιση, διαισθητικά, είναι εκείνη η απεικόνιση, όπου τα "κοντινά" σημεία του συνόλου αφίξεως είναι εικόνες "κοντινών σημείων" του συνόλου αφετηρίας της απεικόνισης. Ο πιο απλός τρόπος εισαγωγής της εγγύτητας σε ένα σύνολο είναι εκείνος, κατά τον οποίο η απόσταση δύο σημείων ορίζεται ως μίμηση της απόστασης στο σύνολο των πραγματικών. Είναι γνωστό ότι στους πραγματικούς ως απόσταση των x, y ορίζουμε τον μη αρνητικό αριθμό $|x - y|$. Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της απόστασης στο $\mathbb{R}$ είναι:

α΄) $|x-y| = |y-x|$,

β΄) $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ και

γ΄) $|x-y| \leq |x-z| + |z-x|$.

Συνεπώς, μιμούμενοι τις παραπάνω ιδιότητες, μπορούμε να εισαγάγουμε απόσταση, την οποία ονομάζουμε μετρική σε ένα οποιαδήποτε μη κενό σύνολο, ως εξής:

Ορισμός 1.1.1. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε **μετρική** στο X είναι μια απεικόνιση d του $X \times X$ στο $\mathbb{R}_{\geq 0}$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:[1]

α΄) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$.

β΄) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

γ΄) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$. (Τριγωνική ιδιότητα).

[1] Χάριν ευκολίας το $d((x, y))$ εφεξής θα το γράφουμε $d(x, y)$. Το ίδιο θα κάνουμε και για οποιαδήποτε απεικόνιση f που ορίζεται σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αντί για $f((x_1, \ldots, x_n))$ θα γράφουμε $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Το ζεύγος (X,d) ονομάζεται **μετρικός χώρος** και τα στοιχεία του X σημεία του μετρικού χώρου.

Παρατηρήσεις:

1. Τον μη αρνητικό αριθμό $d(x,y)$ ονομάζουμε **απόσταση των x και y**.
2. Έχουμε ότι $d(x,y)+d(y,x)\geq 0 \Rightarrow 2d(x,y)\geq 0 \Rightarrow d(x,y)\geq 0$. Δηλαδή το ότι η απόσταση είναι μη αρνητικός αριθμός προκύπτει από τις χαρακτηριστικές ιδιότητές της, κατά συνέπεια στον ορισμό θα μπορούσε και να παραληφθεί.
3. Η τριγωνική ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:
   Αν $x,x_1,\ldots,x_n,y\in X$, τότε $d(x,y)\leq d(x,x_1)+d(x_1,x_2)+\ldots+d(x_n,y)$.

Παραδείγματα 1.1.1.

1. Η απεικόνιση $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

ορίζει στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μια μετρική.

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2} \\ &= d((y_1,\ldots,y_n),(x_1,\ldots,x_n)) \,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ (x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n) \,. \end{aligned}$$

- Για την απόδειξη της τριγωνικής ιδιότητας έχουμε

$$d((x_1,\ldots,x_n),(z_1,\ldots,z_n))\leq d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))+ d((y_1,\ldots,y_n),(z_1,\ldots,z_n)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n|x_i-z_i|^2\Big)^{\frac12}\leq\Big(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\Big)^{\frac12}+\Big(\sum_{i=1}^n|y_i-z_i|^2\Big)^{\frac12} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n|x_i-z_i|^2\leq\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2+\sum_{i=1}^n|y_i-z_i|^2+ 2\Big(\sum_{i=1}^n|x_i-y_1|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i=1}^n|y_i-z_i|^2\Big)^{\frac12}$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i||y_i-z_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

(ανισότητα Cauchy-Shwartz). Συνεπώς αρκεί

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i||y_i-z_i| \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\big(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\big)^2,$$

το οποίο ισχύει, γιατί $|x_i-z_i|^2 \leq \big(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\big)^2$ για κάθε $i=1,\ldots,n$.

□

Να σημειώσουμε ότι η παραπάνω μετρική, η οποία είναι η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη για τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **Ευκλείδεια μετρική** και το σύνολο $\mathbb{R}^n$, όταν εφοδιάζεται με αυτήν **Ευκλείδειος χώρος**. Στους Ευκλείδειους χώρους ιδιαίτερο ρόλο έχει ο μη αρνητικός αριθμός $d(x,0)$, ο οποίος ονομάζεται **νόρμα** του x ή **στάθμη** του x και συμβολίζεται $\|x\|$. Δηλαδή, αν $\mathbb{R}^n \ni x=(x_1,\ldots,x_n)$, τότε

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Αν $x=(x_1,\ldots,x_n)$ και $y=(y_1,\ldots,y_n)$, τότε

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\|x-y\|.$$

Επιπλέον, αν $\lambda\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

2. Η απεικόνιση $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

ορίζει στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μια μετρική.

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_1| \\ &= \sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i| \\ &= d((y_1,\ldots,y_n),(x_1,\ldots,x_n)) \,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\ &= d((x_1,\ldots,x_n),(z_1,\ldots,z_n)) \\ &\quad + d((z_1,\ldots,z_n),(y_1,\ldots,y_n)). \end{aligned}$$

□

3. Η απεικόνιση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\ldots,n\}$$

ορίζει στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μια μετρική.

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &= \max\{|x_i - y_i|,\ i = 1,\ldots,n\} \\ &= \max\{|y_i - x_i|,\ i = 1,\ldots,n\} \\ &= d((y_1,\ldots,y_n),(x_1,\ldots,x_n))\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \max\{|x_i - y_i|,\ i = 1,\ldots,n\} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ |x_i - y_i| = 0, i = 1,\ldots,n \quad &\Leftrightarrow \\ (x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)\,. \end{aligned}$$

- Έστω

$$\begin{aligned} \max\{|x_i - z_i|, i = 1,\ldots,n\} &= |x_m - z_m| \\ \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\ldots,n\} &= |x_k - y_k| \qquad \text{και} \\ \max\{|y_i - z_i|, i = 1,\ldots,n\} &= |y_r - z_r|\,. \end{aligned}$$

Τότε,

$$
\begin{aligned}
d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &= |x_k - y_k| \\
&\le |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \le |x_m - z_m| + |z_r - y_r| \\
&= d((x_1,\dots,x_n),(z_1,\dots,z_n)) \\
&+ d((z_1,\dots,z_n),(y_1,\dots,y_n)).
\end{aligned}
$$

□

4. Στο σύνολο $M_{\mathbb{R}}$ των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται στο $\mathbb{R}$, η απεικόνιση $d : M_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, με

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

ορίζει μια μετρική (**supremum μετρική**).

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup\{|g(x) - f(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= d(g,f)\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d(f,g) = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ \sup\{|f(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ |f(x) - g(x)| = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} &\quad \Leftrightarrow \\ f = g\,. & \end{aligned}$$

- Είναι

$$
\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &\le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow |f(x) - g(x)| \le \sup\{|f(x) - h(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\
&+ \sup\{|h(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow \sup\{|f(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \le \sup\{|f(x) - h(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\
&+ \sup\{|h(x) - g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)
\end{aligned}
$$

□

5. Στο σύνολο $C_{[a,b]}$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται στο $[a,b]$ η απεικόνιση $d : C_{[a,b]} \times C_{[a,b]} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, με

$$d(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\}$$

ορίζει μια μετρική **(μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης)**.

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d(f,g) &= \max\{|f(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\} \\ &= \max\{|g(x)-f(x)|\,/\,x\in[a,b]\} \\ &= d(g,f)\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d(f,g)=0 &\quad\Leftrightarrow \\ \max\{|f(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\}=0 &\quad\Leftrightarrow \\ |f(x)-g(x)|=0,\ \forall\,x\in[a,b] &\quad\Leftrightarrow \\ f=g\,. \end{aligned}$$

- Είναι

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \quad \forall x\in\mathbb{R} &\quad\Rightarrow \\ |f(x)-g(x)| \leq \max\{|f(x)-h(x)|\,/\,x\in[a,b]\}+ & \\ \max\{|h(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\} &\quad\Rightarrow \\ \max\{|f(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\} \leq \max\{|f(x)-h(x)|\,/\,x\in[a,b]\}+ & \\ \max\{|h(x)-g(x)|\,/\,x\in[a,b]\} &\quad\Rightarrow \\ d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g). \end{aligned}$$

□

6. Στο σύνολο $C_{[a,b]}$ η απεικόνιση $d: C_{[a,b]}\times C_{[a,b]}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

ορίζει επίσης μετρική.

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \\ &= \int_a^b |g(x)-f(x)|dx \\ &= d(g,f)\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d(f,g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \int_a^b |f(x)-g(x)|dx = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ f(x) = g(x),\ \forall\, x \in [a,b] \quad &\Leftrightarrow \\ f = g\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| \le |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|,\ \forall x \in [a,b] \quad &\Rightarrow \\ \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \le \int_a^b |f(x)-h(x)|dx + \int_a^b |h(x)-g(x)|dx \quad &\Rightarrow \\ d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

□

7. Στο σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών με όρους πραγματικούς αριθμούς η απεικόνιση $d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, με

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}\,,$$

όπου $x = (x_n),\ y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ορίζει μετρική.[2]

Απόδειξη:

- $$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|} \\ &= d(y,x)\,. \end{aligned}$$

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x_n = y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = y\,.$
- Εύκολα αποδεικνύεται η ανισότητα

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \le \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|},$$

  από την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \quad &\Rightarrow \\ d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

□

[2] Η απόδειξη του ότι η d είναι καλώς ορισμένη γίνεται με απλά επιχειρήματα απειροστικού λογισμού, και αφήνεται ως άσκηση.

8. Στο σύνολο ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς η απεικόνιση $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \,/\, n \in \mathbb{N}\},$$

όπου

$x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_\infty$ ορίζει μετρική.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται όπως το παράδειγμα 4. □

9. Στο σύνολο D των δυαδικών ακολουθιών, δηλαδή των ακολουθιών που έχουν όρους μόνον το 0 και το 1 η απεικόνιση $d : D \times D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

όπου $x = (x_n), y = (y_n) \in D$ ορίζει μετρική. Ο χώρος με την μετρική αυτή ονομάζεται **χώρος Cantor**.

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση. □

10. Στο σύνολο ℓ_2 των ακολουθιών $x = (x_n)$ του $\mathbb{R}$, για τις οποίες $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ η απεικόνιση $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

όπου $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_2$ ορίζει μετρική. Το σύνολο ℓ_2 με την μετρική αυτή ονομάζεται **χώρος Hilbert**.[3]

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη του παραδείγματος 1. □

11. Η απεικόνιση του παραδείγματος 10 στο σύνολο των ακολουθιών x_n, με $0 < x_n < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζει μετρική[4] και ο προκύπτων μετρικός χώρος ονομάζεται **θεμελιώδης κύβος** ή **κύβος του Hilbert**.

12. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε η απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με

$$d(x,y) = \begin{cases} 1\,, & x \neq y \\ 0\,, & x = y \end{cases}$$

ορίζει στο X μετρική, η οποία ονομάζεται **διακριτή μετρική** και ο προκύπτων χώρος **διακριτός χώρος**.

[3] Η απόδειξη του ότι η απεικόνιση του παραδείγματος 10, όπως και εκείνη του παραδείγματος 9 είναι καλώς ορισμένες, γίνεται με απλά επιχειρήματα απειροστικού λογισμού και αφήνεται ως άσκηση.

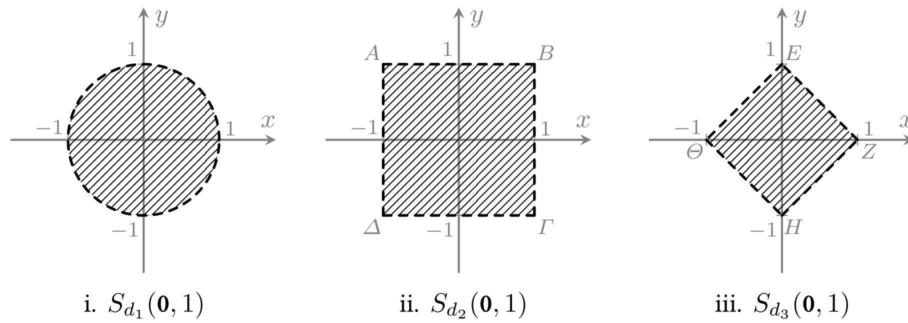
Ορισμός 1.1.2. Αν (X, d) μετρικός χώρος, $x_0 \in X$ και ε ένας θετικός πραγματικός, τότε το σύνολο $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X / d(x_0, x) < \varepsilon\}$ ονομάζεται **ανοικτή μπάλα** με κέντρο το x_0 και ακτίνα ε.

Για να έχουμε μια εποπτική εικόνα της ανοικτής μπάλας διαλέγουμε ως χώρο τον $\mathbb{R}^2$ που τον εφοδιάζουμε με τις μετρικές

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,,$$
$$d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{και}$$
$$d_3(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\,,$$

όπου $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Και για τις τρεις πιο πάνω μετρικές θα δούμε τις ανοικτές μπάλες με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1. Στην πρώτη, η ανοικτή μπάλα $S_{d_1}(\mathbf{0}, 1)$ είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Στη δεύτερη περίπτωση, η $S_{d_2}(\mathbf{0}, 1)$ είναι το εσωτερικό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και στην τρίτη, η $S_{d_3}(\mathbf{0}, 1)$ το εσωτερικό του τετραγώνου $EZH\Theta$ (Σχήμα 1.1).



i. $S_{d_1}(\mathbf{0}, 1)$ ii. $S_{d_2}(\mathbf{0}, 1)$ iii. $S_{d_3}(\mathbf{0}, 1)$

Σχήμα 1.1

Ορισμός 1.1.3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θα λέμε ότι το A είναι **ανοικτό υποσύνολο** του X ή ανοικτό στον X, αν και μόνον, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq A$ ($x \in A \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0;\ S(x, \varepsilon) \subseteq A$). Το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του X συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_d$.

Παραδείγματα 1.1.2. Στον χώρο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική ($d(x, y) = |x - y|$), αν $a < b$, να αποδείξετε ότι:

1. Όλα τα ανοικτά διαστήματα είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
2. Τα διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
3. Τα σύνολα $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$, $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
4. Τα μονοσύνολα δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

[4]Είναι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, άρα η d είναι καλώς ορισμένη.

Πρόταση 1.1.1. *Αν* (X,d) *μετρικός χώρος, τότε*

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}_d$,

β΄) $X \in \mathcal{T}_d$,

γ΄) $A_i \in \mathcal{T}_d \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_d$ *και*

δ΄) $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_d$.

Απόδειξη:

α΄) Η υπόθεση της συνεπαγωγής του ορισμού 1.1.3 είναι ψευδής, συνεπώς η συνεπαγωγή αληθεύει. □

β΄) Η αλήθεια της πρότασης είναι προφανής. □

γ΄) Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, άρα υπάρχει $i \in I$, ώστε $x \in A_i$. Επειδή το A_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq A_i$, άρα $S(x,\varepsilon) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, άρα $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_d$. □

δ΄) Έστω $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, τότε $x \in A_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n$, άρα υπάρχουν $\varepsilon_i > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon_i) \subseteq A_i \quad \forall i = 1,\ldots,n$. Αν $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, τότε

$$S(x,\varepsilon) \subseteq S(x,\varepsilon_i) \subseteq A_i \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow$$

$$S(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i\,,$$

άρα $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_d$. □

1.2 Ο ορισμός του τοπολογικού χώρου.

Ο προσδιορισμός της γειτονικότητας μέσω μετρικής, όπως θα δούμε, δεν είναι πάντα δυνατός. Υπάρχουν σύνολα, στα οποία δεν είναι δυνατόν να ορίσουμε μετρική, πλην όμως, είναι απαραίτητο να καθοριστεί η έννοια της γειτονικότητας. Την απαίτηση αυτή καλύπτει η έννοια της τοπολογίας, η οποία αποτελεί γενίκευση της μετρικής και προσδιορίζει την γειτονικότητα με ποιοτικό και όχι ποσοτικό τρόπο. Τοπολογία σε ένα μη κενό σύνολο X είναι ένα σύνολο που αποτελείται από υποσύνολα του X, τα λεγόμενα ανοικτά σύνολα. Τα ανοικτά σύνολα πρέπει να έχουν τις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{T}$ του δυναμοσυνόλου του X λέγεται **τοπολογία** στον X, αν και μόνον, αν

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$,

β΄) $X \in \mathcal{T}$,

γ΄) $U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ και

δ΄) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται **τοπολογικός χώρος** και τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ **ανοικτά υποσύνολα** του τοπολογικού χώρου X. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την έκφραση, το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathcal{T}$. Στο εξής, όταν είναι γνωστή η τοπολογία του χώρου θα αναφέρουμε μόνον τον χώρο και όχι το ζεύγος.

Παρατήρηση: Η τοπολογία αποτελεί μία γενίκευση της μετρικής. Όπως θα δούμε στα αμέσως επόμενα κάθε μετρική σε έναν χώρο εισάγει μία τοπολογία. Όμως το "κοντά" στην τοπολογία δεν προσδιορίζεται ποσοτικά, δηλαδή με την απόσταση, αλλά ποιοτικά. Δύο στοιχεία του χώρου είναι "κοντινά", αν ανήκουν στο ίδιο ανοικτό υποσύνολο του χώρου. Στα επόμενα, πολλές φορές θα δούμε ότι και στις περιπτώσεις που έχουμε να κάνουμε με μετρικούς χώρους, χρησιμοποιούμε ποιοτικές-τοπολογικές τεχνικές, γιατί αυτό είναι αποτελεσματικότερο.

Παραδείγματα 1.2.1.

1. Αν $X \neq \varnothing$, τότε το δυναμοσύνολο του X είναι μια τοπολογία στον X, στην οποία κάθε υποσύνολο του είναι ανοικτό. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **διακριτή** και ο τοπολογικός χώρος **διακριτός**.

2. Αν $X \neq \varnothing$, τότε το σύνολο $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ προφανώς ορίζει τοπολογία στο X, η οποία ονομάζεται **τετριμμένη** και ο τοπολογικός χώρος **τετριμμένος**.

3. Αν X είναι μη κενό σύνολο και $x \in X$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{U \,/\, U \in \mathcal{P}(X) \wedge x \in U\}$$

είναι μια τοπολογία στον X, η οποία ονομάζεται **τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου**.

Απόδειξη:

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$, εξ υποθέσεως.

β΄) $X \in \mathcal{T}$, επειδή $x \in X$.

γ΄) Έστω $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα της οικογένειας είναι μη κενά, γιατί, σε περίπτωση που κάποια από αυτά είναι ίσα με το κενό, μπορούν να παραλειφθούν, χωρίς να αλλάξει η ένωσή τους. Έχουμε $x \in U_i$ για κάθε $i \in I$, άρα $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, συνεπώς $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

δ΄) Αν κάποιο από τα $U_1, \ldots, U_n$ είναι κενό, τότε $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \varnothing \in \mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι τα $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ είναι μη κενά, άρα $x \in A_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, άρα $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. □

4. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο και $x \in X$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{X\} \cup \{U \,/\, U \in \mathcal{P} \wedge x \notin U\}$$

είναι μια τοπολογία στο X, η οποία ονομάζεται **τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου**.

Απόδειξη:

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$, επειδή $x \notin \varnothing$.

β΄) $X \in \mathcal{T}$, εξ υποθέσεως.

γ΄) Έστω $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα της οικογένειας είναι διαφορετικά από το X, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, αν κάποιο από τα U_i είναι ίσο με το X θα έχουμε $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X \in \mathcal{T}$. Επομένως $x \notin U_i$ για κάθε $i \in I$, συνεπώς $x \notin \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ άρα $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

δ΄) Αν κάποιο από τα $U_1, \ldots, U_n$ είναι ίσο με X, τότε μπορεί να παραληφθεί χωρίς να αλλάξει η τομή. Ως εκ τούτου, υποθέτουμε ότι $U_i \neq X$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και έχουμε

$$\begin{aligned} x \notin U_i \Rightarrow x &\notin \bigcap_{i=1}^{n} U_i \\ &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}\,. \end{aligned}$$

□

5. Αν $X \neq \varnothing$, τότε το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \big\{U \,/\, U \in \mathcal{P}(X) \;\wedge\; |X \setminus U| < \aleph_0\big\}^5$$

είναι μια τοπολογία στο X. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **τοπολογία του πεπερασμένου συμπληρώματος** ή **συμπεπερασμένη τοπολογία**.

Απόδειξη:

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$, εξ ορισμού.

β΄) $X \in \mathcal{T}$, επειδή $|X \setminus X| = 0 < \aleph_0$.

[5] Γράφοντας $|X \setminus U| < \aleph_0$, εννοούμε πως το $X \setminus U$ είναι κενό ή πεπερασμένο.

γ΄) Έστω $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση που κάποια από τα U_i είναι ίσα με το κενό μπορούν να παραληφθούν, χωρίς να αλλάξει η ένωση. Ως εκ τούτου μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$. Τότε $|X \setminus U_i| < \aleph_0$ για κάθε $i \in I$ και, επειδή $\bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i) \subseteq X \setminus U_j$ για κάποιο $j \in I$ έχουμε $\Big|\bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i)\Big| \leq |X \setminus U_j| < \aleph_0$, συνεπώς, αφού $X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i)$ είναι $\Big|X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i\Big| < \aleph_0$, άρα $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

δ΄) Αν κάποιο από τα $U_1, \ldots, U_n$ είναι ίσο με το κενό, τότε $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \varnothing$, άρα $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. Σε αντίθετη περίπτωση είναι

$$\begin{aligned} U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \quad &\Rightarrow \quad |X \setminus U_i| < \aleph_0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |X \setminus U_i| < \aleph_0 \,. \end{aligned}$$

Αλλά $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(X \setminus U_i)$, άρα

$$\Big|X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big| = \Big|\bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus U_i)\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |X \setminus U_i| < \aleph_0 \,.$$

Συνεπώς $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. □

6. Αν X είναι ένα μη κενό, σύνολο, τότε το σύνολο

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \big\{U \,/\, U \in \mathcal{P}(X) \ \wedge \ |X \setminus U| \leq \aleph_0\big\}^6$$

είναι τοπολογία στο X και ονομάζεται **τοπολογία του αριθμήσιμου συμπληρώματος** ή **συναριθμήσιμη τοπολογία**.

Απόδειξη:

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$, εξ ορισμού.

β΄) $X \in \mathcal{T}$, επειδή $|X \setminus X| = 0 < \aleph_0$.

γ΄) Έστω $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση που κάποια από τα U_i είναι ίσα με το κενό μπορούν να παραληφθούν, χωρίς να αλλάξει η ένωση. Ως εκ τούτου μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$. Τότε $|X \setminus U_i| \leq \aleph_0$ για κάθε $i \in I$ και, επειδή $\bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i) \subseteq X \setminus U_j$, για κάθε $j \in I$ έχουμε $\Big|\bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i)\Big| \leq |X \setminus U_j| \leq \aleph_0$. Συνεπώς, αφού $X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus U_i)$ είναι $\Big|X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i\Big| \leq \aleph_0$, άρα $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

[6] Το $|X \setminus U| \leq \aleph_0$, σημαίνει ότι το $X \setminus U$ είναι αριθμήσιμο.

δ΄) Αν κάποιο από τα $U_1, \dots, U_n$ είναι ίσο με το κενό, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \varnothing$, άρα $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. Σε αντίθετη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \quad &\Rightarrow \quad |X \setminus U_i| \leq \aleph_0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |X \setminus U_i| \leq \aleph_0 \,. \end{aligned}$$

Αλλά $X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$, άρα

$$\left| X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |X \setminus U_i| \leq \aleph_0 \,.$$

Συνεπώς $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. □

7. Το σύνολο $\mathcal{T}$, το οποίο αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\varnothing$ και τα διαστήματα της μορφής (a, ∞), όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μία τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **τοπολογία των δεξιών διαστημάτων**. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ την **τοπολογία των αριστερών διαστημάτων**.

   Απόδειξη:

   α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$ εξ' ορισμού.

   β΄) $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$, εξ ορισμού.

   γ΄) Έστω $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση που το $\inf\{a_i \,/\, i \in I\}$ δεν είναι πραγματικός έχουμε $\bigcup_{i \in I} (a_i, \infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ και στην περίπτωση που $\inf\{a_i \,/\, i \in I\} = a \in \mathbb{R}$ έχουμε $\bigcup_{i \in I} (a_i, \infty) = (a, \infty) \in \mathcal{T}$. Άρα, σε κάθε περίπτωση

   $$\bigcup_{i \in I} (a_i, \infty) \in \mathcal{T}.$$

   δ΄) Είναι $\bigcap_{i=1}^{n} (a_i, \infty) = (a, \infty) \in \mathcal{T}$, όπου $a = \max\{a_1, \dots, a_n\}$. □

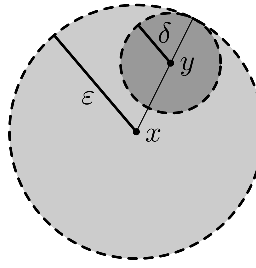
8. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος, τότε, όπως προκύπτει από την πρόταση 1.1.1, το $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στον X. Η παραπάνω τοπολογία ονομάζεται **τοπολογία που εισάγει η μετρική** d.

Παρατηρήσεις:

1. Κάθε ανοικτή μπάλα $S(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο στον X. Πράγματι, $y \in S(x, \varepsilon)$ και $\delta = \varepsilon - d(x, y) > 0$, τότε

   $$\begin{aligned} z \in S(y, \delta) \quad &\Rightarrow \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad z \in S(x, \varepsilon), \end{aligned}$$

   άρα $S(y, \delta) \subseteq S(x, \varepsilon)$, άρα $S(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_d$.



Σχήμα 1.2

2. Εφεξής, όταν αναφερόμαστε στου χώρους $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε ότι η τοπολογία τους είναι εκείνη που εισάγει η Ευκλείδεια μετρική, εκτός και αν γίνεται ρητή αναφορά σε διαφορετική τοπολογία.

Ορισμός 1.2.2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X, για το οποίο ισχύει $x \in U$ ονομάζεται **περιοχή του** x.

Ορισμός 1.2.3. Η τοπολογία $\mathcal{T}$ στο σύνολο X λέγεται **μετρικοποιήσιμη** και, κατά συνέπεια ο χώρος X **μετρικοποιήσιμος**, αν και μόνον, αν μπορούμε να ορίσουμε στον X μετρική d, ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Ορισμός 1.2.4. Δύο διαφορετικές τοπολογίες $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ στο σύνολο X λέγονται **συγκρίσιμες**, αν και μόνον, αν ισχύει ένα εκ των $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ή $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Στην περίπτωση που $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ λέμε ότι η $\mathcal{T}_1$ είναι **πτωχότερη** της $\mathcal{T}_2$ ή η $\mathcal{T}_2$ **πλουσιότερη** της $\mathcal{T}_1$.

Παρατήρηση: Δύο διαφορετικές τοπολογίες σε ένα σύνολο δεν είναι απαραίτητα συγκρίσιμες. Για παράδειγμα, στο σύνολο $X = \{a, b\}$ οι τοπολογίες $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$ και $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$ είναι μη συγκρίσιμες, γιατί δεν ισχύει $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, ούτε $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Παραδείγματα 1.2.2.

1. Σε ένα απειροσύνολο X η συναριθμήσιμη τοπολογία είναι πλουσιότερη από την συμπεπερασμένη, ενώ, αν το X είναι πεπερασμένο οι δύο αυτές τοπολογίες ταυτίζονται μεταξύ τους και με την διακριτή τοπολογία.

2. Στο $\mathbb{R}$ η Ευκλείδεια τοπολογία είναι πλουσιότερη από την τοπολογία των δεξιών διαστημάτων, γιατί το οποιοδήποτε (a, ∞) είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως προς την πρώτη, ενώ το $(0, 1)$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως προς τη δεύτερη.

3. Η πλουσιότερη τοπολογία σε ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο είναι η διακριτή, ενώ η πτωχότερη είναι η τετριμμένη.

Πρόταση 1.2.1. *Αν $\mathcal{T}_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια τοπολογιών στο σύνολο X, τότε η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ είναι μια τοπολογία στο X.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση: Δεν ισχύει το ίδιο και για την ένωση. Για παράδειγμα στο σύνολο $X = \{a, b, c\}$ οι $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ και $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$ είναι τοπολογίες, αλλά η $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$ δεν είναι.

Πρόταση 1.2.2. *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq Y \subseteq X$, τότε το σύνολο $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y / A \in \mathcal{T}\}$ είναι μία τοπολογία στο σύνολο Y.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 1.2.5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X. Το Y ονομάζεται **υπόχωρος** του X, αν και μόνον, αν είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y / A \in \mathcal{T}\}$, η οποία ονομάζεται **επαγόμενη** από την $\mathcal{T}$ τοπολογία στον Y.

Παρατηρήσεις:

1. Προφανώς το B' είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, αν, και μόνον, αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του X, ώστε $B' = B \cap Y$.

2. Η επαγόμενη τοπολογία από τον X στο υποσύνολο του Y δεν εξαρτάται μόνον από την τοπολογία του X, αλλά και από το ίδιο το Y. Για παράδειγμα, η επαγόμενη τοπολογία από την Ευκλείδεια στο $\mathbb{Z}$ είναι η διακριτή, γιατί, αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε το $\{x\} = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Ενώ η επαγόμενη τοπολογία από την Ευκλείδεια στο $\mathbb{Q}$ δεν είναι η διακριτή, γιατί για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $\{x\} \neq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, επομένως το $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.

3. Αν $A \subset X$, τότε μπορεί ένα υποσύνολο B του A να είναι ανοικτό υποσύνολο του A, ως προς την επαγόμενη τοπολογία, χωρίς να είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Για παράδειγμα τα ανοικτά ευθύγραμμα τμήματα είναι ανοικτά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας, αλλά δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του επιπέδου ($\mathbb{R}^2$). Το μοναδικό ανοικτό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας που είναι και ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου είναι το κενό. Από τον ορισμό της επαγόμενης τοπολογίας προκύπτει άμεσα ότι αν το A ανοικτό υποσύνολο του X και το B ανοικτό υποσύνολο του A, τότε το B είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

1.3 Εσωτερικό, κλειστότητα, παράγωγο σύνολο και σύνορο συνόλου

Ορισμός 1.3.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$. Το F ονομάζεται **κλειστό υποσύνολο του X ή κλειστό στον X**, αν και μόνον, αν το $F^c = X \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παρατηρήσεις:

1. Στον τοπολογικό χώρο X το κενό σύνολο και το ίδιο το X είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά υποσύνολά του.

2. Σε έναν διακριτό χώρο κάθε υποσύνολο του είναι ανοικτό, άρα και κλειστό συγχρόνως, αφού το συμπλήρωμα του είναι ανοικτό.

3. Τα $(a, b]$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε ανοικτά, ούτε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).
   Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι έννοιες ανοικτό και κλειστό δεν είναι, ούτε αποκλειστικές, ούτε εγκλειστικές.

Πρόταση 1.3.1.

α΄) *Αν F_i, $i \in I$ είναι μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X, τότε το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

β΄) *Αν τα $F_1, \dots, F_n$ είναι κλειστά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου X, τότε το $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη:

α΄) Τα F_i^c είναι για κάθε $i \in I$ ανοικτά υποσύνολα του X, άρα το $\bigcup_{i \in I} F_i^c$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συνεπώς το $\left(\bigcup_{i \in I} F_i^c\right)^c = \bigcap_{i \in I} (F_i^c)^c = \bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

β΄) Τα $F_1^c, \dots, F_n^c$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, άρα το $\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συνεπώς το $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Παρατηρήσεις:

1. Η ένωση μιας οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X δεν είναι απαραίτητα κλειστό υποσύνολο του X, όταν το πλήθος των συνόλων της οικογένειας είναι άπειρο. Παράδειγμα, τα στοιχεία της οικογένειας $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$ (γιατί;), αλλά η $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1)$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, γιατί το $(0, 1)^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (γιατί;).

2. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και με τα ανοικτά υποσύνολα, δηλαδή όταν έχουμε μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X και το πλήθος των στοιχείων της οικογένειας είναι άπειρο, τότε η τομή της οικογένειας δεν είναι απαραίτητα ανοικτό υποσύνολο του X. Παράδειγμα, τα στοιχεία της οικογένειας $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αλλά η $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.3.2. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq B \subseteq A \subseteq X$, τότε το B είναι κλειστό υποσύνολο του A, ως προς την επαγόμενη από τον X στο A τοπολογία, αν και μόνον, αν υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του X, ώστε $B = A \cap F$.*

Απόδειξη: Ονομάζουμε $\mathcal{F}$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του X, $\mathcal{F}_A$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του A και $\mathcal{T}_A$ το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του A. (Το

κλειστό και το ανοικτό στο A είναι ως προς την επαγόμενη από την $\mathcal{T}$ τοπολογία στο A). Έχουμε

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{F}_A &\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}_A \\ &\Rightarrow (\exists\, U \in \mathcal{T}); A \setminus B = A \cap U \\ &\Rightarrow A \cap B^c = A \cap U \\ &\Rightarrow A^c \cup (A \cap B^c) = A^c \cup (A \cap U) \\ &\Rightarrow A^c \cup B^c = A^c \cup U \\ &\Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = (A^c \cup U)^c \\ &\Rightarrow A \cap B = A \cap U^c \\ &\Rightarrow B = A \cap U^c \wedge U^c \in \mathcal{F}\,. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως,

$$\begin{aligned} (\exists\, F \in \mathcal{F}); B = B \cap A = A \cap F &\Rightarrow B^c \cup A^c = A^c \cup F^c \\ &\Rightarrow A \cap (B^c \cup A^c) = A \cap (A^c \cup F^c) \\ &\Rightarrow A \cap B^c = A \cap F^c \\ &\Rightarrow A \setminus B = A \cap U \wedge U = F^c \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}_A \\ &\Rightarrow B \in \mathcal{F}_A \end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις:

1. Αν το B είναι κλειστό υποσύνολο του A δεν είναι απαραίτητα και κλειστό υποσύνολο του X. Αντιπαράδειγμα, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το $A = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right] \cap \mathbb{Q}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Όμως έχουμε $A^c = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \cup \big([-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{A}\big)$. Είναι $\sqrt{2} \in A^c$ και, επειδή το οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα πραγματικών που περιέχει το $\sqrt{2}$ περιέχει και στοιχεία του A δεν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$, ώστε $\sqrt{2} \in U \subseteq A^c$ άρα το A^c δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως το A δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
   Αν όμως το A είναι κλειστό υποσύνολο του X και το B είναι κλειστό υποσύνολο του A, τότε, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει άμεσα ότι το B είναι κλειστό υποσύνολο του X.

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

   α΄) $\varnothing \in \mathcal{C}$.

   β΄) $X \in \mathcal{C}$.

γ΄) $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{C}$.

δ΄) $F_i \in \mathcal{C} \quad \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{T}(X) / A^c \in \mathcal{C}\}$ ορίζει μια τοπολογία στον X, της οποίας τα κλειστά σύνολα είναι τα στοιχεία του $\mathcal{C}$ και μόνον αυτά. Επομένως τη τοπολογία σε ένα μη κενό σύνολο μπορούμε να την ορίσουμε και με την περιγραφή των κλειστών συνόλων της.

Ορισμός 1.3.2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. **Εσωτερικό** του A ονομάζουμε την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X, τα οποία περιέχονται στο A, δηλαδή το σύνολο

$$\bigcup \{U \,/\, U \in \mathcal{T} \wedge U \subseteq A\}.$$

Η ένωση αυτή είναι μη κενή, γιατί το $\varnothing$ είναι ανοικτό και περιέχεται στο A. Το εσωτερικό του A στην περίπτωση που στο X δεν ορίζεται και άλλη τοπολογία, άρα δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συμβολίζεται με A^0 ή $\mathrm{Int}(A)$, αλλιώς με $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}}(A)$.

Πρόταση 1.3.3. *Αν X τοπολογικός χώρος και A, B υποσύνολα του X, τότε:*

α΄) $\varnothing^0 = \varnothing$.

β΄) $X^0 = X$

γ΄) $A^0 \subseteq A$.

δ΄) Το A^0 είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

ε΄) Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε $A^0 = A$.

ϛ΄) $(A^0)^0 = A^0$.

ζ΄) $A \subseteq B \Rightarrow A^0 \subseteq B^0$.

η΄) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

θ΄) $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$.

Απόδειξη:

α΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

β΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

γ΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

δ΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

ε΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

ϛ΄) Άμεση συνέπεια των δ και ε. □

ζ΄) Είναι $A^0 \subseteq A \subseteq B$ και, επειδή το A^0 είναι ανοικτό υποσύνολο του X, από τον ορισμό του εσωτερικού έπεται ότι $A^0 \subseteq B^0$. □

η΄) Είναι $A \cap B \subseteq A$, άρα $(A \cap B)^0 \subseteq A^0$. Ομοίως $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$. Επομένως,

$$(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0 \tag{1.1}$$

Αφετέρου,

$$\begin{aligned} A^0 \cap B^0 \subseteq A^0 \subseteq A \wedge A^0 \cap B^0 \subseteq B^0 \subseteq B \quad &\Rightarrow \\ A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B \quad &\Rightarrow \\ (A^0 \cap B^0)^0 \subseteq (A \cap B)^0 . \end{aligned}$$

Αλλά το $A^0 \cap B^0$ είναι ανοικτό στον X, συνεπώς $(A^0 \cap B^0)^0 = A^0 \cap B^0$, δηλαδή

$$A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0 \tag{1.2}$$

Από τις (1.1) και (1.2) έχουμε το ζητούμενο. □

θ΄) Είναι

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow A^0 \subseteq (A \cup B)^0$$

και

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow B^0 \subseteq (A \cup B)^0 ,$$

άρα

$$A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0.$$ □

Παραδείγματα 1.3.1.

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$ αν $a < b$ είναι $[a,b]^0 = (a,b)$. Πράγματι, το (a,b) είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}$, αλλά τα $(a,b]$ και $[a,b)$ δεν ανοικτά στον $\mathbb{R}$, επομένως το ζητούμενο αληθεύει. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $(a,b]^0 = [a,b)^0 = (a,b)^0 = (a,b)$.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$ είναι $\mathbb{N}^0 = \varnothing$. Πράγματι, με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το εσωτερικό του $\mathbb{N}$ είναι το μη κενό σύνολο A. Τότε υπάρχουν $x \in A$ και $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon) = (-\varepsilon + x, x + \varepsilon) \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει διάστημα. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\mathbb{Q}^0 = \varnothing$ και $\mathbb{A}^0 = \varnothing$.

3. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι $(\mathbb{D}^n)^0 = \mathbb{B}^n$. Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $\mathbb{D}^1 = [-1,1]$ και $\mathbb{B}^1 = (-1,1)$, συνεπώς η σχέση $\left(\mathbb{D}^1\right)^0 = \mathbb{B}^1$ αληθεύει. Υποθέτουμε ότι $n > 1$, τότε το $\mathbb{B}^n = \bigcup\limits_{\|x\|<1} S(0,x)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{D}^n$, άρα

$$\mathbb{B}^n \subseteq (\mathbb{D}^n)^0. \tag{1.3}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό έχουμε

Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{D}^n)^0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq (\mathbb{D}^n)^\circ$. Θεωρούμε $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ και έχουμε $d(x, \lambda x) = \|\lambda x - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, άρα $\lambda x \in S(x, \varepsilon) \subseteq (\mathbb{D}^n)^0 \subseteq \mathbb{D}^n$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \lambda x \in (\mathbb{D}^n)^0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda x \in \mathbb{D}^n \\ &\Rightarrow \quad \|\lambda x\| \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \|x\| < \lambda \|x\| = \|\lambda x\| \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \|x\| < 1 \\ &\Rightarrow \quad x \in \mathbb{B}^n \,. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$(\mathbb{D}^n)^0 \subseteq \mathbb{B}^n \tag{1.4}$$

Από τις (1.3) και (1.4) έπεται το ζητούμενο. □

4. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με την συμπεπερασμένη τοπολογία. Αν A πεπερασμένο υποσύνολο του X, τότε

$$\begin{aligned} \varnothing \neq B \subseteq A \quad &\Rightarrow \quad A^c \subseteq B^c \\ &\Rightarrow \quad |B^c| \geq |A^c| \geq \aleph_0 \,, \end{aligned}$$

άρα το B δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το μοναδικό ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A είναι το κενό, άρα $A^0 = \varnothing$.

5. Έστω X τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0. Αν $x_0 \in A$, τότε $A^0 = A$ και αν, $x_0 \notin A$, τότε $A^0 = \varnothing$.

6. Έστω X τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου x_0. Αν $x_0 \in A$, τότε $A^0 = A \setminus \{x_0\}$ και, αν $x_0 \notin A$, τότε $A^0 = A$.

Παρατήρηση: Η η΄ ιδιότητα της πρότασης 1.3.3 γενικεύεται για πεπερασμένο πλήθος υποσυνόλων του X. Δηλαδή $(A_1 \cap \ldots \cap A_n)^0 = A_1^0 \cap \ldots \cap A_n^0$. Δεν γενικεύεται, όμως στην περίπτωση που το πλήθος των υποσυνόλων του X είναι άπειρο. Για παράδειγμα, στον χώρο $\mathbb{R}$ έχουμε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, ενώ $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right)^0 = \{0\}^0 = \varnothing$.

Πρόταση 1.3.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε $x \in A^0$, αν και μόνον, αν υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $U \subseteq A$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστω $x \in A^0$ και περιοχή V του x. Το σύνολο $U = A^0 \cap V$ είναι ανοικτό στον υποσύνολο του X και $x \in U \subseteq A^0 \subseteq A$, άρα το U είναι περιοχή x του με $U \subseteq A$.

Το ικανό: Έστω U περιοχή του x, με $U \subseteq A$. Το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $U \subseteq A$, άρα $U \subseteq A^0$, επομένως $x_0 \in A^0$. □

Πόρισμα. *Αν X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:*
Το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, αν, και μόνον, αν κάθε $x \in A$ έχει περιοχή U_x, ώστε $U_x \subseteq A$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. **Θήκη** ή **κλειστότητα** του A στο X ονομάζουμε την τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του X, τα οποία περιέχουν το A. Η τομή αυτή είναι μη κενή, γιατί το X είναι κλειστό υποσύνολο του εαυτού του και περιέχει το A. Όταν στο X δεν έχουμε ορίσει περισσότερες από μία τοπολογίες η θήκη του συμβολίζεται με, $\overline{A}$ ή $\mathrm{Cl}(A)$. Σε αντίθετη περίπτωση συμβολίζεται με $\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}}(A)$.

Πρόταση 1.3.5. *Αν τοπολογικός χώρος και A, B υποσύνολα του X, τότε:*

α΄) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

β΄) $\overline{X} = X$.

γ΄) $A \subseteq \overline{A}$.

δ΄) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

ε΄) Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε $\overline{A} = A$.

ς΄) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

ζ΄) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

η΄) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

θ΄) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη:

α΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

β΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

γ΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

δ΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

ε΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

ς΄) Άμεση συνέπεια των δ και ε. □

ζ΄) Είναι $A \subseteq B \subseteq \overline{B} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

η΄) Είναι $A \subseteq A \cup B$, άρα $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Ομοίως $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Επομένως,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \tag{1.5}$$

Αφετέρου,

$$\begin{aligned} A \subseteq \overline{A} \wedge B \subseteq \overline{B} &\Rightarrow A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \\ &\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}. \end{aligned}$$

Αλλά το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, συνεπώς $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$, δηλαδή

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.6}$$

Από τις (1.5) και (1.6) έχουμε το ζητούμενο. □

θ΄) Είναι

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$$

και

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}\,,$$

άρα

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$ □

Παραδείγματα 1.3.2.

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, αν $a < b$, τότε $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

   Πράγματι τα $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) δεν είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, γιατί τα συμπληρώματα τους $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$, $(\infty, a] \cup (b, \infty)$, $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$, αντιστοίχως δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αφετέρου το $[a, b]$ είναι κλειστό, γιατί το $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ είναι ανοικτό. Επομένως το ζητούμενο αληθεύει. Ομοίως $\overline{[a, b)} = [a, b]$ και $\overline{(a, b]} = [a, b]$.

2. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Αν A πεπερασμένο υποσύνολο του X, τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $\overline{A} = A$.

3. Έστω τοπολογικός χώρος X με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0. Αν $x_0 \notin A$, τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, συνεπώς $\overline{A} = A$.

4. Για $n = 1$ έχουμε $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$, άρα το $\mathbb{D}^1$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως $\overline{\mathbb{D}^1} = \mathbb{D}^1$. Έστω ότι $n > 1$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$, τότε $\|x\| > 1$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \|x\| - 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in S(x, \varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad d(x, y) < \varepsilon = \|x\| - 1 \\ &\Rightarrow \quad \|y\| = d(y, 0) \geq d(0, x) - d(y, x) \geq \|x\| - d(x, y) > 1 \\ &\Rightarrow \quad \|y\| > 1 \\ &\Rightarrow \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n, \end{aligned}$$

   άρα $S(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$,

   επομένως το $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, άρα το $\mathbb{D}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, άρα $\overline{\mathbb{D}^n} = \mathbb{D}^n$.

Πρόταση 1.3.6. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε $x \in \overline{A}$, αν και μόνον, αν για κάθε περιοχή U του x ισχύει $U \cap A \neq \varnothing$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως για κάποια περιοχή U του x ισχύει $U \cap A = \varnothing$, άρα

$$A \subseteq U^c \tag{1.7}$$

Το U^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $\overline{U^c} = U^c$. Συνεπώς, η (1.7) συνεπάγεται την $\overline{A} \subseteq U^c$, άρα $x \notin \overline{A}$, άτοπο.

Το ικανό: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $x \notin \overline{A}$, άρα $x \in (\overline{A})^c$. Επειδή το σύνολο $(\overline{A})^c$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X είναι μια περιοχή του x και

$$\begin{aligned} A \subseteq \overline{A} \quad &\Rightarrow \quad (\overline{A})^c \subseteq A^c \\ &\Rightarrow \quad (\overline{A})^c \cap A \subseteq A^c \cap A = \varnothing \\ &\Rightarrow \quad (\overline{A})^c \cap A = \varnothing\,, \end{aligned}$$

άτοπο. □

Ορισμός 1.3.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$. Το D ονομάζεται **πυκνό υποσύνολο** του X, αν και μόνον, αν $\overline{D} = X$.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού και της πρότασης 1.3.6 είναι η

Πρόταση 1.3.7. *Έστω τοπολογικός χώρος X, τότε το A είναι πυκνό υποσύνολο του X, αν και μόνον, αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο $U \neq \varnothing$ του X ισχύει $U \cap A \neq \varnothing$.*

Παραδείγματα 1.3.3.

1. Έστω U μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $x \in U$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $(-\varepsilon+x, x+\varepsilon) \subseteq U$. Από τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι $(-\varepsilon+x, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Q} \neq \varnothing$, άρα $U\cap\mathbb{Q} \neq \varnothing$, άρα από την πρόταση 1.3.7 συμπεραίνουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2. Ομοίως αποδεικνύεται και το $\mathbb{A}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3. Έστω $C([a,b])$ ο μετρικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ με τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης και $P([a,b])$ το σύνολο των πολυωνύμων που ορίζονται στο $[a,b]$. Από το γνωστό προσεγγιστικό θεώρημα Weirstrass έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $f \in C([a,b])$, υπάρχει $p \in P([a,b])$, ώστε $p \in S(f,\varepsilon)$. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $C([a,b])$ και $f \in U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(f,\varepsilon) \subseteq U$, άρα $U \cap P([a,b]) \neq \varepsilon$, άρα το $P([a,b])$ είναι πυκνό υποσύνολο του $C([a,b])$.

Ορισμός 1.3.5. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται **πουθενά πυκνό υποσύνολο** του X ή **αραιό υποσύνολο** του X, αν και μόνον, αν $(\overline{A})^0 = \varnothing$.

Παράδειγμα 1.3.1. Έχουμε ότι $\mathbb{N}^c = (-\infty, 1) \cup \big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1)\big)$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. Από το δεύτερο από τα παραδείγματα 1.3.1 έχουμε ότι $\mathbb{N}^0 = \varnothing$, άρα $(\overline{\mathbb{N}})^0 = \varnothing$. Επομένως το $\mathbb{N}$ είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη σε πολλές από τις αποδείξεις που ακολουθούν.

Πρόταση 1.3.8. *Αν* $(X,\mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$, *τότε*

α΄) $X \setminus A^0 = \overline{X \setminus A}$.

β΄) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^0$.

Απόδειξη:

α΄)
$$\begin{aligned} x \in X \setminus A^0 &\quad \Leftrightarrow \\ x \notin A^0 &\quad \Leftrightarrow \\ (U \in \mathcal{T} \wedge x \in U \;\Rightarrow\; U \nsubseteq A) &\quad \Leftrightarrow \\ (U \in \mathcal{T} \wedge x \in U \;\Rightarrow\; U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing) &\quad \Leftrightarrow \\ x \in \overline{X \setminus A}\,, & \end{aligned}$$

δηλαδή $X \setminus A^0 = \overline{X \setminus A}$. □

β΄)
$$\begin{aligned} x \in X \setminus \overline{A} &\quad \Leftrightarrow \\ x \notin \overline{A} &\quad \Leftrightarrow \\ (\exists\, U \in \mathcal{T}); x \in U \wedge U \cap A = \varnothing &\quad \Leftrightarrow \\ (\exists\, U \in \mathcal{T}); x \in U \wedge U \subseteq X \setminus A &\quad \Leftrightarrow \\ x \in (X \setminus A)^0\,, & \end{aligned}$$

δηλαδή $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^0$. □

Πρόταση 1.3.9. *Έστω* X *τοπολογικός χώρος και* A *αραιό υποσύνολο του* X *τότε το* $X \setminus A$ *είναι πυκνό υποσύνολο του* X.

Απόδειξη: Έχουμε $\left(\overline{A}\right)^0 = \varnothing$, άρα $X = \overline{X \setminus \left(\overline{A}\right)^0} = \overline{\overline{X \setminus \overline{A}}} = \overline{X \setminus \overline{A}}$. Επομένως

$$\begin{aligned} A \subseteq \overline{A} &\Rightarrow X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A} \\ &\Rightarrow \overline{X \setminus \overline{A}} \subseteq \overline{X \setminus A} \\ &\Rightarrow X = \overline{X \setminus \overline{A}} \subseteq \overline{X \setminus A} \subseteq X \\ &\Rightarrow \overline{X \setminus A} = X\,, \end{aligned}$$

άρα το $X \setminus A$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. □

Παρατήρηση: Το: αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $X \setminus A$ είναι αραιό υποσύνολο του X δεν αληθεύει πάντα. Για παράδειγμα τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι και τα δύο πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3.6. Έστω X τοπολογικός χώρος $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x ονομάζεται **οριακό σημείο του** A, αν και μόνον, αν για κάθε περιοχή U του x ισχύει

$$U \cap \big(A \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing.$$

Τα σημεία του A, τα οποία δεν είναι οριακά ονομάζονται **μεμονωμένα**. Το σύνολο των οριακών σημείων του A ονομάζεται **παράγωγο σύνολο του** A και συμβολίζεται με A'.

Παραδείγματα 1.3.4.

1. Για τον οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο προφανώς ισχύει $\varnothing' = \varnothing$
2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, αν $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, τότε $A' = \{0\}$. Πράγματι,
   - Αν $x < 0$, τότε για $0 < \varepsilon < |x|$ έχουμε $(-\varepsilon + x, x + \varepsilon) \cap A = \varnothing$, άρα $x \notin A'$.
   - Αν $x > 1$, τότε για $0 < \varepsilon < x - 1$ έχουμε $(-\varepsilon + x, x + \varepsilon) \cap A = \varnothing$, άρα $x \notin A'$.
   - $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap A = \{1\}$, άρα $1 \notin A'$.
   - Αν $x = \frac{1}{n}$ για κάποιο $n > 1$, τότε $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$, άρα $x \notin A'$.
   - Αν $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, τότε $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \cap A = \varnothing$, άρα $x \notin A'$.
   - Τέλος, αν U είναι μία περιοχή του 0, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$. Αλλά, επειδή $\frac{1}{n} \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,, \forall n \geq n_0$, άρα $U \cap (A \setminus \{0\}) \neq \varnothing$, άρα $0 \in A'$.

   Συνεπώς $A' = \{0\}$.
3. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, αν $A = (0, 1)$, τότε $A' = [0, 1]$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη και αφήνεται, ως άσκηση στον αναγνώστη.
4. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία και A ένα μη πεπερασμένο υποσύνολό του. Αν $x \in X$ και U μια περιοχή του x, τότε το U είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το U^c είναι πεπερασμένο, επομένως $A \setminus \{x\} \nsubseteq U^c$, άρα $(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$, άρα $x \in A'$. Δηλαδή $A' = X$.

Πρόταση 1.3.10. *Αν X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε $\overline{A} = A \cup A'$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και U αυθαίρετα επιλεγμένη περιοχή του x, τότε

$$\begin{aligned} x \in A \cup A' &\quad \Rightarrow \\ x \in A \,\vee\, x \in A' &\quad \Rightarrow \\ U \cap A \neq \varnothing \,\vee\, U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing &\quad \Rightarrow \\ U \cap A \neq \varnothing &\quad \Rightarrow \\ x \in \overline{A}\,, & \end{aligned}$$

άρα

$$A \cup A' \subseteq \overline{A} \tag{1.8}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \quad &\Rightarrow \\ (x \in \overline{A} \wedge x \in A) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \notin A) \quad &\Rightarrow \\ x \in A \vee U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing \quad &\Rightarrow \\ x \in A \vee x \in A' \quad &\Rightarrow \\ x \in A \cup A' \,, \end{aligned}$$

άρα

$$\overline{A} \subseteq A \cup A' \tag{1.9}$$

Από τις (1.8) και (1.9) έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.11. *Αν X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, αν και μόνον, αν $A' \subseteq A$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο:

$$\begin{aligned} \overline{A} = A \cup A' \Rightarrow A &= A \cup A' \\ &\Rightarrow A' \subseteq A \,. \end{aligned}$$

Το ικανό: Έχουμε $\overline{A} = A \cup A' \wedge A' \subseteq A$, άρα $\overline{A} \subseteq A$. Το $A \subseteq \overline{A}$ αληθεύει, άρα $A = \overline{A}$, επομένως το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Πρόταση 1.3.12. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος $\varnothing \neq A \subseteq X$ και $x \in A'$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το $A \cap S(x, \varepsilon)$ είναι απειροσύνολο.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $S(x,\varepsilon) \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $\delta = d(x, x_k) = \min\{d(x, x_1), \dots, d(x, x_n)\}$. Τότε, από τον ορισμό του A' υπάρχει $y \neq x$, με $y \in A \cap S(x, \delta)$. Αλλά,

$$\begin{aligned} S(x,\delta) \subseteq S(x,\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad S(x,\delta) \cap A \subseteq S(x,\varepsilon) \cap A \\ &\Rightarrow \quad y \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ &\Rightarrow \quad \delta \leq d(x,y) < \delta \,, \end{aligned}$$

άτοπο. □

Ορισμός 1.3.7. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. **Σύνορο** του A ονομάζουμε το σύνολο $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Το σύνορο του A συμβολίζουμε με $\mathrm{Bd}(A)$.

Πρόταση 1.3.13. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus A^0$.*

Απόδειξη: Από την πρόταση 1.3.8 έχουμε ότι $X \setminus A^0 = \overline{X \setminus A}$. Συνεπώς,

$$\overline{A} \setminus A^0 = \overline{A} \cap (X \setminus A^0) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \mathrm{Bd}(A).$$ □

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του ορισμού του συνόρου είναι το ότι το σύνολο $\mathrm{Bd}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Παραδείγματα 1.3.5.

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, αν $a < b$, τότε
$$\mathrm{Bd}([a,b]) = \mathrm{Bd}((a,b)) = \mathrm{Bd}((a,b]) = \mathrm{Bd}(a,b)) = \{a,b\}.$$

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$ έχουμε
$$\mathrm{Bd}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^0 = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}.$$
Ομοίως, $\mathrm{Bd}(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$.

3. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι
$$\mathrm{Bd}(\mathbb{D}^n) = \overline{\mathbb{D}^n} \setminus (\mathbb{D}^n)^0 = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}.$$
Ομοίως,
$$\mathrm{Bd}(\mathbb{B}^n) = \overline{\mathbb{B}^n} \setminus (\mathbb{B}^n)^0 =^{7} \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}.$$

4. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία και A ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X. Τότε $\overline{A} = A$ και τα μοναδικά κλειστά υποσύνολα του X είναι το κενό, το ίδιο το X και τα πεπερασμένα υποσύνολα του X. Συνεπώς, επειδή το $X \setminus A$ είναι απειροσύνολο, το μοναδικό κλειστό υποσύνολο του X που το περιέχει είναι το X, άρα $\overline{X \setminus A} = X$. Επομένως $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = A$.

1.4 Ασθενής τοπολογία

Πρόταση 1.4.1. *Έστω $X_i, i \in I$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $(i,j) \in I \times I$ το $X_i \cap X_j$ είναι κλειστό υποσύνολο τόσο του X_i όσο και του X_j και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C}$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση: Το $F \in \mathcal{P}(X)$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{C}$, αν και μόνον, αν το $F \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$. Τότε*

α΄) Το $\mathcal{C}$ ορίζει τα κλειστά υποσύνολα μιας τοπολογίας στο σύνολο X.

β΄) Ως προς την πιο πάνω τοπολογία τα X_i είναι υπόχωροι του X για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη:

[7] Εδώ χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της άσκησης 1.8.11., όπου αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $\overline{\mathbb{B}^n} = \mathbb{D}^n$

α΄) i. $\varnothing \in \mathcal{C}$ προφανώς.

ii. $X \in \mathcal{C}$ προφανώς.

iii. Έστω $i \in I$ και $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{C}$, τότε το $F_k \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Άρα το $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \big(F_k \cap X_i\big) = \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_k\big) \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i, άρα $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{C}$.

iv. Έστω $i \in I$ και $F_j \in \mathcal{C}$ για κάθε $j \in J$, τότε το $F_j \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $j \in J$. Άρα το $\bigcap\limits_{j\in J} \big(F_j \cap X_i\big) = \big(\bigcap\limits_{j\in J} F_j\big) \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i, άρα $\bigcap\limits_{j\in J} F_j \in \mathcal{C}$. Επομένως το $\mathcal{C}$ ορίζει τα κλειστά σύνολα μιας τοπολογίας στο X.

□

β΄) Για να δείξουμε ότι ο X_i είναι υπόχωρος του X, αρκεί να δείξουμε ότι για το αυθαίρετα επιλεγμένο κλειστό υποσύνολο A του X_i, υπάρχει κλειστό υποσύνολο B του X, ώστε $A = B \cap X_i$. Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο κλειστό υποσύνολο B είναι το ίδιο το A. Αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. Έχουμε ότι για το αυθαίρετα επιλεγμένο $j \in I$ ισχύει $A \cap X_j = A \cap X_i \cap X_j$. Επιπλέον το A είναι κλειστό υποσύνολο του X_i, επομένως το $A \cap X_i \cap X_j$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X_i \cap X_j$. Το $X_i \cap X_j$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_j, άρα το $A \cap X_j = A \cap X_i \cap X_j$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_j. Επομένως το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, δηλαδή το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Ορισμός 1.4.1. Η τοπολογία που ορίζεται στον $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ με τον τρόπο της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται **ασθενής τοπολογία** στον X που εισάγεται από την οικογένεια $X_i, i \in I$.

Παρατηρήσεις:

1. Είναι προφανές το ότι αν τα σύνολα X_i είναι ξένα μεταξύ τους δεν είναι απαραίτητο να ελέγχουμε αν το $X_i \cap X_j$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i και του X_j. Στην περίπτωση αυτή το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X = \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$, αν και μόνον, αν $F \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$.

2. Μια ειδική περίπτωση της ασθενούς τοπολογίας που θα συναντήσουμε στα επόμενα είναι εκείνη, όπου έχουμε μια ακολουθία τοπολογικών χώρων $X_n, \quad n \in \mathbb{N}$, ώστε το X_m να είναι κλειστό υποσύνολο του X_n, αν $m \leq n$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, ο οποίος θα έχει την ασθενή τοπολογία που εισάγεται από την ακολουθία X_n.

1.5 Βάσεις και υποβάσεις μιας τοπολογίας

Το αντικείμενο της παρούσης παραγράφου είναι η εύρεση γνήσιων υποσυνόλων της τοπολογίας $\mathcal{T}$ ενός χώρου, τα οποία περιγράφουν την τοπολογία εξίσου καλά με την $\mathcal{T}$ και προφανώς οικονομικότερα.

Ορισμός 1.5.1. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Το $\mathcal{B}$ ονομάζεται **βάση του τοπολογικού χώρου** $(X, \mathcal{T})$, αν .και μόνον, αν για κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο U του X υπάρχει μια οικογένεια B_i, $i \in I$ στοιχείων του $\mathcal{B}$, ώστε $U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$. Τα στοιχεία μιας βάσης του X ονομάζονται **βασικά ανοικτά σύνολα** του X.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα σύνολα που περιγράφονται στα παραδείγματα που ακολουθούν είναι βάσεις για τις αντίστοιχες τοπολογίες.

Παραδείγματα 1.5.1.

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{S(x, \varepsilon) \,/\, x \in X \wedge \varepsilon > 0\}$ είναι μια βάση της μετρικής τοπολογίας στον X. Και το σύνολο $\mathcal{B}_1 = \{S(x, q) \,/\, x \in X \wedge q \in \mathbb{Q}^+\}$ είναι επίσης μια βάση της ίδιας τοπολογίας.
2. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{(a, b) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ είναι μια βάση της Ευκλείδειας τοπολογίας στο $\mathbb{R}$.
3. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{\{x\} \,/\, x \in X\}$ είναι μια βάση της διακριτής τοπολογίας στο μη κενό σύνολο X. Μάλιστα στην περίπτωση αυτή είναι η μοναδική βάση της διακριτής τοπολογίας, αφού τα μονοσύνολα είναι ανοικτά υποσύνολα του χώρου.

Άμεση συνέπεια του ορισμού της βάσης είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.5.1. *Αν οι τοπολογίες $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ στον χώρο X έχουν κοινή βάση, τότε ταυτίζονται.*

Πρόταση 1.5.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α') Η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της $\mathcal{T}$.

β') Για κάθε $G \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in G$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq G$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Από τον ορισμό της βάσης έχουμε ότι, υπάρχει $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}$, ώστε $G = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_G} B$. Αν $x \in G$, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}_G$, ώστε $x \in B$, άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq G$.
β') $\Rightarrow$ α'): Έστω $G \in \mathcal{T}$. Ονομάζουμε B_x το στοιχείο της βάσης, για το οποίο ισχύει $x \in B_x \subseteq G$. Τότε $G \subseteq \bigcup\limits_{x \in G} B_x \subseteq G$, άρα $G = \bigcup\limits_{x \in G} B_x$, επομένως η $\mathcal{B}$ είναι, σύμφωνα με τον ορισμό βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$. □

Πόρισμα. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B}$ μια βάση της $\mathcal{T}$ και $G \subseteq X$. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α') Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

β΄) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq G$.

Παρατήρηση: Σε αρκετές περιπτώσεις η βάση δεν είναι απλώς ένας οικονομικότερος τρόπος περιγραφής μιας τοπολογίας, αλλά είναι και ο μοναδικός τρόπος περιγραφής της. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η καρτεσιανή τοπολογία που θα δούμε στα αμέσως επόμενα.

Η επόμενη πρόταση απαντά στο ερώτημα πότε ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του X είναι βάση κάποιας τοπολογίας του X.

Πρόταση 1.5.3. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Το $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας και μόνον τοπολογίας στο X, αν και μόνον, αν*

α΄) $X = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{B}} C$ και

β΄) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, με $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, τότε για κάθε $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, με $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι προφανές.

Για το ικανό, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{T} = \big\{\varnothing\big\} \cup \big\{ \bigcup\limits_{N \in R} N / R \subseteq \mathcal{B} \big\}$ είναι μια τοπολογία στο X, της οποίας η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση. Πράγματι έχουμε

α΄) $\varnothing \in \mathcal{T}$, εξ ορισμού του $\mathcal{T}$.

β΄) $X \in \mathcal{T}$, γιατί $X = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{B}} C$.

γ΄) Έστω $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $U_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$, τότε υπάρχει οικογένεια $R_i, i \in I$ υποσυνόλων του $\mathcal{B}$ τέτοια, ώστε $U_i = \bigcup\limits_{C \in R_i} C$. Αν $R = \bigcup\limits_{i \in I} R_i$, τότε προφανώς $R \subseteq \mathcal{B}$ και $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcup\limits_{C \in R} C$, συνεπώς $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

δ΄) Αν $V = \varnothing$ ή $U = \varnothing$, τότε $V \cap U = \varnothing \in \mathcal{T}$. Έστω $V, U \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$ και $x \in U \cap V$, άρα υπάρχουν $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{B}$, ώστε $x \in B_1 \subseteq U \wedge x \in B_2 \subseteq V$, άρα $x \in B_1 \cap B_2$. Από τη δεύτερη απαίτηση για τη βάση συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Από τα πιο πάνω B επιλέγουμε για κάθε x ένα, το οποίο ονομάζουμε B_x, άρα $U \cap V = \bigcup\limits_{x \in U \cap V} B_x$, άρα $U \cap V \in \mathcal{T}$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι, αν $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T}$. Το ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του συνόλου $\mathcal{T}$.
Η μοναδικότητα της τοπολογίας $\mathcal{T}$ είναι άμεση γιατί, αν $\mathcal{T}'$ είναι μία άλλη τοπολογία με βάση την $\mathcal{B}$, τότε από την πρόταση 1.5.1 προκύπτει ότι $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

Παρατήρηση: Στην πράξη πολλές φορές, αντί της δεύτερης απαίτησης της προηγούμενης πρότασης θα αποδεικνύουμε μία ισχυρότερη απαίτηση: Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Παραδείγματα 1.5.2. Στα επόμενα παραδείγματα αναφέρουμε τοπολογίες, οι οποίες ορίζονται από τις βάσεις τους. Οι αποδείξεις, για το ότι ικανοποιούνται τα κριτήρια της πρότασης 1.5.3, για να είναι μία συλλογή υποσυνόλων του X βάση για μια τοπολογία, σε όσες περιπτώσεις παραλείπονται, αφήνονται ως ασκήσεις στον αναγνώστη.

1. Στο $\mathbb{R}$ το σύνολο $\mathcal{B} = \{[a, b)/a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ είναι βάση για μια τοπολογία, γιατί

   α΄) $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} [-n, n)$, συνεπώς ικανοποιείται η πρώτη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 και

   β΄) Αν $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) \neq \varnothing$, τότε $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [c, d)$, όπου $c = a_1 \vee c = a_2$ και $d = b_1 \vee d = b_2$. Άρα ικανοποιείται και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 1.5.3. Η τοπολογία που εισάγει η βάση αυτή στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται **τοπολογία των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων** και το $\mathbb{R}$, όταν εφοδιάζεται με αυτήν, συμβολίζεται με $\mathbb{R}_r$.

   Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ την **τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων**. Το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_l$. Αν θελήσουμε να συγκρίνουμε την Ευκλείδεια τοπολογία, με την τοπολογία των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι

   $$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \tfrac{1}{n}, b\right),$$

   άρα τα ανοικτά σύνολα της Ευκλείδειας τοπολογίας παράγονται από τα βασικά σύνολα της τοπολογίας των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων. Επομένως η πρώτη τοπολογία περιέχεται στη δεύτερη. Για να δείξουμε ότι η πρώτη είναι πτωχότερη της δεύτερης, αρκεί να βρούμε ένα ανοικτό σύνολο της δεύτερης που δεν είναι ανοικτό στην πρώτη και αυτό είναι το $[a, b)$, με $a < b$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η Ευκλείδεια τοπολογία είναι πτωχότερη και της τοπολογίας των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων.

2. Έστω $K = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}$, το οποίο αποτελείται από τα διαστήματα της μορφής (a, b) και τα σύνολα της μορφής $(a, b) \setminus K$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Το $\mathcal{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$, γιατί

   α΄) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$, συνεπώς ικανοποιείται η πρώτη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 και

   β΄) Η τομή δύο οποιονδήποτε στοιχείων της βάσης, αν δεν είναι ίση με το κενό σύνολο θα είναι ή ένα σύνολο της μορφής (a, b) ή ένα σύνολο της μορφής $(a, b) \setminus K$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Άρα ικανοποιείται και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 1.5.3. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται K-τοπολογία στο $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$, όταν εφοδιάζεται με αυτή συμβολίζεται με $\mathbb{R}_K$ και είναι, προφανώς πλουσιότερη της Ευκλείδειας τοπολογίας του $\mathbb{R}$.

3. Έστω ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο $(X, <)$ και το σύνολο $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, όπου το B_1 αποτελείται από τα υποσύνολα του X της μορφής $\{x \in X / x < a\}$, με $a \in X$. Το B_2 αποτελείται από τα υποσύνολα του X της μορφής $\{x \in X / a < x\}$, με $a \in X$ και το B_3 αποτελείται από τα υποσύνολα του X της μορφής $\{x \in X / a < x < b\}$, με $a, b \in X$ και $a < b$. Τα στοιχεία του B_1 μπορούν να παραληφθούν στην περίπτωση που το X δεν έχει ελάχιστο και τα στοιχεία του B_2 μπορούν να παραληφθούν στην

περίπτωση που το X δεν έχει μέγιστο. Το B αποτελεί βάση για μία τοπολογία στο X. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **τοπολογία της διάταξης** στο X.

4. Έστω $\mathbb{A}$ το σύνολο των αρρήτων. Το σύνολο $\{(a,b)\,/\,a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b\} \cup \big\{\{x\}\,/\,x \in \mathbb{A}\big\}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται **τοπολογία της διακριτής άρρητης επέκτασης**.

5. Το σύνολο $\{(a,b)\,/\,a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b\} \cup \big\{\{x\}\,/\,x \in \mathbb{Q}\big\}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται **τοπολογία της διακριτής ρητής επέκτασης**. Οι τοπολογίες της ρητής και της άρρητης επέκτασης είναι πλουσιότερες της Ευκλείδειας τοπολογίας στο $\mathbb{R}$.

6. Στο σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, θεωρούμε τα σύνολα

$$N_{a,b} = \{a + nb\,/\,n \in \mathbb{N}_0\},$$

με $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ και $a < b$. Έχουμε ότι $\mathbb{N}_0 = N_{0,1}$ και

$$\begin{aligned} p \in N_{a,b} \cap N_{a',b'} \quad &\Rightarrow \quad p = a + mb = a' + nb' \;\wedge\; m,n \in N_0 \\ &\Rightarrow \quad p \in N_{p,kbb'} \subseteq N_{a,b} \cap N_{a',b'}\,, \end{aligned}$$

άρα το σύνολο των $N_{a,b}$ είναι βάση μιας τοπολογίας στο $\mathbb{N}_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} p \in N^c_{a,b} \quad &\Leftrightarrow \quad p \notin N_{a,b} \\ &\Leftrightarrow \quad p = rb + d,\; 0 \leq d < b,\; d \neq a \wedge r \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \quad N^c_{a,b} = \bigcup_{d \in A} N_{d,b}, \end{aligned}$$

όπου $A = \{0, 1, \ldots, b-1\} \setminus \{a\}$, άρα το $N^c_{a,b}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$. Επιπλέον το $N^c_{a,b}$ είναι και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$, ως συμπλήρωμα ανοικτού. Συνεπώς η παραπάνω βάση έχει ως στοιχεία σύνολα, τα οποία είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.
Η βάση που περιγράψαμε έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί με την βοήθεια της τοπολογίας που εισάγεται κατ' αυτόν τον τρόπο στους μη αρνητικούς ακέραιους, μπορούμε να δώσουμε μια όμορφη και κομψή απόδειξη της απειρίας των πρώτων, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι όλα τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου, εκτός του κενού είναι απειροσύνολα.

Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο και έχει ως εξής: έστω ότι το σύνολο P των πρώτων είναι πεπερασμένο. Το σύνολο $\{1\}^c = \bigcup_{p \in P} N_{0,p}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$, ως πεπερασμένη ένωση κλειστών υποσυνόλων του. Επομένως το σύνολο $\{1\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$, άρα απειροσύνολο, άτοπο.

Πρόταση 1.5.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, Y ένας υπόχωρος του X και $\mathcal{B}$ μια βάση του $(X, \mathcal{T})$. Τότε το σύνολο $\mathcal{B}' = \{U \cap Y\,/\,U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια βάση του $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Απόδειξη: Προφανώς $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}_Y$. Έστω $V \in \mathcal{T}_Y \setminus \{\varnothing\}$. Τότε υπάρχει $U \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, ώστε $V = U \cap Y$. Αλλά $U = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{U}} B$, όπου $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, επομένως $V = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{U}} (B \cap Y) = \bigcup\limits_{B' \in \mathcal{U}'} B'$, όπου $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{B}'$, άρα το $\mathcal{B}'$ είναι μια βάση του $(Y, \mathcal{T}_Y)$. □

Ορισμός 1.5.2. Η τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, η οποία έχει ως βάση το σύνολο $\mathcal{B}$ της πρότασης που ακολουθεί ονομάζεται **καρτεσιανή τοπολογία** στο X.

Πρόταση 1.5.5. *Αν $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ είναι τοπολογικοί χώροι, τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_n \,/\, U_1 \in \mathcal{T}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n\}$ είναι βάση για μία τοπολογία στο σύνολο*

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Απόδειξη: Η πρώτη απαίτηση της πρότασης 1.5.5 αληθεύει, γιατί $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{B}$, άρα $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{B}} C = X$.

Για τη δεύτερη απαίτηση έχουμε $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{B}$ και $V = \prod\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{B}$, άρα $U \cap V = \prod\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap V_i) \in \mathcal{B}$. Επομένως αληθεύει και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 1.5.5. □

Παρατήρηση: Αν $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ μετρικοί χώροι, τότε η καρτεσιανή τοπολογία του συνόλου $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ ταυτίζεται με την τοπολογία, η οποία εισάγεται από τη μετρική $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού βλέπε άσκηση 6 του παρόντος κεφαλαίου.

Εύκολα αποδεικνύεται η πρόταση

Πρόταση 1.5.6. *Αν Y, Z τοπολογικοί χώροι με βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$, αντιστοίχως, τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \{U \times V / U \in \mathcal{B}_1 \wedge V \in \mathcal{B}_2\}$ είναι μια βάση του $X = Y \times Z$.*

Παρατήρηση: Μια βάση $\mathcal{B}$ της καρτεσιανής τοπολογίας του $X \times Y$ δεν περιέχει απαραίτητα όλα τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας. Για παράδειγμα το σύνολο $\mathcal{B} = \{(x, y)/a < x < b \wedge c < y < d\}$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο όλων των "ανοικτών ορθογωνίων" είναι μια βάση της καρτεσιανής τοπολογίας στο $\mathbb{R}^2$, η οποία, όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως ταυτίζεται με την Ευκλείδεια τοπολογία στον $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (2 < x < 3 \wedge 3 < y < 5) \vee (3 < x < 5 \wedge 3 < y < 4)\}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, χωρίς να είναι ένα "ανοικτό ορθογώνιο".

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν κάποια υποσύνολα των βάσεων, τα οποία τις παράγουν.

Ορισμός 1.5.3. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο $\mathcal{C}$ του $\mathcal{P}(X)$ ονομάζεται **υποβάση του** X, αν και μόνον, αν το σύνολο όλων των πεπερασμένων τομών των στοιχείων του $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του X.

Πρόταση 1.5.7. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ώστε $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A = X$. Τότε το $\mathcal{C}$ είναι υποβάση για κάποια τοπολογία στο σύνολο X.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}$, το οποίο έχει ως στοιχεία όλες τις πεπερασμένες τομές στοιχείων του $\mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις δύο απαιτήσεις τις πρότασης 1.5.3. Η αλήθεια τις πρώτης απαίτησης είναι προφανής εκ του ορισμού του $\mathcal{C}$.
Για τη δεύτερη απαίτηση έχουμε, αν $U, V \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχουν $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m \in \mathcal{C}$, ώστε $U = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ και $V = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$. Θέτουμε $C_1 = C'_1, \dots, C_n = C'_n, D_1 = C'_{n+1}, \dots, D_m = C'_{n+m}$ και έχουμε $U \cap V = \bigcup_{i=1}^{n+m} C'_i$, με $C'_i \in \mathcal{C}$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n+m\}$, άρα $U \cap V \in \mathcal{B}$, επομένως και η δεύτερη απαίτηση αληθεύει. Άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στον X και το $\mathcal{C}$ είναι υποβάση. □

Ορισμός 1.5.4. Η τοπολογία της ανωτέρω πρότασης ονομάζεται **τοπολογία που παράγεται από την υποβάση** $\mathcal{C}$.

Παραδείγματα 1.5.3. Στα παραδείγματα που ακολουθούν πολύ εύκολα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός ότι τα υποδεικνυόμενα σύνολα είναι υποβάσεις των αντίστοιχων τοπολογιών.

1. Το σύνολο $\mathcal{C} = \{(a,\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \,/\, b \in \mathbb{R}\}$ είναι υποβάση της Ευκλείδειας τοπολογίας στο $\mathbb{R}$.

2. Το σύνολο $\mathcal{C} = \{(a,\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b] \,/\, b \in \mathbb{R}\}$ είναι υποβάση της τοπολογίας των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$.

3. Το σύνολο $\mathcal{C} = \{[a,\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \,/\, b \in \mathbb{R}\}$ είναι υποβάση της τοπολογίας των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$.

4. Το σύνολο $\mathcal{C} = \{x \in X \,/\, x < a \wedge a \in X\} \cup \{x \in X \,/\, a < x \wedge a \in X\}$ είναι μια υποβάση για την τοπολογία της διάταξης στο ολικώς διατεταγμένο σύνολο $(X, <)$.

Άμεση συνέπεια των ορισμών της βάσης και της υποβάσης των τοπολογικών χώρων είναι η επόμενη πρόταση

Πρόταση 1.5.8. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ δύο τοπολογίες στο X. Αν η $\mathcal{T}'$ περιέχει μια βάση ή μια υποβάση της $\mathcal{T}$, τότε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.*

1.6 Αξιώματα αριθμησιμότητας

Ορισμός 1.6.1. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$, ώστε, αν $U \in \mathcal{B}_x$, τότε $x \in U$. Το $\mathcal{B}_x$ ονομάζεται **βάση περιοχών του** x, αν και μόνον, αν για κάθε περιοχή V του x, υπάρχει $U \in \mathcal{B}_x$, ώστε $U \subseteq V$.

Άμεση συνέπεια των ορισμών της βάσης και της βάσης περιοχών είναι η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.6.1. *Αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του τοπολογικού χώρου X και $x \in X$, τότε το σύνολο $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} \,/\, x \in U\}$ είναι μια βάση περιοχών του x.*

Ορισμός 1.6.2. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **1ος αριθμήσιμος** , αν και μόνον, αν κάθε $x \in X$ έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$.

Παρατήρηση: Αν η $\mathcal{B}_x = \{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ είναι μια βάση περιοχών του x σε έναν 1ο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο, τότε και η $\mathcal{B}'_x = \{V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\}$, όπου $V_1 = U_1, V_2 = U_1 \cap U_2, \dots, V_n = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n, \dots$ είναι επίσης μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x, με την ιδιότητα $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_n \supseteq \dots$. Η $\mathcal{B}'_x$, η οποία θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε ορισμένες αποδείξεις ονομάζεται **κιβωτισμένη βάση περιοχών** του x.

Ορισμός 1.6.3. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **2ος αριθμήσιμος** , αν και μόνον, αν έχει αριθμήσιμη βάση.

Άμεση συνέπεια της πρότασης 1.6.1 είναι η πρόταση.

Πρόταση 1.6.2. *Αν ο X είναι 2ος αριθμήσιμος, τότε είναι 1ος αριθμήσιμος.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε σε ορισμένα από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παραδείγματα 1.6.1.

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και U μια περιοχή του x, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U$. Επιπλέον υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε $S(x, \frac{1}{n}) \subseteq S(x, \varepsilon)$. Άρα το σύνολο $\mathcal{B}_x = \left\{S(x, \frac{1}{n}) \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x. Επομένως,

   Κάθε μετρικός χώρος είναι 1ος αριθμήσιμος.

   Αλλά αν το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο και d είναι η διακριτή μετρική, η οποία εισάγει στο X τη διακριτή τοπολογία, τότε μια οποιαδήποτε βάση $\mathcal{B}$ του X πρέπει απαραιτήτως να έχει ως στοιχεία της τα μονοσύνολα του X, τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα, άρα η $\mathcal{B}$ είναι υπεραριθμήσιμη. Συνεπώς ο X δεν είναι 2ος αριθμήσιμος. Έχουμε, λοιπόν ένα παράδειγμα ενός χώρου, ο οποίος **είναι 1ος αλλά όχι 2ος αριθμήσιμος**.

2. Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}$ με την συναριθμήσιμη τοπολογία είναι 1ος αριθμήσιμος. Τότε, αν $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $U_n, n \in \mathbb{N}$ περιοχών του x, η οποία ενδεχομένως να είναι τελικά σταθερή, ώστε το $\mathcal{B}_x = \{U_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ να είναι μια βάση περιοχών του x. Τα U_n είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, συνεπώς τα U_n^c είναι αριθμήσιμα, άρα το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c = \big(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\big)^c$ είναι αριθμήσιμο, επομένως το $U = A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $x \in U$, άρα το U είναι μια περιοχή του x. Επιπλέον το U είναι υπεραριθμήσιμο, γιατί το A είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, υπάρχει $y \in U$, με $y \neq x$, άρα $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, άρα $y \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $V = U \setminus \{y\}$, το οποίο είναι μια περιοχή του x, γιατί $x \in V$ και το $V^c = A \cup \{y\}$ είναι αριθμήσιμο, άρα το V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως $U_n \nsubseteq V$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γιατί $y \notin V$, το οποίο είναι άτοπο, επειδή το $\mathcal{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x. Επομένως ο χώρος αυτός δεν είναι 1ος αριθμήσιμος.

3. Αν ονομάσουμε $\mathcal{E}$ την Ευκλείδεια τοπολογία στο $\mathbb{R}$, τότε, προφανώς το σύνολο $\mathcal{B} = \{(p,q)\,/\,p,q \in \mathbb{Q} \wedge p < q\}$ είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Από την 2η περίπτωση των παραδειγμάτων 1.5.1, γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{(a,b)\,/\,a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ είναι μια βάση της Ευκλείδειας τοπολογίας στο $\mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια βάση της τοπολογίας αυτής, αρκεί να δείξουμε ότι το τυχαίο ανοικτό διάστημα (a,b) γράφεται ως ένωση στοιχείων του $\mathcal{B}$. Με το επιχείρημα της πυκνότητας των ρητών αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακολουθίες p_n, q_n ρητών, με $p_n \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $q_n \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, $p_n \to a$ και $q_n \to b$. Άρα $(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(p_n,q_n)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Συνεπώς ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι 2ος αριθμήσιμος, γιατί το $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμο. Ομοίως αποδεικνύεται ότι οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^n$ είναι 2οι αριθμήσιμοι.

4. Ο $\mathbb{R}_l$, δηλαδή ο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων δεν είναι 2ος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_l$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq (x-1, x]$. Αν από τα στοιχεία της $\mathcal{B}$, για τα οποία ισχύει $x \in B \subseteq (x-1,x]$ επιλέξουμε ένα, το οποίο ονομάσουμε B_x, τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$, με $f(x) = B_x$ είναι 1-1, γιατί

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow B_x = B_y \\ &\Rightarrow y \in B_x \subseteq (x-1,x] \wedge x \in B_y \subseteq (y-1,y] \\ &\Rightarrow y \leq x \wedge x \leq y \\ &\Rightarrow x = y\,, \end{aligned}$$

επομένως $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}|$, άρα η $\mathcal{B}$ είναι υπεραριθμήσιμη, συνεπώς ο R_l δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Ομοίως αποδεικνύεται και το ότι ο $\mathbb{R}_r$ δεν είναι 2ος αριθμήσιμος χώρος.

Ορισμός 1.6.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $x_n, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία σημείων του X. Θα λέμε ότι η x_n **συγκλίνει στο σημείο** $x \in X$ **ή έχει όριο το σημείο** x και θα το συμβολίζουμε, με $x_n \to x$, αν και μόνον, αν για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει φυσικός n_0, ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$. Στην περίπτωση που $x_n \to x \in X$ λέμε ότι η ακολουθία x_n είναι **συγκλίνουσα** .

Παρατήρηση: Ειδικά στους μετρικούς χώρους ο πιο πάνω ορισμός γίνεται: Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $x_n, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία σημείων του X. Θα λέμε ότι η x_n **συγκλίνει στο σημείο** $x \in X$ ή **έχει όριο το σημείο** x και θα το συμβολίζουμε, με $x_n \to x$, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0, ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: $x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n,x) \to 0$.

Πρόταση 1.6.3. *Αν X είναι 1ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, $\varnothing \neq A \subseteq X$ και $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία x_n με όρους από το A, ώστε $x_n \to x$.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}_x = \{V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots\}$ μια κιβωτισμένη βάση περιοχών του x. Επειδή είναι $V_n \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε ένα x_n από κάθε ένα εκ των $V_n \cap A$, κατασκευάζοντας έτσι μία ακολουθία x_n με όρους από το A. Έστω U μια αυθαίρετα επιλεγμένη περιοχή του x. Από τον ορισμό της βάσης περιοχών, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $V_{n_0} \subseteq U$. Επειδή η επιλεγείσα βάση περιοχών είναι κιβωτισμένη θα έχουμε $V_n \subseteq V_{n_0} \subseteq U$ για κάθε $n \geq n_0$. Έχουμε $x_n \in V_n$, άρα $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$, επομένως $x_n \to x$. □

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του ορισμού της σύγκλισης μιας ακολουθίας x_n σε ένα σημείο x είναι το ότι ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης για έναν οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο, χωρίς αυτός να είναι απαραίτητα 1ος αριθμήσιμος. Δηλαδή ισχύει το: Αν η ακολουθία x_n με όρους από το σύνολο $A \subseteq X$ συγκλίνει στο σημείο $x \in X$, τότε $x \in \overline{A}$.

Πρόταση 1.6.4. *Αν (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) $x \in A'$,

β΄) Υπάρχει ακολουθία x_n διακεκριμένων σημείων του A, ώστε $x_n \to x$.

Απόδειξη: β') $\Rightarrow$ α'): Έστω U περιοχή του x, τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$, Επειδή της ακολουθίας x_n είναι διακεκριμένοι, δεν είναι δυνατόν να ισχύει $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$, επομένως $U \cap \big(A \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing$, άρα $x \in A'$.

α') $\Rightarrow$ β'): Έστω $x \in A'$. Θεωρούμε τα σύνολα $S_n = A \cap S(x, \frac{1}{n})$, για τα οποία ισχύει:

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq \ldots.$$

Επειδή κάθε ένα από τα S_n είναι απειροσύνολο (πρόταση 1.3.12), μπορούμε να ακολουθήσουμε για την κατασκευή της ακολουθίας x_n την εξής διαδικασία: Από το S_1 επιλέγουμε ένα στοιχείο x_1. Από το S_2 επιλέγουμε ένα στοιχείο x_2, ώστε $x_2 \neq x_1$. Έστω πως έχουμε, κατ' αυτόν τον τρόπο επιλέξει στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο. Το S_{n+1} είναι απειροσύνολο, άρα μπορούμε να επιλέξουμε $x_{n+1} \in S_{n+1} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Με την ολοκλήρωση της επαγωγικής διαδικασίας έχουμε την ακολουθία x_n διακεκριμένων όρων, με την ιδιότητα: $n > m \Rightarrow x_n \in S_m$. Έστω U μια περιοχή του x. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U$. Επιπλέον υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{1}{m} < \varepsilon$, δηλαδή $S_m \subseteq S(x, \varepsilon)$, άρα $x_n \in S_m \subseteq S(x, \varepsilon) \subseteq U$ για κάθε $n \geq m$, επομένως $x_n \to x$. □

Η πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι οι ιδιότητες της 1ης και της 2ης αριθμησιμότητας σε έναν τοπολογικό χώρο "κληρονομούνται" σε όλους τους υποχώρους του χώρου αυτού.

Πρόταση 1.6.5.

α΄) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι 1ος αριθμήσιμος και Y ένας υπόχωρος του X, τότε ο Y είναι 1ος αριθμήσιμος.

β΄) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι 2ος αριθμήσιμος και Y ένας υπόχωρος του X, τότε ο Y είναι 2ος αριθμήσιμος.

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

1.7 Διαχωρίσιμοι χώροι

Ορισμός 1.7.1. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **διαχωρίσιμος**, αν και μόνον, αν έχει πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο.

Παραδείγματα 1.7.1.

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος, γιατί έχει υποσύνολο το $\mathbb{Q}$, το οποίο είναι πυκνό και αριθμήσιμο.

2. Ο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία τόσο των αριστερά ανοικτών όσο και των δεξιά ανοικτών διαστημάτων είναι διαχωρίσιμος, γιατί έχει υποσύνολο το $\mathbb{Q}$, το οποίο είναι πυκνό και αριθμήσιμο.

3. Ο χώρος Hilbert (ℓ_2) είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} D_1 &= \big\{(x_1,0,0,0,\dots)\,/\,x_1\in\mathbb{Q}\big\},\\ D_2 &= \big\{(x_1,x_2,0,0,0,\dots)\,/\,x_1,x_2\in\mathbb{Q}\big\},\\ &\vdots \qquad\qquad \vdots\\ D_n &= \big\{(x_1,x_2,\dots,x_n,0,0,0,\dots)\,/\,x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{Q}\big\},\\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Έχουμε $D_n\subseteq\ell_2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Ακολούθως θεωρούμε το $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$. Προφανώς, επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι $D_n\subseteq\ell_2$ έχουμε $D\subseteq\ell_2$. Επιπλέον

$$|D|=\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}|D_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\aleph_0=\aleph_0\aleph_0=\aleph_0.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_2. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του ℓ_2 και $x\in U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$, ώστε $S(x,\varepsilon)\subseteq U$. Αν $x=(x_n)\in\ell_2$ υπάρχει $N\in\mathbb{N}$, ώστε $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}x_n^2<\frac{\varepsilon^2}{2}$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\{1,2,\dots,N\}$, υπάρχει $q_n\in\mathbb{Q}$, ώστε $|x_n-q_n|<\frac{\varepsilon^2}{2N}$.
Παίρνουμε $z=(z_n)\in D$ με $z_n=q_n\quad\forall n=1,2,\dots,N$ και $z_n=0\quad\forall n>N$ και έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-z_n|^2}\\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n-z_n|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n-z_n|^2}\\ &< \sqrt{2\,\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon\,, \end{aligned}$$

άρα $z\in S(y,\varepsilon)$, άρα για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του ℓ_2 είναι $U\cap D\neq\varnothing$, συνεπώς το D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_2 (πρόταση 1.3.7).

4. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία και $A \subseteq X$, με $|A| = \aleph_0$. Αν U ανοικτό στον X, τότε

$$A \cap U = \varnothing \Rightarrow A \subseteq X \setminus U \ \wedge \ |X \setminus U| < \aleph_0$$
$$\Rightarrow |A| < \aleph_0 \,,$$

άτοπο. Συνεπώς για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X έχουμε ότι $A \cap U \neq \varnothing$, άρα το A είναι πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του X, επομένως ο X είναι διαχωρίσιμος.

5. Έστω τοπολογικός χώρος X με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κλειστό γνήσιο υποσύνολο A του X, με $x \in A$. Τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X, με $x \notin X \setminus A$, άτοπο. Συνεπώς το μοναδικό κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το x είναι το ίδιο το X, άρα $\overline{\{x\}} = X$.
Δηλαδή το $\{x\}$ είναι πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του X, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος.

6. Ο χώρος $C([a, b])$, με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι διαχωρίσιμος, γιατί το σύνολο $P([a, b])$ των πολυωνύμων είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του.

7. Έστω ℓ_∞ ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών με την αντίστοιχη μετρική d (βλέπε παραδείγματα 1.1.1) και D το υποσύνολο του ℓ_∞, το οποίο αποτελείται από τις ακολουθίες που έχουν ως μοναδικά στοιχεία το 0 και το 1, επομένως $|D| = |\mathbb{R}|$.
Αν x, y είναι δύο διαφορετικά στοιχεία του D, τότε $d(x, y) = 1$. Άρα, αν $x, y \in D$ και $x \neq y$, τότε $S\big(x, \frac{1}{2}\big) \cap S\big(y, \frac{1}{2}\big) = \varnothing$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, αν $z \in S\big(x, \frac{1}{2}\big) \cap S\big(y, \frac{1}{2}\big)$, τότε $d(x, z) < \frac{1}{2}$ και $d(y, z) < \frac{1}{2}$, άρα $1 = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 1$, άτοπο.
Έστω A ένα πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞. Τότε η οικογένεια $S\big(x, \frac{1}{2}\big) \cap A, x \in D$ αποτελείται από μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα, συνεπώς έχει ένα σύνολο επιλογής B, το οποίο είναι υποσύνολο του A. Όμως $|B| = |D| = |\mathbb{R}|$, άρα $|A| \geq |B| \geq |\mathbb{R}|$, δηλαδή το A είναι υπεραριθμήσιμο, συνεπώς κάθε πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα ο ℓ_∞ δεν έχει πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο, άρα δεν είναι διαχωρίσιμος.

8. Ο χώρος $M_\mathbb{R}$ των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία της supremum μετρικής δεν είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, έστω ότι A, B είναι δύο διαφορετικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε $d(\chi_A, \chi_B) = 1$. Έχουμε $S\big(\chi_A, \frac{1}{2}\big) \cap S\big(\chi_B, \frac{1}{2}\big) = \varnothing$, γιατί

$$f \in S\big(\chi_A, \tfrac{1}{2}\big) \cap S\big(\chi_B, \tfrac{1}{2}\big) \Rightarrow$$
$$1 = d(\chi_A, \chi_B) < d(\chi_A, f) + d(\chi_B, f) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \,,$$

άτοπο.

Αν D ένα πυκνό υποσύνολο του $M_\mathbb{R}$, τότε $D \cap S(\chi_A, \frac{1}{2}) \neq \varnothing$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Επομένως η οικογένεια $D \cap S(\chi_A, \frac{1}{2})$, αποτελείται από μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα, άρα έχει σύνολο επιλογής, έστω C. Από την κατασκευή της παραπάνω οικογένειας έχουμε

$$|D| \geq |C| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c > \aleph_0,$$

άρα το D είναι υπεραριθμήσιμο. Δηλαδή κάθε πυκνό υποσύνολο του $M_{\mathbb{R}}$ είναι υπεραριθμήσιμο, συνεπώς ο χώρος $M_{\mathbb{R}}$ δεν έχει πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο, άρα δεν είναι διαχωρίσιμος.

9. Ένας υπεραριθμήσιμος τοπολογικός χώρος X, με τη διακριτή τοπολογία δεν είναι διαχωρίσιμος, γιατί το μόνο πυκνό υποσύνολο του είναι το ίδιο το X, το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο.

Πρόταση 1.7.1. *Κάθε 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσμος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}$ μια αριθμήσιμη βάση του χώρου. Τα στοιχεία της βάσης αυτής μπορούμε να γράψουμε ως μία ακολουθία U_n, $n \in \mathbb{N}$, η οποία μπορεί να είναι τελικά σταθερή. Θεωρούμε μία ακολουθία x_n, $n \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \in U_n$, $n \in \mathbb{N}$. Αν A είναι το σύνολο των όρων της x_n, τότε προφανώς το A είναι αριθμήσιμο. Αν U ένα ανοικτό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει μη κενό υποσύνολο M του $\mathbb{N}$, ώστε $U = \bigcup\limits_{k \in M} U_k$. Συνεπώς $A \cap U \neq \varnothing$, άρα το A είναι πυκνό υποσύνολο του X (πρόταση 1.3.7), επομένως ο X είναι διαχωρίσιμος, γιατί το A είναι πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολό του. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x, τότε, όπως είδαμε στην περίπτωση 5 του παραδείγματος 1.5.1 ο X είναι διαχωρίσιμος. Όμως μια οποιαδήποτε βάση $\mathcal{B}$ του X, πρέπει να περιέχει το σύνολο $\{\{y,x\}/y \in X \setminus \{x\}\}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το X, άρα υπεραριθμήσιμο, συνεπώς ο X δεν είναι 2ος αριθμήσιμος.

Αλλά στους μετρικούς χώρους οι έννοιες της 2ης αριθμησιμότητας και της διαχωρισιμότητας συμπίπτουν.

Πρόταση 1.7.2. *Αν ο μετρικός χώρος (X,d) είναι διαχωρίσιμος, τότε είναι 2ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: Έστω D ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Τότε για το σύνολο $\mathcal{B}' = \{S(x,q)\,/\,x \in D \wedge q \in \mathbb{Q}^+\}$ έχουμε

$$|\mathcal{B}'| = |D \times \mathbb{Q}^+| = |D||\mathbb{Q}^+| = \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0.$$

Το σύνολο $\mathcal{B} = \{S(x,q)\,/\,x \in X \wedge q \in \mathbb{Q}^+\}$ είναι μια βάση του X. Έστω U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in U$. Επειδή το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του X, υπάρχει θετικός ρητός q, ώστε $S(x,q) \subset U$. Από την πυκνότητα του D συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $z \in D$, με $d(x,z) < \frac{q}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} y \in S\big(z, \tfrac{q}{2}\big) \quad &\Rightarrow \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\,\frac{q}{2} = q \\ &\Rightarrow \quad y \in S(x,q). \end{aligned}$$

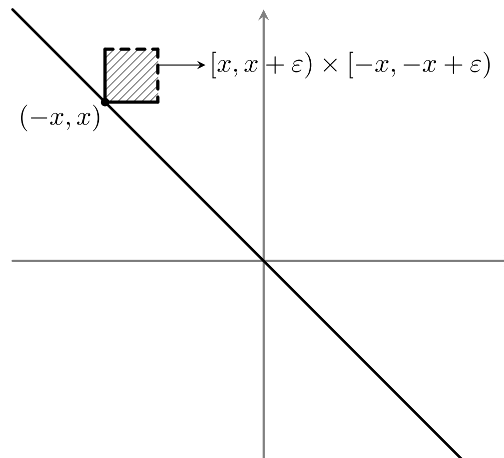
Άρα $S\big(z,\frac{q}{2}\big) \subseteq S(x,q)$, άρα $x \in S\big(z,\frac{q}{2}\big) \subseteq U$. Συνεπώς, υπάρχει $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}'$, ώστε $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{C}} V$, άρα το $\mathcal{B}'$ είναι μια βάση του X, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.7.3. *Αν X διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος και U ανοικτό υποσύνολο του X, τότε ο χώρος U με την επαγόμενη τοπολογία είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Έστω D ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το $D\cap U$ είναι ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του U. Πράγματι, $|D\cap U|\leq |D|\leq \aleph_0$, άρα το $D\cap U$ είναι αριθμήσιμο. Επιπλέον V ένα ανοικτό υποσύνολο του U, τότε το $U\cap V$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα $(V\cap U)\cap D\neq\varnothing$, άρα $V\cap(U\cap D)\neq\varnothing$, άρα το $D\cap U$ είναι πυκνό υποσύνολο του U, δηλαδή το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Η απαίτηση ο υπόχωρος U να είναι ανοικτό υποσύνολο του διαχωρίσιμου χώρου X, προκειμένου να είναι και ο U διαχωρίσιμος χώρος δεν μπορεί να παραληφθεί, γιατί, όπως θα δούμε στο αντιπαράδειγμα που ακολουθεί η ιδιότητα της διαχωρισιμότητας σε αντίθεση με τις ιδιότητες της 1ης και της 2ης αριθμησιμότητας δεν "κληρονομείται" απαραίτητα από τον χώρο στους υποχώρους του.

Αντιπαράδειγμα: Έστω $\mathbb{R}_r$ ο χώρος των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{S}=\mathbb{R}_r\times\mathbb{R}_r$, με την καρτεσιανή τοπολογία ονομάζεται **επίπεδο Sorgenfrey**.[8] Το σύνολο $\{[a,b)\times[c,d)/a<b,\ c<d\}$ είναι μια βάση του επιπέδου Sorgenfrey. Το επίπεδο Sorgenfrey είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος, γιατί το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του. Αν πάρουμε το σύνολο $\mathbf{A}=\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}$ (αντιδιαγώνιο σύνολο), με την επαγόμενη από τον $\mathbf{S}$ τοπολογία θα δούμε ότι $\{(x,-x)\}=\mathbf{A}\cap\big([x,x+\varepsilon)\times[-x,-x+\varepsilon)\big)$, άρα τα μονοσύνολα του χώρου $\mathbf{A}$ είναι ανοικτά, επομένως η τοπολογία, η οποία επάγεται στο $\mathbf{A}$ από το $\mathbf{S}$ είναι η διακριτή. Το $\mathbf{A}$ είναι υπεραριθμήσιμο, γιατί είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{R}$. Αν B είναι ένα οποιοδήποτε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbf{A}$, τότε, λόγω της διακριτής τοπολογίας έχουμε $\overline{B}=B\neq\mathbf{A}$, άρα ο χώρος $\mathbf{A}$ δεν είναι διαχωρίσιμος, γιατί το οποιοδήποτε αριθμήσιμο υποσύνολό του είναι μη πυκνό.



Σχήμα 1.3. Επίπεδο Sorgenfrey

Σχόλιο: Ένα από τα βασικά ερωτήματα που ανακύπτουν με τον ορισμό της τοπολογίας είναι το λεγόμενο πρόβλημα της μετρικοποιησιμότητας, με το οποίο θα ασχοληθούμε εκτενώς στο

[8] Robert Sorgenfrey (1915-1996): Αμερικανός μαθηματικός.

8ο κεφάλαιο και, το οποίο θέτει το ερώτημα: δοθείσης μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ σε έναν χώρο X, είναι δυνατόν να ορίσουμε μετρική d στον X, ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$; Στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική, λέμε και ότι η τοπολογία του χώρου "προέρχεται" από μετρική. Η απάντηση στο ερώτημα είναι ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει πάντοτε. Σε έναν χώρο που δεν είναι 1ος αριθμήσιμος η τοπολογία του δεν μπορεί να προέρχεται από μία μετρική, γιατί οι μετρικοί χώροι είναι 1οι αριθμήσιμοι. Ας δούμε και ένα ακόμη επιχείρημα, το οποίο στηρίζεται στις έως τώρα γνώσεις μας: Ορίσαμε την έννοια της διαχωρισιμότητας, η οποία είναι ασθενέστερη από την έννοια της 2ης αριθμησιμότητας (πρόταση 1.7.1 με την παρατήρησή της). Στους μετρικούς χώρους όμως οι δύο αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες (πρόταση 1.7.2), επομένως, αν ένας τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσμος, χωρίς να είναι συγχρόνως και 2ος αριθμήσιμος, τότε δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Για παράδειγμα οι χώροι $\mathbb{R}_l$ και $\mathbb{R}_r$, οι οποίοι είναι διαχωρίσιμοι, γιατί το $\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολό τους, αλλά δεν είναι 2οι αριθμήσιμοι (παράδειγμα 1.6.1-4).

1.8 Ασκήσεις

1. Πόσες τοπολογίες μπορούμε να ορίσουμε σε ένα σύνολο με τρία στοιχεία;

2. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο, το οποίο αποτελείται από τον $\mathbb{R}^2$, το κενό και όλες τις ανοικτές μπάλες με κέντρο την αρχή είναι μια τοπολογία στον $\mathbb{R}^2$. Να συγκριθεί η τοπολογία αυτή με την Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$.

3. Έστω X σύνολο και $A_n, n \in \mathbb{N}$ μια φθίνουσα, ως προς την σχέση του περιέχεσθαι ακολουθία υποσυνόλων του X, με $A_1 = X$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ είναι μια τοπολογία στο X.

4. Να αποδείξετε ότι στο σύνολο $\mathbb{N}$, μπορούμε να ορίσουμε υπεραριθμήσιμο πλήθος τοπολογιών.

   Υπόδειξη: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $\mathcal{T}_A$, για το οποίο ισχύει η ισοδυναμία: $U \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow A \subseteq U$ μαζί με το κενό είναι μία τοπολογία στο $\mathbb{N}$.

5. Να δειχθεί ότι το σύνολο, το οποίο έχει ως στοιχεία τα υποσύνολα του επιπέδου, τα οποία τεμνόμενα με την οποιαδήποτε ευθεία (ε) του επιπέδου δίνουν τομή που είναι ανοικτό υποσύνολο της (ε), ως προς την τοπολογία που επάγει στην (ε) η Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ είναι βάση μιας τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$, η οποία είναι πλουσιότερη της Ευκλείδειας.

6. Να αποδειχθεί ότι η καρτεσιανή τοπολογία στον $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ συμπίπτει με την Ευκλείδεια.

   Απόδειξη: Έστωσαν $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, με $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ και $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

   Θα δείξουμε ότι η

$$S(x, \varepsilon) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - y\| < \varepsilon \big\}$$

   είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την καρτεσιανή τοπολογία και ότι το

$$U = S(x_1, \varepsilon_1) \times S(x_2, \varepsilon_2) \times \ldots \times S(x_n, \varepsilon_n),$$

   όπου $\varepsilon_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια τοπολογία.

   Για το πρώτο, έστω $y \in S(x, \varepsilon)$ και $U = S\big(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big) \times S\big(x_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big) \times \ldots \times S\big(x_n, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big)$, τότε

$$y \in U \quad \Rightarrow \quad \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon\,,$$

   άρα $y \in U \subseteq S(x, \varepsilon)$, συνεπώς το πρώτο ζητούμενο αποδείχθηκε.

Για το δεύτερο, έχουμε

$$y \in U = S(x_1, \varepsilon_1) \times S(x_2, \varepsilon_2) \times \ldots \times S(x_n, \varepsilon_n) \quad \Leftrightarrow$$
$$|x_i - y_i| < \varepsilon_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Αν $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, τότε

$$\begin{aligned} y \in S(x,\varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad \|y - x\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |x_i - y_i| < \varepsilon \leq \varepsilon_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ &\Rightarrow \quad y \in U\,. \end{aligned}$$

Άρα $y \in S(x,\varepsilon) \subseteq U$, συνεπώς και το δεύτερο ζητούμενο αποδείχθηκε.

7. Έστω X τοπολογικός χώρος και A, B υποσύνολα του X. Να αποδείξετε ότι:

α΄) $(A \setminus B)^0 \subseteq A^0 \setminus B^0$.
β΄) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Να δώσετε από ένα παράδειγμα που δείχνει ότι στις παραπάνω σχέσεις δεν ισχύει πάντοτε το $=$.

Απόδειξη: Με V_x, U_x συμβολίζουμε περιοχές του x.

α΄)
$$\begin{aligned} x \in \big(A \setminus B\big)^0 \quad &\Rightarrow \exists\, U_x; U_x \subseteq A \setminus B \\ &\Rightarrow \exists\, U_x; U_x \subseteq A \wedge U_x \cap B = \varnothing \\ &\Rightarrow \exists\, U_x; U_x \subseteq A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow \exists\, U_x; U_x \subseteq A \wedge x \notin B^0 \\ &\Rightarrow x \in A^0 \wedge x \notin B^0 \\ &\Rightarrow x \in A^0 \setminus B^0, \end{aligned}$$

άρα $(A \setminus B)^0 \subseteq A^0 \setminus B^0$.

β΄)
$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \setminus \overline{B} \quad &\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B} \\ &\Rightarrow \big(\forall\, U_x \Rightarrow U_x \cap A \neq \varnothing\big) \wedge \big(\exists\, V_x; V_x \cap B = \varnothing\big) \\ &\Rightarrow \big(\forall\, U_x \Rightarrow \big(U_x \cap V_x\big) \cap \big(A \setminus B\big) \neq \varnothing\big) \\ &\Rightarrow \big(\forall\, U_x \Rightarrow U_x \cap \big(A \setminus B\big) \neq \varnothing\big) \\ &\Rightarrow x \in \overline{A \setminus B}, \end{aligned}$$

άρα $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Αντιπαράδειγμα, για το πρώτο: Στον $\mathbb{R}$, αν $A = [0,1]$ και $B = [\frac{1}{2}, 2]$, τότε $\big(A \backslash B\big)^0 = (0, \frac{1}{2})$ και $A^0 \setminus B^0 = (0, \frac{1}{2}]$.

Αντιπαράδειγμα, για το δεύτερο: Στον $\mathbb{R}$, αν $A = (0,1)$ και $B = (\frac{1}{2}, 2)$, τότε $\overline{A} \backslash \overline{B} = [0, \frac{1}{2})$ και $\overline{A \setminus B} = [0, \frac{1}{2}]$.

8. Για την πρόταση 1.3.3 (θ), δώστε ένα παράδειγμα, στο οποίο ισχύει το = και ένα παράδειγμα, στο οποίο δεν ισχύει το =.
Λύση: Αν $A = [0,1]$ και $B = [2,3]$, τότε $A^0 \cup B^0 = (0,1) \cup (2,3) = (A \cup B)^0$. Ενώ, αν $A = [0,1]$ και $B = [1,2]$, τότε $A^0 \cup B^0 = (0,1) \cup (1,2) \neq (0,2) = (A \cup B)^0$.

9. Για την πρόταση 1.3.5 (θ), δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο ισχύει το = και ένα παράδειγμα, στο οποίο δεν ισχύει το =.
Λύση: Αν $A = (0,1)$ και $B = (2,3)$, τότε $\overline{A \cap B} = \varnothing = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ενώ, αν $A = (0,1)$ και $B = (1,2)$, τότε $\overline{A \cap B} = \varnothing \neq \{1\} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

10. Αν $A_1, \ldots, A_n$ είναι υποσύνολα των τοπολογικών χώρων $X_1, \ldots, X_n$, αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι ως προς την καρτεσιανή τοπολογία ισχύει:
$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$
Απόδειξη: Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}$. Αν $U_i, i = 1, \ldots, n$ είναι ανοικτά υποσύνολα των $X_i, i = 1, \ldots, n$, αντιστοίχως, με $x_i \in U_i$, τότε το $\prod_{i=1}^{n} U_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i=1}^{n} X_i$, με $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, άρα $\big(\prod_{i=1}^{n} U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big) \neq \varnothing$, άρα $U_i \cap A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, άρα $x_i \in \overline{A_i}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, άρα $x \in \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Επομένως,
$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} \subseteq \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \tag{1.10}$$
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: Έστω ότι $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ και U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i=1}^{n} X_i$, με $x \in U$. Υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U_i των X_i, αντιστοίχως, ώστε $x_i \in U_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$. Έχουμε $x_i \in \overline{A_i}$, άρα $U_i \cap A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, άρα $\prod_{i=1}^{n} U_i \cap \prod_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$, άρα $U \cap \prod_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$, άρα $x \in \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}$. Επομένως,
$$\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subseteq \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} \tag{1.11}$$

Από τις (1.10) και (1.11), έπεται το ζητούμενο.

11. Να αποδειχθεί ότι $\overline{\mathbb{B}^n} = \mathbb{D}^n$ για κάθε $n \geq 1$.
Απόδειξη: Για $n = 1$ έχουμε $\overline{\mathbb{B}^1} = \overline{(-1,1)} = [-1,1] = \mathbb{D}^1$, επομένως το ζητούμενο αληθεύει. Μένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για $n \geq 2$. Έχουμε $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{D}^n$, άρα $\overline{\mathbb{B}^n} \subseteq \overline{\mathbb{D}^n}$ και επειδή το $\mathbb{D}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\overline{\mathbb{B}^n} \subseteq \mathbb{D}^n$$

Για την απόδειξη του αντιστρόφου εγκλεισμού έχουμε, αν $x \in \mathbb{D}^n$, τότε $\|x\| \leq 1$. Αν $\|x\| < 1$, τότε $x \in \mathbb{B}^n \subseteq \overline{\mathbb{B}^n}$. Επομένως μένει να αποδείξουμε ότι $x \in \overline{\mathbb{B}^n}$, αν $\|x\| = 1$. Έστω U μια περιοχή του x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq U$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\varepsilon < 1$ και παίρνουμε t, με $1 - \varepsilon < t < 1$. Αν $y = tx$, τότε $\|y\| = |t|\|x\| < 1$, άρα $y \in \mathbb{B}^n$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| \\ &= \|x - tx\| \\ &= (1-t)\|x\| = 1 - t < \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα $y \in S(x,\varepsilon)$, επομένως $U \cap \mathbb{B}^n \neq \varnothing$, άρα $x \in \overline{\mathbb{B}^n}$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

12. Να δειχθεί ότι το $[0,1]^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της άσκησης 1.8.10 έχουμε

$$[0,1]^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I} = \prod_{i=1}^{n} \overline{\mathbb{I}} = \overline{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}},$$

άρα το ζητούμενο αληθεύει.

13. Έστω G υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$. Αποδείξτε ότι οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α΄) Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

β΄) $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ για κάθε $A \subseteq X$.

γ΄) $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ για κάθε $A \subseteq X$.

Απόδειξη: α') ⇒ β') : Αν $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x, τότε

$$\begin{aligned} & x \in G \cap \overline{A} && \Rightarrow \\ & x \in G \wedge x \in \overline{A} && \Rightarrow \\ & x \in G \wedge (U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing) && \Rightarrow \\ & x \in G \wedge (U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow (U \cap G) \cap A \neq \varnothing) && \Rightarrow \\ & (U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap (G \cap A) \neq \varnothing) && \Rightarrow \\ & x \in \overline{G \cap A} \end{aligned}$$

άρα $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.

β') $\Rightarrow$ γ'): Έχουμε ότι $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$, άρα

$$\overline{G \cap \overline{A}} \subseteq \overline{\overline{G \cap A}} = \overline{G \cap A} \tag{1.12}$$

Επιπλέον $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A}$, άρα

$$\overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \overline{A}} \tag{1.13}$$

Από τις (1.12) και (1.13), έπεται το ζητούμενο.

γ') $\Rightarrow$ α'): Για $A = G^c$ η σχέση $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ δίνει: $\overline{G \cap \overline{G^c}} = \varnothing$, άρα $G \cap \overline{G^c} = \varnothing$, άρα $G \subseteq (\overline{G^c})^c$. Επιπλέον, $G^c \subseteq \overline{G^c}$, άρα $(\overline{G^c})^c \subseteq G$, επομένως $G = (\overline{G^c})^c$, συνεπώς το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

14. Αν A, B υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X, να δείξετε ότι:

    α′) $A^0 = X \setminus \overline{X \setminus A}$

    β′) $A \cup B = X \Rightarrow \overline{A} \cup B^0 = X$.

    γ′) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \overline{A} \cap B^0 = \varnothing$.

    Απόδειξη:

    α′) Άμεση συνέπεια της πρότασης 1.3.8.

    β′) Έστω $x \in A \cup B = X$. Αν $x \notin \overline{A}$, τότε υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $U \cap A = \varnothing$, άρα, επειδή είναι $A \cup B = X$ θα έχουμε $U \subseteq B$, συνεπώς $x \in B^0 \subseteq B$, άρα $X = \overline{A} \cup B^0$.

    γ′) Αν $x \in B^0$, τότε υπάρχει περιοχή U του x, με $U \subseteq B$, άρα $U \cap A = \varnothing$, άρα $x \notin \overline{A}$. Συνεπώς $\overline{A} \cap B^0 = \varnothing$.

15. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Να δειχθεί ότι:

    α′) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$.

    β′) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

    γ′) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

    δ′) Δεν ισχύει πάντα $A' \cap B' \subseteq (A \cap B)'$.

    Απόδειξη:

    Αν $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x, τότε

    α′)
    $$\begin{aligned} x \in A' &\Rightarrow (U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing) \\ &\Rightarrow (U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \varnothing) \\ &\Rightarrow x \in B', \end{aligned}$$

    άρα $A' \subseteq B'$.

β΄) Είναι $A \subseteq A \cup B$, συνεπώς $A' \subseteq (A \cup B)'$ και $B \subseteq A \cup B$, συνεπώς $B' \subseteq (A \cup B)'$. Άρα

$$A' \cup B' \subseteq (A \cup B)' \tag{1.14}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B)' && \Rightarrow \\
& \big(U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap (A \cup B) \setminus \{x\}) \neq \varnothing)\big) && \Rightarrow \\
& \big(U \in \mathcal{B}_x \Rightarrow U \cap \big(A \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing \vee U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \varnothing\big) && \Rightarrow \\
& x \in A' \vee x \in B' && \Rightarrow \\
& x \in A' \cup B' \,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \tag{1.15}$$

Από τις (1.14) και (1.15), έπεται το ζητούμενο.

γ΄) Είναι $A \cap B \subseteq A$, άρα

$$(A \cap B)' \subseteq A' \tag{1.16}$$

και $A \cap B \subseteq B$, άρα

$$(A \cap B)' \subseteq B' \tag{1.17}$$

Από τις (1.16) και (1.17) έχουμε $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

δ΄) Αντιπαράδειγμα, αν $A = \left\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$ και $B = \left\{-\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$, τότε $A \cap B = \varnothing$, άρα $(A \cap B)' = \varnothing$. Ενώ $A' = B' = \{0\}$, άρα $A' \cap B' = \{0\}$.

16. Αν X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, να δειχθεί ότι:

Το A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στον X, αν και μόνον, αν $\mathrm{Bd}(A) = \varnothing$.

Απόδειξη: Το αναγκαίο αποδεικνύεται εύκολα. Για το ικανό έχουμε $Bd(A) = \varnothing$, άρα $\overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \varnothing$, άρα

$$\overline{X \setminus A} \cap A = \varnothing \tag{1.18}$$

Επιπλέον $\big(X \setminus A\big) \cup A = X$, άρα

$$\overline{X \setminus A} \cup A = X \tag{1.19}$$

Από τις (1.18) και (1.19), συμπεραίνουμε ότι $A = \big(\overline{X \setminus A}\big)^c$, άρα το A είναι ανοικτό. Ομοίως συμπεραίνουμε ότι και το $X \setminus A$ είναι ανοικτό, επομένως το A είναι και κλειστό.

17. Αν X τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

α′) $\mathrm{Bd}(A\cup B) \subseteq \mathrm{Bd}(A)\cup\mathrm{Bd}(B)$. Δώστε ένα παράδειγμα, όπου $\mathrm{Bd}(A\cup B) \neq \mathrm{Bd}(A)\cup \mathrm{Bd}(B)$.

β′) Αν $\mathrm{Bd}(A) \subseteq A$, τότε και μόνον, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη:

α′)
$$\begin{aligned} x \in Bd(A\cup B) \quad &\Rightarrow x \in \overline{A\cup B} \cap \overline{(A\cup B)^c} \\ &\Rightarrow x \in \overline{A\cup B} \wedge x \in \overline{A^c \cap B^c}\,. \end{aligned}$$

Όμως $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ και $\overline{A^c\cap B^c} \subseteq \overline{A^c}\cap\overline{B^c}$, άρα
$$\begin{aligned} x \in Bd(A\cup B) &\Rightarrow x \in (\overline{A}\cup\overline{B}) \wedge x \in (\overline{A^c}\cap\overline{B^c}) \\ &\Rightarrow x \in (\overline{A}\cap\overline{A^c}\cap\overline{B^c}) \vee x \in \overline{B}\cap\overline{A^c}\cap\overline{B^c}) \\ &\Rightarrow x \in (\overline{A}\cap\overline{A^c}) \cup (\overline{B}\cap\overline{B^c}) \\ &\Rightarrow x \in Bd(A)\cup Bd(B)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή
$$Bd(A\cup B) \subseteq Bd(A)\cup Bd(B).$$

Στον πιο πάνω εγκλεισμό, το = δεν ισχύει απαραίτητα. Αντιπαράδειγμα, στον $\mathbb{R}$, αν $A = [0,1]$ και $B = [\frac{1}{2}, 2]$, τότε $Bd(A\cup B) = \{0,2\}$ και $Bd(A)\cup Bd(B) = \{0,1,\frac{1}{2},2\}$.

β′) Το ικανό: Έχουμε ότι $\overline{A} = A^0 \cup Bd(A)$. Αν $Bd(A)\subseteq A$, τότε $\overline{A} \subseteq A^0\cup A = A$ και, επειδή $A\subseteq\overline{A}$ έχουμε $A = \overline{A}$, άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.
Το αναγκαίο: Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $A = \overline{A}$, άρα $Bd(A) = \overline{A}\setminus A^0 = A\setminus A^0 \subseteq A$.

18. Αν A και B είναι υποσύνολα του τοπολογικού χώρου X, να δειχθεί ότι $\left(\overline{A\cap B}\right)^0 = \left(\overline{A}\right)^0 \cap \left(\overline{B}\right)^0$.

Απόδειξη: Έχουμε $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow \left(\overline{A\cap B}\right)^0 \subseteq \left(\overline{A}\right)^0$ και $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{B} \Rightarrow \left(\overline{A\cap B}\right)^0 \subseteq \left(\overline{B}\right)^0$, άρα
$$\left(\overline{A\cap B}\right)^0 \subseteq \left(\overline{A}\right)^0 \cap \left(\overline{B}\right)^0. \tag{1.20}$$

Επιπλέον, αν $\mathcal{B}_x$ είναι μια βάση περιοχών του x, τότε
$$\begin{aligned} x \in \left(\overline{A}\right)^0 \cap \left(\overline{B}\right)^0 &\Rightarrow x \in \left(\overline{A}\right)^0 \wedge x \in \left(\overline{B}\right)^0 \\ &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{B}_x; U \subseteq \overline{A} \wedge \exists V \in \mathcal{B}_x; V \subseteq \overline{B} \\ &\Rightarrow W = U\cap V \in \mathcal{B}_x \wedge W \subseteq \overline{A}\cap\overline{B} \\ &\Rightarrow x \in \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)^0, \end{aligned}$$

άρα
$$\left(\overline{A\cap B}\right)^0 \supseteq \left(\overline{A}\right)^0 \cap \left(\overline{B}\right)^0. \tag{1.21}$$

Από τις (1.20) και (1.21), έπεται το ζητούμενο.

19. Η τομή δύο βάσεων ενός τοπολογικού χώρου είναι απαραίτητα βάση του χώρου;

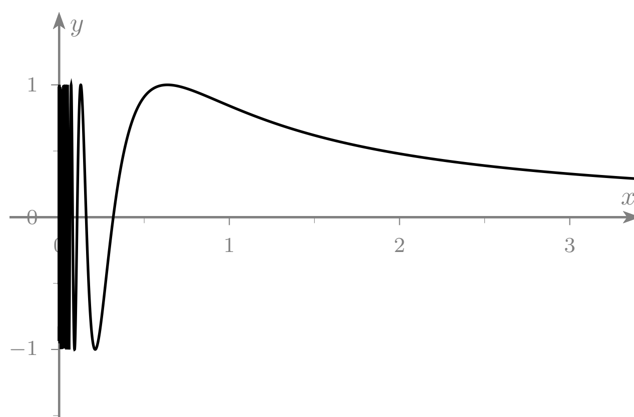
    Απάντηση: Όχι, αντιπαράδειγμα: Τα σύνολα $\mathcal{B}_1 = \{(p,q)/p,q \in \mathbb{Q} \wedge p < q\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{(r,t)/r,t \in \mathbb{A} \wedge r < t\}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}$, αλλά $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \varnothing$.

20. Να συγκριθεί η K-τοπολογία στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια και με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων.

21. Να βρείτε την κλειστότητα, το εσωτερικό και το σύνορο καθενός από τα ακόλουθα υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$.

    (α΄) $A = \{(p,a)\,/\,p \in \mathbb{Q} \wedge a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.
    (β΄) $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right)/\,0 < x < 1\right\}$.
    (γ΄) $C = \{(x,y)\,/\,1 < x^2 + y^2 \leq 3\}$.
    (δ΄) $D = \{(0,y)\,/\,0 < y < 1\}$.
    (ε΄) $E = \{(x,y)\,/\,x^2 + y^2 > 1\}$.

22. Στον Ευκλείδειο χώρο, αν $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,/\,x > 0 \wedge y = \sin\frac{1}{x}\right\}$, να δειχθεί ότι $\overline{S} = S \cup \{(0,b) \in \mathbb{R}^2/-1 \leq b \leq 1\}$ (σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned} b = (b_1, b_2) \in \overline{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, z_n = (x_n, y_n) \in S; (x_n, y_n) \to (b_1, b_2) \\ &\Leftrightarrow \quad x_n \to b_1 \wedge y_n \to b_2. \end{aligned}$$

Έχουμε

- αν $b_1 > 0$, τότε $y_n = \sin\frac{1}{x_n} \to \sin\frac{1}{b_1}$ και, επειδή $y_n \to b_2$ θα έχουμε $b_2 = \sin\frac{1}{b_1}$, άρα $(b_1, b_2) \in S$.
- αν $b_1 = 0$, τότε $x_n \to 0$ και $y_n = \sin\frac{1}{x_n} \to b_2$, άρα $x_n \to 0$ και $|b_1| \leq 1$, άρα $(x_n, y_n) \to (0, b_2) \in A = \{(0,y)/|y| \leq 1\}$

Άρα $\overline{S} = A \cup S$.

23. Να υπολογίσετε την κλειστότητα, το εσωτερικό και το παράγωγο σύνολο σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις, αν το $\mathbb{R}^2$ έχει την τοπολογία της λεξικογραφικής διάταξης.
(Η διάταξη $\prec$ λέγεται λεξικογραφική , αν: $(x,y) \prec (z,w) \Leftrightarrow x < z \vee (x = z \wedge y < w))$.

   (α΄) $A = \left\{(0, \frac{1}{n}) \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (β΄) $B = \{(x,0) \,/\, 0 < x < 1\}$.

   (γ΄) $C = \{(1,x) \,/\, 0 < x < 1\}$.

   (δ΄) $\left\{(x,y) \,/\, x > 0 \wedge 0 < y < \frac{1}{x}\right\}$.

24. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, να δείξετε ότι $\overline{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbb{S}^{n-1}$, $(\mathbb{S}^{n-1})^0 = \varnothing$ και $\mathrm{Bd}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}$.

   Απόδειξη: Για το πρώτο: $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| < 1 \vee \|x\| > 1\}$. Το $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| < 1 \vee \|x\| > 1\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ως ένωση των ανοικτών $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| < 1\} = \mathbb{B}^n$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| > 1\} = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$, άρα το $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, συνεπώς $\overline{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbb{S}^{n-1}$.

   Για το δεύτερο: Έστω ότι $(\mathbb{S}^{n-1})^0 \neq \varnothing$, άρα υπάρχει $x \in (\mathbb{S}^{n-1})^0$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$. Θεωρούμε τον αριθμό $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,\lambda x) = \left\| x - x - \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\, x \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad & \Rightarrow \\ \lambda x \in S(x,\varepsilon) \quad & \Rightarrow \\ \lambda x \in \mathbb{S}^{n-1} \quad & \Rightarrow \\ \lambda \|x\| = 1 \quad & \Rightarrow \\ \lambda = 1\,, \quad & \end{aligned}$$

   άτοπο.

   Για το τρίτο: $\mathrm{Bd}(\mathbb{S}^{n-1}) = \overline{S^{n-1}} \setminus (\mathbb{S}^{n-1})^0 = \mathbb{S}^{n-1}$.

25. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και

$$F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

   μία απεικόνιση, για την οποία

   α΄) $F(\varnothing) = \varnothing$.

   β΄) $A \subseteq F(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

   γ΄) $F(F(A)) = F(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

   δ΄) Αν $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, τότε $F\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \bigcup_{i=1}^{n} F(A_i)$.

   Θέτουμε

$$\mathcal{T} = \{X \setminus F(A) \,/\, A \subseteq X\}.$$

Να δειχθεί ότι

(α΄) Η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X και

(β΄) $\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}}(A) = F(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

Απόδειξη: Καταρχάς θα αποδείξουμε δύο βοηθητικές προτάσεις:

1. Αν $A, B \subseteq X$, με $A \subseteq B$, τότε $F(A) \subseteq F(B)$.

Πράγματι,

$$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow F(A) \subseteq F(A) \cup F(B \setminus A) = F(B)$$

και
2. Αν $B_i,\ i \in I$ οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $\bigcap_{i\in I} F(B_i) = F\big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\big)$.

Πράγματι έχουμε

$$\bigcap_{i\in I} F(B_i) \subseteq F\big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\big) \tag{1.22}$$

Επιπλέον, $\bigcap_{i\in I} F(B_i) \subseteq F(B_i)$ για κάθε $i \in I$, άρα $F\big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\big) \subseteq F(F(B_i)) = F(B_i)$ για κάθε $i \in I$, άρα

$$F\big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} F(B_i) \tag{1.23}$$

Από τις (1.22) και (1.23), προκύπτει το ζητούμενο.

Ερχόμαστε τώρα, στην απόδειξη.

α΄) $X \subseteq F(X) \subseteq X \Rightarrow F(X) = X \Rightarrow \varnothing = X \setminus F(X) \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{T}$.

β΄) $X = X \setminus F(\varnothing) \Rightarrow X \in \mathcal{T}$.

γ΄) Έστω $A_i,\ i \in I$, με $A_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Συνεπώς υπάρχει οικογένεια υποσυνόλων $B_i,\ i \in I$ του X, ώστε $A_i = (F(B_i))^c$ για κάθε $i \in I$. Άρα

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in I} A_i &= \bigcup_{i\in I} (F(B_i))^c \\
&= \Big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\Big)^c \\
&= \Big(F\big(\bigcap_{i\in I} F(B_i)\big)\Big)^c \\
&\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

δ΄) Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, τότε υπάρχουν υποσύνολα $B_1, \ldots, B_n$ του X, ώστε $A_i = (F(B_i))^c, i = 1, \ldots, n$. Άρα

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n} A_i &= \bigcap_{i=1}^{n} (F(B_i))^c \\ &= \Big(\bigcup_{i=1}^{n} F(B_i)\Big)^c \\ &= \big(\bigcup_{i=1}^{n} F(F(B_i))\big)^c \\ &= \Big(F\big(\bigcup_{i=1}^{n} F(B_i)\big)\Big)^c \\ &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}\,.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο: Αν το B είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε το B^c είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα υπάρχει $D \subseteq X$, ώστε $B^c = (F(D))^c$, άρα $B = F(D)$. Και αντιστρόφως, αν $D \subseteq X$, τότε το $B = F(D)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$.
Συνεπώς $\mathrm{Cl}_X(A) = \bigcap \big\{F(D)/D \subseteq X \wedge A \subseteq F(D)\big\}$. Αλλά, $A \subseteq F(A) = F(F(A))$, άρα $F(A) \in \{F(D)/D \subseteq X \wedge A \subseteq F(D)\}$, επομένως $\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}}(A) \subseteq F(A)$. Επιπλέον $A \subseteq F(D)$, άρα $F(A) \subseteq F(F(D)) = F(D)$, άρα $F(A) \subseteq Cl_{\mathcal{T}}(A)$, άρα $Cl_{\mathcal{T}}(A) = F(A)$.

26. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και

$$G : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

μία απεικόνιση, για την οποία

α΄) $G(X) = X$.

β΄) $G(A) \subseteq A$ για κάθε $A \subseteq X$.

γ΄) $G(G(A)) = G(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

δ΄) Αν $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, τότε $G\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = \bigcap_{i=1}^{n} G(A_i)$.

Θέτουμε

$$\mathcal{T} = \{G(A)\,/\,A \subseteq X\}$$

Να δειχθεί ότι

(α΄) Η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X και

(β΄) $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}}(A) = G(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

27. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και

$$b : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

μία απεικόνιση, για την οποία

α΄) $b(\varnothing) = \varnothing$.

β΄) $b(b((A)) \subseteq b(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

γ΄) $b(A) = b(X \setminus A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

δ΄) $A \cap B \cap b(A \cap B) = A \cap B \cap (b(A) \cup b(B))$ για κάθε $A, B \subseteq X$.

Θέτουμε

$$\mathcal{T} = \{A \setminus b(A)/A \subseteq X\}$$

Να δειχθεί ότι

(α΄) Η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X και

(β΄) $\text{Bd}_{\mathcal{T}}(A) = b(A)$ για κάθε $A \subseteq X$.

[9]

28. Έστω X τοπολογικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.

Απόδειξη: Αν $\mathcal{B}_x$ είναι μια βάση περιοχών του x, τότε

$$\begin{aligned} x \in \overline{D \cap G} & \quad \Leftrightarrow \\ U \cap (G \cap D) \neq \varnothing \quad \forall U \in \mathcal{B}_x & \quad \Leftrightarrow \\ \big(U \cap G\big) \cap D \neq \varnothing \quad \forall U \in \mathcal{B}_x & \quad \Leftrightarrow \\ U \cap G \neq \varnothing \quad \forall U \in \mathcal{B}_x & \quad \Leftrightarrow \\ x \in \overline{G}\,, & \end{aligned}$$

άρα $\overline{D \cap G} = \overline{G}$.

29. Αν το A είναι ένα ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου, να αποδείξετε ότι το $\text{Bd}(A)$ είναι αραιό.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x.

- Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε $x \in \big(\overline{\text{Bd}(A)}\big)^0 = \big(\text{Bd}(A)\big)^0 = \big(\overline{A} \setminus A^0\big)^0 = \big(\overline{A} \setminus A\big)^0$, άρα υπάρχει $U \in \mathcal{B}_x$, ώστε $U \subseteq \overline{A}$ και $U \cap A = \varnothing$, άρα $U \cap A \neq \varnothing$ και $U \cap A = \varnothing$, αντίφαση. Επομένως $\big(\overline{\text{Bd}(A)}\big)^0 = \varnothing$, δηλαδή το $\text{Bd}(A)$ είναι αραιό υποσύνολο του χώρου.

[9]Οι ασκήσεις 25,26 και 27 δίνουν εναλλακτικούς τρόπου ορισμού μιας τοπολογίας σε ένα σύνολο.

- Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε

$$x \in \left(\overline{\mathrm{Bd}(A)}\right)^0 = \left(\mathrm{Bd}(A)\right)^0 = \left(\overline{A} \setminus A^0\right)^0 = \left(A \setminus A^0\right)^0,$$

άρα υπάρχει $U \in \mathcal{B}_x$, ώστε $U \subseteq A$ και $U \cap A^0 = \varnothing$, άρα $x \in A^0$ και $x \notin A^0$, αντίφαση. Επομένως $\left(\overline{\mathrm{Bd}(A)}\right)^0 = \varnothing$, άρα το $\mathrm{Bd}(A)$ είναι αραιό υποσύνολο του χώρου.

30. Αν, $X_1, \ldots, X_n$ είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, να δειχθεί ότι ο $\prod_{i=1}^{n} X_i$ είναι διαχωρίσιμος, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία.

31. Έστω X μη κενό σύνολο και απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, με τις ιδιότητες:

    i) $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$.

    ii) $d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε $x, y \in X$.

    iii) $d(x,y) \leq \max\{d(y,z), d(z,x)\}$ για κάθε $x, y, z \in X$.

    Να αποδείξετε ότι

    α΄) Η d είναι μετρική στο X.

    β΄) Αν x, y, z είναι διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X, τότε δύο τουλάχιστον από τα $d(x,y)$, $d(y,z)$, $d(z,x)$ είναι ίσα.

    γ΄) Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε $y \in S(x,\varepsilon) \Rightarrow S(y,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)$.

    δ΄) $\overline{S(x,\varepsilon)} = S(x,\varepsilon)$.

    ε΄) Ο X έχει μια βάση με σύνολα, τα οποία είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά. Οι χώροι αυτοί λέγονται **υπερμετρικοί**.

2

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

2.1 Γενικά περί συνεχών απεικονίσεων

Η έννοια της συνεχούς απεικόνισης είναι η κεντρική έννοια της τοπολογίας. Δεν είναι υπερβολικός ο ισχυρισμός ότι τα πάντα στην τοπολογία είναι συνεχείς απεικονίσεις. Διαισθητικά, συνεχείς απεικονίσεις από έναν χώρο σε έναν δεύτερο χώρο είναι οι μετασχηματισμοί, κατά τους οποίους για να πάρουμε "γειτονικά" σημεία στον δεύτερο χώρο, πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα "γειτονικά" σημεία στον πρώτο χώρο. Η έννοια της γειτονικότητας προσδιορίζεται αυτονόητα από την τοπολογία του χώρου.

Ορισμός 2.1.1. Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_2)$. Θα λέμε ότι η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι **συνεχής**, αν και μόνον, αν αληθεύει η συνεπαγωγή

$$U \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1.$$

Παρατήρηση: Επειδή $f^{-1}(Y \setminus U) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(U)$, ο παραπάνω ορισμός μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:
Η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής, αν και μόνον, αν αληθεύει η συνεπαγωγή
Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του Y, τότε το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας δείχνουν το πως συνδέεται η συνέχεια απεικονίσεων με τις βάσεις και τις υποβάσεις των χώρων αφίξεως.

Πρόταση 2.1.1. *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_2)$. Η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής, αν και μόνον, αν αληθεύει η συνεπαγωγή*

$$U \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1,$$

όπου $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του χώρου Y.

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι προφανές, γιατί, αν $B \in \mathcal{B}$, τότε $B \in \mathcal{T}_2$.
Για το ικανό: Έστω $U \in \mathcal{T}_2$, τότε υπάρχει οικογένεια $B_i, i \in I$ στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$, ώστε $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Έχουμε ότι $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_1$ για κάθε $i \in I$, άρα $f^{-1}(U) = f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} B_i\big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_1$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.1.2. *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι* $(X, \mathcal{T}_1)$ *και* $(Y, \mathcal{T}_2)$. *Η απεικόνιση* $f : X \to Y$ *είναι συνεχής, αν και μόνον, αν αληθεύει η συνεπαγωγή:*

$$U \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1,$$

όπου $\mathcal{C}$ *είναι μια υποβάση του χώρου* Y.

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι προφανές, γιατί, αν $C \in \mathcal{C}$, τότε $C \in \mathcal{T}_2$.
Για το ικανό, αρκεί να δείξουμε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή της προηγούμενης πρότασης για τη βάση $\mathcal{B}$ που παράγεται από την υποβάση $\mathcal{C}$. Είναι: αν $B \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχουν $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, ώστε $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i$. Επιπλέον έχουμε ότι $f^{-1}(C_i) \in \mathcal{T}_1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, άρα $f^{-1}(B) = f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i\big) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(C_i) \in \mathcal{T}_1$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Παραδείγματα 2.1.1.

1. Κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$, όπου X τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία είναι συνεχής, γιατί, αν U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, αφού όλα τα υποσύνολα του X είναι ανοικτά.

2. Έστω X τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, με $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ η χαρακτηριστική απεικόνιση του A. Για να είναι η χ_A συνεχής, πρέπει και αρκεί, το σύνολο A να είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Στον χώρο $\{0, 1\}$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία, τα σύνολα $\{0\}$ και $\{1\}$ είναι ανοικτά, άρα το $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και το $X \setminus A = \chi_A^{-1}(\{0\})$ είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το A είναι συγχρόνως και κλειστό υποσύνολο του X.

3. Αν X, Y τοπολογικοί χώροι, τότε κάθε σταθερή απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής, γιατί, αν U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα $f(x) = c \in U$ ή $f(x) = c \notin U$. Στη πρώτη περίπτωση $f^{-1}(U) = X$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Στη δεύτερη περίπτωση $f^{-1}(U) = \varnothing$, το οποίο είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του X.

4. Έστω X ένα σύνολο εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Αν η $f : X \to X$ είναι 1-1 και επί, τότε είναι συνεχής. Πράγματι, έστω ότι το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε το $X \setminus U$ είναι πεπερασμένο. Αλλά

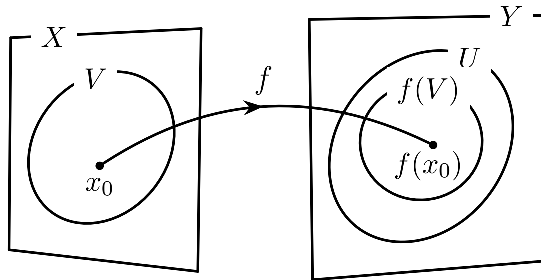
$$\begin{aligned} f^{-1}(X \setminus U) &= f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(U) \\ &= Y \setminus f^{-1}(U), \end{aligned}$$

γιατί η f^{-1} είναι 1-1 και, επειδή το $f^{-1}(X \setminus U)$ είναι ισοδύναμο με το $X \setminus U$, το $X \setminus f^{-1}(U)$ είναι πεπερασμένο, άρα το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό. Το ίδιο ισχύει και με την περίπτωση της συναριθμήσιμης τοπολογίας.

5. Παίρνουμε την ταυτοτική απεικόνιση $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και θεωρούμε ότι το σύνολο αφετηρίας είναι εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια τοπολογία, το δε σύνολο αφίξεως με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων. Αν $a < b$, τότε το $[a, b)$ είναι ανοικτό στο σύνολο αφίξεως, ενώ το $i_{\mathbb{R}}^{-1}([a, b)) = [a, b)$ δεν είναι ανοικτό στο σύνολο αφετηρίας, άρα η $i_{\mathbb{R}}$ δεν είναι συνεχής. Αν αντιστρέψουμε τις τοπολογίες και υποθέσουμε ότι το σύνολο αφετηρίας είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων και το σύνολο αφίξεως με την Ευκλείδεια τοπολογία, τότε ένα τυχαίο βασικό σύνολο του συνόλου αφίξεως είναι το διάστημα (a, b), με $a < b$. Έχουμε $i_{\mathbb{R}}^{-1}((a, b)) = (a, b)$, το οποίο είναι ανοικτό στο σύνολο αφετηρίας, άρα η $i_{\mathbb{R}}$ είναι συνεχής. Από αυτό το παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι η συνέχεια των απεικονίσεων δεν εξαρτάται μόνον από τα σύνολα, στα οποία ορίζεται η τοπολογία, αλλά και από την τοπολογία των συνόλων αυτών.
Θα μπορούσαμε το πιο πάνω παράδειγμα να το γενικεύσουμε για την ταυτοτική απεικόνιση $i_X : X \to X$ στην περίπτωση που ο χώρος X ως σύνολο αφετηρίας και ως σύνολο αφίξεως είναι εφοδιασμένος με δύο τοπολογίες, εκ των οποίων η μία είναι γνήσια πλουσιότερη της άλλης.

Με τον ορισμό 2.1.1 παρουσιάσαμε τη συνέχεια ως ολική έννοια και με τον επόμενο ορισμό θα δούμε και την τοπική της σημασία, στην οποία αρκετές φορές προσφεύγουμε, προκειμένου να αποδείξουμε την ολική συνέχεια μιας απεικόνισης.

Ορισμός 2.1.2. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και απεικόνιση $f : X \to Y$. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** $x_0 \in X$, αν και μόνον, αν για κάθε περιοχή U του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή V του x_0, ώστε $f(V) \subseteq U$. Είναι αυτό που διαισθητικά διατυπώνουμε ως εξής: μπορούμε να έχουμε τις οποιεσδήποτε κοντινές εικόνες στο $f(x_0)$, αρκεί να πάρουμε κατάλληλα κοντινά στο x_0 αρχέτυπα (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός στους μετρικούς χώρους μεταφέρεται ως εξής: έστωσαν (X, d_1), (Y, d_2) μετρικοί χώροι και $x_0 \in X$. Η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Πρόταση 2.1.3. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Τότε η f είναι συνεχής, αν και μόνον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in X$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστω $x_0 \in X$ και U περιοχή του $f(x_0)$. Αν $V = f^{-1}(U)$, τότε, επειδή η f είναι συνεχής το V είναι ανοικτό και $x_0 \in V$. Άρα το V είναι μία περιοχή του x_0. Επιπλέον, $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Το ικανό: Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y. Αν υποθέσουμε, για να εφαρμόσουμε την απαγωγή σε άτοπο, ότι το $f^{-1}(U)$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει $x_0 \in f^{-1}(U)$, ώστε για κάθε περιοχή V του x_0 να ισχύει $V \nsubseteq f^{-1}(U)$. Άρα υπάρχει $y \in V$, ώστε $y \notin f^{-1}(U)$, άρα $y \in V$ και $f(y) \notin U$. Επομένως για κάθε περιοχή V του x_0 έχουμε $f(V) \nsubseteq U$, άτοπο, γιατί η f είναι συνεχής στο x_0. □

Πρόταση 2.1.4. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f είναι συνεχής.

β΄) Αν B είναι κλειστό υποσύνολο του Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

γ΄) Αν $A \subseteq X$, τότε $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έχει ήδη αποδειχθεί στην παρατήρηση του ορισμού της συνέχειας.

β') ⇒ γ'): Έχουμε $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, άρα

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, συνεπώς

$$\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}),$$

άρα

$$f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}.$$

γ') ⇒ α'): Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο $x_0 \in X$. Έστω U μια περιοχή του $f(x_0)$ και $V = X \setminus f^{-1}(U)$. Είναι

$$V = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$$
$$\Rightarrow f(V) = f(f^{-1}(Y \setminus U)) \subseteq Y \setminus U\,.$$

Το $Y \setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα $f(\overline{V}) \subseteq \overline{f(V)} \subseteq \overline{Y \setminus U} = Y \setminus U$. Υποθέτουμε ότι $x_0 \notin W = X \setminus \overline{V}$, τότε

$$x_0 \in \overline{V} \Rightarrow f(x_0) \in f(\overline{V})$$
$$\Rightarrow f(x_0) \in Y \setminus U$$
$$\Rightarrow f(x_0) \notin U,$$

άτοπο. Άρα, το W είναι μια περιοχή του x_0. Επιπλέον

$$V \subseteq \overline{V} \Rightarrow X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V$$
$$\Rightarrow W \subseteq X \setminus V = f^{-1}(U)$$
$$\Rightarrow f(W) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U\,,$$

άρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Πρόταση 2.1.5. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f είναι συνεχής.

β΄) Αν $B \subseteq Y$, τότε $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

γ΄) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B^0) \subseteq (f^{-1}(B))^0$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B)} \subseteq \overline{B}$, άρα

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

β') $\Rightarrow$ γ'): Είναι $Y \setminus B^0 = \overline{Y \setminus B}$ (πρόταση 1.3.8), άρα $B^0 = Y \setminus \overline{Y \setminus B}$, άρα

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^0) &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \\ &= X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &= X \setminus \overline{f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)} \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)}. \end{aligned}$$

(Γιατί $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$). Επιπλέον, $(f^{-1}(B))^0 = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)}$, άρα

$$f^{-1}(B^0) \subseteq (f^{-1}(B))^0.$$

γ') $\Rightarrow$ α'): Έστω $x_0 \in X$ και U μια περιοχή του $f(x_0)$. Είναι $f(x_0) \in U = U^\circ$, άρα $x_0 \in f^{-1}(U^0) \subseteq (f^{-1}(U))^0$. Θέτουμε $V = (f^{-1}(U))^0$. Το V είναι προφανώς μια περιοχή του x_0 και

$$V \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow f(V) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U,$$

άρα η f είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο x_0, συνεπώς η f είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.1.6. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, τότε ο περιορισμός f/A της f στο A είναι επίσης συνεχής απεικόνιση.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε, από την συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το $f^{-1}(U) \cap A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του A, ως προς την επαγόμενη από τον X τοπολογία. Έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \big(f/A\big)^{-1}(U) &\Leftrightarrow \big(f/A\big)(x) \in U \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge f(x) \in U \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(U) \cap A. \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(U) \cap A = \big(f/A\big)^{-1}(U)$, άρα το $\big(f/A\big)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του A, επομένως η f/A είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y και Z. Αν οι απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς, τότε η απεικόνιση $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του Z. Τότε, λόγω της συνέχειας της g το $g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και, λόγω της συνέχειας της f, το $f^{-1}(g^{-1}(U))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αλλά $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, συνεπώς το $(g \circ f)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα η $g \circ f$ ΄ είναι συνεχής. □

Την επόμενη πρόταση χρησιμοποιούμε συχνότατα στην αλγεβρική τοπολογία.

Πρόταση 2.1.8. ***(Λήμμα επικόλλησης)*** *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και A, B κλειστά υποσύνολα του X, με $A \cup B = X$. Αν οι $f : A \to Y$ και $g : B \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, με $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$, τότε η $h : X \to Y$, με*

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in A \\ g(x)\,, & x \in B \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη: Επειδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$, η h είναι καλώς ορισμένη. Έστω C ένα κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Λόγω της συνέχειας της f, το σύνολο $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του A και, επειδή το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Ομοίως το $g^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, συνεπώς η h είναι συνεχής. □

Παρατήρηση: Μια κλασσική εφαρμογή του λήμματος επικόλλησης που παρόμοιες μ' αυτή θα συναντήσουμε πολλές στην αλγεβρική τοπολογία είναι η εξής:
Έστω X τοπολογικός χώρος και $\alpha : \mathbb{I} \to X$, $\beta : \mathbb{I} \to X$ συνεχείς απεικονίσεις, με $\alpha(1) = \beta(0)$. Τότε η $\gamma : \mathbb{I} \to X$, με

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής. Πράγματι στην περίπτωση αυτή, εφαρμόζουμε το λήμμα επικόλλησης για τις συνεχείς απεικονίσεις $f : A \to Y$, με $f(t) = \alpha(2t)$ και $g : B \to Y$, με $g(t) = \beta(2t-1)$, όπου $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [\frac{1}{2}, 1]$. Το λήμμα επικόλλησης εφαρμόζεται, γιατί $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$ και $f(\frac{1}{2}) = \alpha(1) = \beta(0) = g(\frac{1}{2})$.

Όπως το λήμμα επικόλλησης αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση

Πρόταση 2.1.9. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και A, B ανοικτά υποσύνολα του X, με $A \cup B = X$. Αν οι $f : A \to Y$ και $g : B \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, με $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$, τότε η $h : X \to Y$, με*

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in A \\ g(x)\,, & x \in B \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Πρόταση 2.1.10. ***(Θεώρημα μεταφοράς)*** *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y, ώστε ο X να είναι 1ος αριθμήσιμος. Επιπλέον $x_0 \in X$ και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση. Αν για οποιαδήποτε ακολουθία σημείων x_n, $n \in \mathbb{N}$ του X, με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Άρα υπάρχει περιοχή U του $f(x_0)$, ώστε για κάθε περιοχή V του x_0 να ισχύει $f(V) \nsubseteq U$, άρα

$$U^c \cap f(V) \neq \varnothing \tag{2.1}$$

Επιλέγουμε μια κιβωτισμένη βάση περιοχών $\mathcal{B} = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$ του x_0, δηλαδή

$$V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_n \supseteq \ldots.$$

Από την (2.1), προκύπτει ότι $W_n = U^c \cap f(V_n) \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $x_n \in V_n$, ώστε $f(x_n) \in W_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν W είναι μια περιοχή του x_0, τότε υπάρχει στοιχείο V_{n_0} της βάσης $\mathcal{B}$, ώστε $V_{n_0} \subseteq W$. Άρα είναι $x_n \in V_n \subseteq V_{n_0} \subseteq W$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $x_n \to x_0$. Όμως για κάθε φυσικό αριθμό n είναι $f(x_n) \notin U$, από τον τρόπο επιλογής των x_n, άρα $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, άτοπο. □

Παρατηρήσεις:

1. Το αναγκαίο στην παραπάνω πρόταση ισχύει, χωρίς να είναι απαραίτητο ο χώρος X να είναι 1ος αριθμήσιμος. Πράγματι, έστω U μια περιοχή του $f(x_0)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει περιοχή V του x_0, ώστε $f(V) \subseteq U$. Επειδή $x_n \to x_0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, ώστε $x_n \in V$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f(x_n) \in U$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $f(x_n) \to f(x_0)$.

2. Είναι προφανές ότι το θεώρημα μεταφοράς ισχύει στους μετρικούς χώρους, οι οποίοι είναι 1οι αριθμήσιμοι και ειδικότερα στους Ευκλείδειους χώρους ($\mathbb{R}^n$) και τους υποχώρους τους ($\mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{D}^n, \mathbb{B}^n$). Το τονίζουμε, γιατί θα χρειαστεί στην αλγεβρική τοπολογία, όπου θα το εφαρμόσουμε πολλές φορές, προκειμένου να αποδείξουμε τη συνέχεια απεικονίσεων.

Ορισμός 2.1.3. Έστωσαν τα σύνολα $X_1, \ldots, X_n$ και $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ το καρτεσιανό γινόμενο τους. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, την απεικόνιση $p_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_i$, με

$$p_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$$

ονομάζουμε $i-$**προβολή** ή προβολή στην i-συντεταγμένη.

Πρόταση 2.1.11. *Έστωσαν $X_1, \ldots, X_n$ τοπολογικοί χώροι. Τότε για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ η i-προβολή p_i είναι συνεχής, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία.*

Απόδειξη: Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X_i. Τότε $p_i^{-1}(U) = X_1 \times \ldots \times U \times \ldots \times X_n$, το οποίο είναι ανοικτό στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i=1}^{n} X_i$, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία. Συνεπώς η p_i είναι συνεχής. □

Παρατήρηση: Με χρήση της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να έχουμε και μία διαφορετική, από αυτή που είδαμε στις ασκήσεις της παραγράφου 1.7. κομψή απόδειξη του ότι το $\mathbb{I}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \geq 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^n &= \{(x_1, \ldots, x_n)/0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \wedge p_i(x) \in \mathbb{I}, \quad \forall i = 1, \ldots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\mathbb{I}).\end{aligned}$$

Επειδή οι p_i είναι συνεχείς τα $p_i^{-1}(\mathbb{I})$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, επομένως το $\mathbb{I}^n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\mathbb{I})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 2.1.12. *Έστωσαν $(X_i, \mathcal{T}_i), i = 1, \ldots, n$ τοπολογικοί χώροι, $\mathcal{T}$ η καρτεσιανή τοπολογία στον χώρο $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ και $(Y, \mathcal{T}')$ τοπολογικός χώρος. Τότε η $f : Y \to X$ είναι συνεχής, αν και μόνον, αν οι απεικονίσεις $p_i \circ f$ (συνιστώσες απεικονίσεις) είναι συνεχείς για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Αν η f είναι συνεχής, τότε είναι συνεχής και η $p_i \circ f$, ως σύνθεση των συνεχών απεικονίσεων p_i και f.

Το ικανό: Έστω $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$ ένα βασικό σύνολο του X, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία, με $U_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Είναι

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\prod_{i=1}^{n} U_i\Big) && \Leftrightarrow \\ & f(x) \in \prod_{i=1}^{n} U_i && \Leftrightarrow \\ (\forall\, i = 1, \ldots, n) \quad & (p_i \circ f)(x) \in U_i && \Leftrightarrow \\ (\forall\, i = 1, \ldots, n) \quad & x \in (p_i \circ f)^{-1}(U_i) && \Leftrightarrow \\ & x \in \bigcap_{i=1}^{n} (p_i \circ f)^{-1}(U_i)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $f^{-1}(U) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (p_i \circ f)^{-1}(U_i)$. Οι απεικονίσεις $p_i \circ f : Y \to X_i$ είναι συνεχείς, άρα τα σύνολα $(p_i \circ f)^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Y για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, άρα το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, άρα η f είναι συνεχής. □

2.2 Ανοικτές και κλειστές απεικονίσεις

Ορισμός 2.2.1. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Η f ονομάζεται **ανοικτή**, αν και μόνον, αν το $f(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X.

Παρατήρηση: Είναι προφανές το ότι η απαίτηση του πιο πάνω ορισμού, αρκεί να ισχύει για όλα τα στοιχεία μιας βάσης του X (βασικά σύνολα).

Ορισμός 2.2.2. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Η f ονομάζεται **κλειστή**, αν και μόνον, αν το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y για κάθε κλειστό υποσύνολο A του X.

Πρόταση 2.2.1. *Έστωσαν $X_1, \ldots, X_n$ τοπολογικοί χώροι. Τότε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ η k-προβολή $p_k : \prod_{i=1}^{n} X_i = X \to X_k$ είναι ανοικτή απεικόνιση, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία του X.*

Απόδειξη: Έστω U ένα βασικό υποσύνολο του $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Τότε $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$, όπου U_i ανοικτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Άρα $p_k(U) = U_k$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X_k, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Οι προβολές p_k δεν είναι απαραίτητα κλειστές απεικονίσεις. Για παράδειγμα, το $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / yx = 1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, αλλά το $p_1(A) = (0, \infty)$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των συνεχών, των ανοικτών και των κλειστών απεικονίσεων;

α΄) **Υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις, οι οποίες δεν είναι ανοικτές, ούτε κλειστές.**

Έστω η ταυτοτική απεικόνιση $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν το σύνολο αφετηρίας είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία και το σύνολο αφίξεως με την Ευκλείδεια τοπολογία, τότε η $i_{\mathbb{R}}$ είναι προφανώς συνεχής. Το $\mathbb{Q}$ με την Ευκλείδεια τοπολογία δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Είναι όμως εικόνα του εαυτού του, μέσω της ταυτοτικής $i_{\mathbb{R}}$, το οποίο ως προς την πρώτη τοπολογία είναι και ανοικτό και κλειστό. Άρα η $i_{\mathbb{R}}$ δεν είναι, ούτε ανοικτή, ούτε κλειστή.

β΄) **Υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις, οι οποίες είναι ανοικτές, αλλά όχι κλειστές.**

Οι προβολές είναι απεικονίσεις συνεχείς (πρόταση 2.1.12), ανοικτές (πρόταση 2.2.1), αλλά δεν είναι πάντοτε κλειστές. Το είδαμε στην αμέσως προηγούμενη παρατήρηση.

γ΄) **Υπάρχουν απεικονίσεις, οι οποίες είναι ανοικτές, αλλά δεν είναι κλειστές ούτε συνεχείς.**

Η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x\,, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Η επαλήθευση αφήνεται ως άσκηση.

δ΄) **Υπάρχουν απεικονίσεις συνεχείς, κλειστές, αλλά όχι ανοικτές.**

Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = c$ είναι μια τέτοια. Η επαλήθευση αφήνεται ως άσκηση.

ε΄) **Υπάρχουν απεικονίσεις, οι οποίες είναι κλειστές, αλλά, ούτε ανοικτές, ούτε συνεχείς.**

Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, με $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι μια τέτοια. Η επαλήθευση αφήνεται ως άσκηση.

ϛ΄) **Υπάρχουν απεικονίσεις, οι οποίες είναι ανοικτές και κλειστές, αλλά όχι συνεχείς.**

Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, με $f(x) = [x]$ είναι μία τέτοια. Το $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια τοπολογία και το $\mathbb{Z}$ με την διακριτή. Το $[x]$ σημαίνει το ακέραιο μέρος του x. Η f είναι προφανώς ανοικτή και κλειστή, επειδή όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{Z}$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά. Το $\{1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, αλλά το $f^{-1}\big(\{1\}\big) = [1,2)$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα η f δεν είναι συνεχής.

Πρόταση 2.2.2. *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y και η απεικόνιση $f : X \to Y$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f είναι ανοικτή.

β΄) Αν $A \subseteq X$, τότε $f(A^0) \subseteq (f(A))^0$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Το σύνολο $f(A^0)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Επιπλέον, $A^0 \subseteq A$, άρα $f(A^0) \subseteq f(A)$, άρα $f(A^0) \subseteq (f(A))^0$, επειδή το $f(A^0)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

β') $\Rightarrow$ α'): Έστω A ένα ανοικτό υποσύνολο του X, τότε $A^0 = A$, άρα $f(A) = f(A^0) \subseteq (f(A))^0$. Αλλά $(f(A))^0 \subseteq f(A)$, άρα $f(A) = (f(A))^0$, άρα το σύνολο $f(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. □

Πρόταση 2.2.3. *Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y και η απεικόνιση $f : X \to Y$. Τότε οι επόμενες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f είναι κλειστή.

β΄) Αν $A \subseteq X$, τότε $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Το σύνολο $f(\overline{A})$ είναι κλειστό. Επομένως

$$\begin{aligned} A \subseteq \overline{A} &\Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{A}) \\ &\Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}). \end{aligned}$$

β') $\Rightarrow$ α'): Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε $A = \overline{A} \Rightarrow f(A) = f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$. Επιπλέον $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, άρα $f(A) = \overline{f(A)}$, άρα το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. □

Πρόταση 2.2.4. *Αν* $A_i,\ i=1,\dots,n$ *είναι υπόχωροι των χώρων* $X_i,\ i=1,\dots,n$ *αντιστοίχως, τότε*

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big)^0 = \prod_{i=1}^{n} A_i^0.$$

Απόδειξη: Είναι $A_i^0 \subseteq A_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$, άρα $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i^0 \subseteq \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ και, επειδή το $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i^0$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ θα έχουμε

$$\prod_{i=1}^{n} A_i^0 \subseteq \big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big)^0 \tag{2.2}$$

Επειδή η p_j είναι ανοικτή απεικόνιση για κάθε $j \in \{1,\dots,n\}$ έχουμε

$$p_j\Big(\big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big)^0\Big) \subseteq \Big(p_j\big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big)\Big)^0 \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow$$

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big)^0 \subseteq p_j^{-1}\Big(p_j\Big(\big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big)^0\Big)\Big) \subseteq p_j^{-1}(A_j^0) \quad \forall j \in \{1,\dots,n\},$$

Επειδή η p_j είναι επί ισχύει $p_j^{-1}\Big(p_j\Big(\big(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\big)^0\Big)\Big) = \big(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\big)^0$, επομένως $\big(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\big)^0 \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{n} p_j^{-1}(A_j^0) = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i^0$, άρα

$$\big(\prod_{i=1}^{n} A_i\big)^0 \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i^0 \tag{2.3}$$

Από τις (2.2) και (2.3), έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$(\mathbb{I}^n)^0 = (\mathbb{I}^0)^n = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 < x_i < 1, i=1,\dots,n\big\}$$

και εξ αυτού

$$\mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n) = \overline{\mathbb{I}^n} \setminus (\mathbb{I}^n)^0 = \mathbb{I}^n \setminus (\mathbb{I}^n)^0 = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{I}^n \big/ (\exists\, i \in \{1,\dots,n\}); x_i(1-x_i) = 0\big\}.$$

2.3 Ομοιομορφισμοί

Η έννοια του ομοιομορφισμού είναι για την τοπολογία αντίστοιχη της έννοιας του ισομορφισμού της άλγεβρας. Δύο ομάδες, όταν είναι ισόμορφες, έχουν την ίδια αλγεβρική δομή, κατά συνέπεια μπορούμε να τις θεωρούμε ταυτόσημες. Έτσι, για παράδειγμα δύο κυκλικές ομάδες της ίδιας τάξης είναι ισόμορφες, άρα θεωρούμε ότι ταυτίζονται. Κατ' αναλογία δύο τοπολογικοί χώροι, οι οποίοι είναι ομοιόμορφοι έχουν την ίδια τοπολογική δομή, άρα είναι ταυτόσημοι. Ποια είναι τα κριτήρια για να έχουν δύο χώροι την ίδια τοπολογική δομή θα το δούμε στον αμέσως επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3.1. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Η f ονομάζεται **ομοιομορφισμός**, αν και μόνον, αν ισχύουν τα εξής

α΄) Η f είναι συνεχής.

β΄) Η f είναι 1-1.

γ΄) Η f είναι επί και

δ΄) Η f^{-1} είναι συνεχής.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής δύο προτάσεις

Πρόταση 2.3.1. *Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός, τότε και η απεικόνιση $f^{-1} : Y \to X$ είναι ομοιομορφισμός.*

Πρόταση 2.3.2. *Αν X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι και οι απεικόνισεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι ομοιομορφισμοί, τότε και η απεικόνιση $g \circ f : X \to Z$ είναι ομοιομορφισμός.*

Ορισμός 2.3.2. Οι τοπολογικοί χώροι X και Y ονομάζονται **ομοιόμορφοι**, αν και μόνον, αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \to Y$. Συμβολίζουμε με $X \cong Y$ το ότι ο τοπολογικός χώρος X είναι ομοιόμορφος με τον τοπολογικό χώρο Y.

Πρόταση 2.3.3. *Η σχέση $\cong$ στην κλάση των τοπολογικών χώρων είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

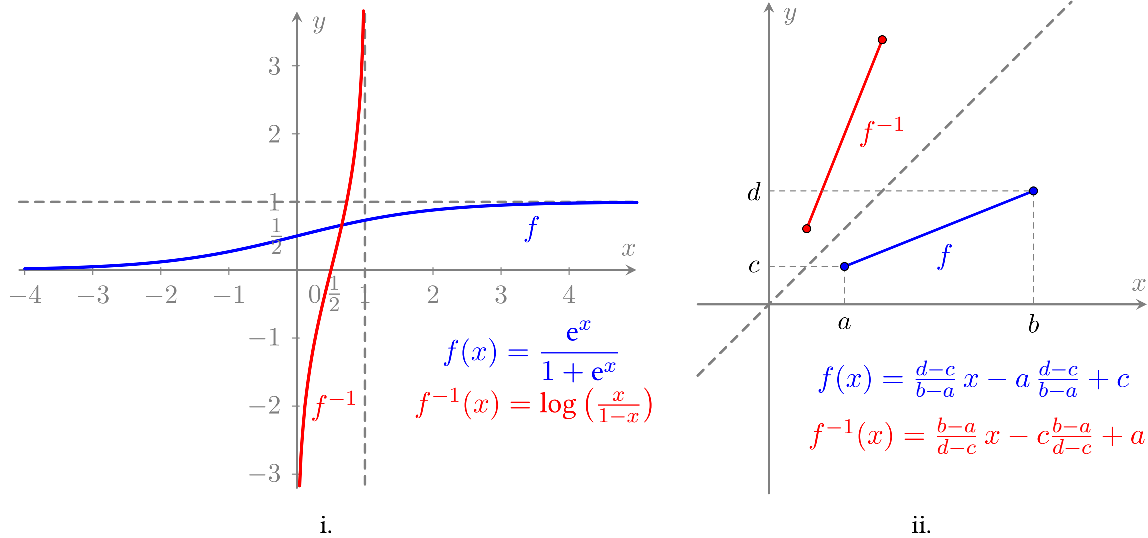
Απόδειξη: Έστω X τοπολογικός χώρος. Η ταυτοτική απεικόνιση $i_X : X \to X$ είναι προφανώς ομοιομορφισμός, άρα $X \cong X$. Συνεπώς η σχέση $\cong$ είναι ανακλαστική.
Έστωσαν τοπολογικοί χώροι X, Y, με $X \cong Y$. Άρα υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \to Y$. Τότε και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 2.3.1), άρα $Y \cong X$. Συνεπώς η σχέση $\cong$ είναι συμμετρική.
Έστωσαν τοπολογικοί χώροι X, Y, Z, με $X \cong Y$ και $Y \cong Z$. Άρα υπάρχουν ομοιομορφισμοί $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Από την πρόταση 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η $g \circ f : X \to Z$ είναι ομοιομορφισμός, άρα $X \cong Z$. Συνεπώς η σχέση $\cong$ είναι μεταβατική.
Άρα η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Η κατάταξη των τοπολογικών χώρων σε κλάσεις ομοιομορφίας, το οποίο ονομάζεται "πρόβλημα της ταξινόμησης" των τοπολογικών χώρων είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα της τοπολογίας. Με δεδομένο το ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος για την ταξινόμηση των τοπολογικών χώρων, εκείνο που μας απομένει είναι η κατά περίπτωση εξέταση, για το αν δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιόμορφοι ή όχι, με την περίπτωση της απόδειξης της μη ομοιομορφίας να είναι, όπως γίνεται πάντα στα μαθηματικά, εξαιρετικά πιο δύσκολη.

Παραδείγματα 2.3.1. Σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν το $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ και τα υποσύνολα του είναι εφοδιασμένα με την Ευκλείδεια τοπολογία.

[0]Οι επιστήμονες της μαθηματικής λογικής έδειξαν ότι δεν υπάρχει αλγοριθμος που επιλύει το πρόβλημα της ταξινόμησης των τοπολογικών πολλαπλοτήτων διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του τέσσερα. Συνεπώς, επειδή οι πολλαπλότητες αυτές είναι μια ειδική περίπτωση τοπολογικών χώρων, κατά μείζονα λόγο δεν υπάρχει αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα της ταξινόμησης των τοπολογικών χώρων.

1. Οι χώροι $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφοι (σχήμα 2.2.i).
Με απλά επιχειρήματα στοιχειωδών μαθηματικών αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (0,1)$, με $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ είναι συνεχής, 1-1 και επί. Επιπλέον, η $f^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$, με $f^{-1}(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ είναι επίσης συνεχής, άρα η f είναι ομοιομορφισμός. (σχήμα 2.2-i).



Σχήμα 2.2

2. Έστω ότι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, με $a < b$ και $c < d$. Τότε τα διαστήματα (a,b) και (c,d) είναι χώροι ομοιόμορφοι (σχήμα 2.2.ii).
Επίσης με απλά επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $f : (a,b) \to (c,d)$, με $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}x - a\dfrac{d-c}{b-a} + c$ είναι συνεχής, 1-1, επί και η αντίστροφή της $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, με $f^{-1}(x) = \dfrac{b-a}{d-c}x - c\dfrac{b-a}{d-c} + a$ είναι επίσης συνεχής.

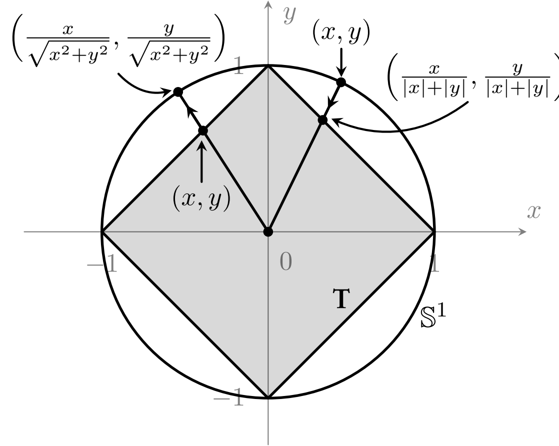
3. Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε το $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφο με το διάστημα (a, ∞).
Επίσης, με απλά επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (a,\infty)$, με $f(x) = a + e^x$ είναι συνεχής, 1-1, επί και η αντίστροφή της $f^{-1} : (a,\infty) \to \mathbb{R}$, με $f^{-1}(x) = \log(x-a)$ είναι συνεχής.

4. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ο ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}$ με το διάστημα $(-\infty, a)$. Επομένως, επειδή η σχέση $\cong$ της ομοιομορφίας είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων, προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα ανοικτά και μη τετριμμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα μεταξύ τους και με το $\mathbb{R}$.

5. Ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ και το τετράγωνο

$$\mathbf{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1\}$$

είναι ομοιόμορφοι χώροι (σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbf{T}$, με $f(x,y) = (\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|})$. Η f είναι καλώς ορισμένη, γιατί $\left|\frac{x}{|x|+|y|}\right| + \left|\frac{y}{|x|+|y|}\right| = 1$. Η συνέχεια της απεικόνισης αυτής αποδεικνύεται με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς ως εξής:
Έστω ακολουθία $\mathbb{S}^1 \ni (x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, τότε $x_n \to x_0$ και $y_n \to y_0$, άρα $1 = x_n^2 + y_n^2 \to x_0^2 + y_0^2$, άρα $x_0^2 + y_0^2 = 1$, άρα $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$. Επιπλέον, $f(x_n, y_n) = \left(\frac{x_n}{|x_n|+|y_n|}, \frac{y_n}{|x_n|+|y_n|}\right) \to \left(\frac{x_0}{|x_0|+|y_0|}, \frac{y_0}{|x_0|+|y_0|}\right) = f(x_0, y_0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$, άρα συνεχής στον $\mathbb{S}^1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1) &= f(x_2,y_2) && \Rightarrow \\
\frac{x_1}{|x_1|+|y_1|} = \frac{x_2}{|x_2|+|y_2|} &\wedge \frac{y_1}{|x_1|+|y_1|} = \frac{y_2}{|x_2|+|y_2|} && \Rightarrow \\
\frac{x_1^2}{(|x_1|+|y_1|)^2} = \frac{x_2^2}{(|x_2|+|y_2|)^2} &\wedge \frac{y_1^2}{(|x_1|+|y_1|)^2} = \frac{y_2^2}{(|x_2|+|y_2|)^2} && \Rightarrow \\
\frac{x_1^2+y_1^2}{(|x_1|+|y_1|)^2} &= \frac{x_2^2+y_2^2}{(|x_2|+|y_2|)^2} && \Rightarrow \\
\frac{1}{(|x_1|+|y_1|)^2} &= \frac{1}{(|x_2|+|y_2|)^2} && \Rightarrow \\
|x_1|+|y_1| &= |x_2|+|y_2| \,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\
&\Rightarrow \quad (x_1,y_1) = (x_2,y_2),
\end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1.
Επίσης, αν, $(x,y) \in \mathbf{T}$, τότε

$$\left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in \mathbb{S}^1 \quad \text{και} \quad f\left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (x, y),$$

άρα η f είναι επί.
Η συνέχεια της $f^{-1} : \mathbf{T} \to \mathbb{S}^1$, με $f^{-1}(x,y) = \left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ αποδεικνύεται όπως η συνέχεια της f. Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός, άρα $\mathbb{S}^1 \cong \mathbf{T}$. □

6. Ο ανοικτός n-δίσκος $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$ είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, με $f(x) = \dfrac{x}{1-\|x\|}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{B}^n$ και x_n ακολουθία στοιχείων της $\mathbb{B}^n$, ώστε $x_n \to x_0$. Τότε $\frac{x_n}{1-\|x_n\|} \to \frac{x_0}{1-\|x_0\|}$, άρα $f(x_n) \to f(x_0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής. Επίσης:

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \\
\frac{x_1}{1-\|x_1\|} = \frac{x_2}{1-\|x_2\|} \quad &\Rightarrow \\
\left\|\frac{x_1}{1-\|x_1\|}\right\| = \left\|\frac{x_2}{1-\|x_2\|}\right\| \quad &\Rightarrow \\
\frac{\|x_1\|}{1-\|x_1\|} = \frac{\|x_2\|}{1-\|x_2\|} \quad &\Rightarrow \\
\|x_1\| = \|x_2\|\,,
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_1}{1-\|x_1\|} = \frac{x_2}{1-\|x_2\|} \\
&\Rightarrow \quad x_1 = x_2,
\end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1.
Έστω $y \in \mathbb{R}^n$, τότε $\frac{y}{1+\|y\|} \in \mathbb{B}^n$ και $f\left(\frac{y}{1+\|y\|}\right) = y$, άρα η f είναι επί.
Η $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$, με $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής, με τον τρόπο που αποδείχθηκε η συνέχεια της f, άρα η f είναι ομοιομορφισμός, επομένως $\mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$. □

7. Το πάνω ημισφαίριο $\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / x_{n+1} \geq 0\}$ της $\mathbb{S}^n$ είναι ομοιόμορφο με τον κλειστό δίσκο $\mathbb{D}^n$.

Απόδειξη: Η απεικόνιση $p_+ : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{D}^n$, με

$$p_+(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

είναι συνεχής, 1-1 και επί, με αντίστροφη την $p_+^{-1} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n_+$, με

$$p_+^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=\Big(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\Big),$$

η οποία είναι συνεχής, άρα η p_+ είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς $\mathbb{S}^n_+\cong\mathbb{D}^n$. □

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\mathbb{S}^n_-\cong\mathbb{D}^n$, όπου $\mathbb{S}^n_-=\big\{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{S}^n/x_{n+1}\leq 0\big\}$. Παρατηρήστε ότι το σύνορο $\mathbb{S}^{n-1}$ της $\mathbb{D}^n$ είναι εικόνα, μέσω του ομοιομορφισμού p_+^{-1} του ισημερινού της $\mathbb{S}^n$, ο οποίος είναι το σύνολο

$$S=\{(x_1,\ldots,x_n,0)/x_1^2+\cdots x_n^2=1\}.$$

8. **Στερεογραφική προβολή** ονομάζεται η απεικόνιση $\mathbf{p}:\mathbb{S}^n\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n$, με

$$\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=\big(\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}},\ldots,\tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\big),$$

όπου N ο βόρειος πόλος της σφαίρας, δηλαδή το σημείο της $(0,\ldots,0,1)$ (σχήμα 2.4). Εύκολα, με εφαρμογή του θεωρήματος μεταφοράς, αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{p}$ είναι συνεχής. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_{n+1})=\mathbf{p}(y_1,\ldots,y_{n+1}) &&\Rightarrow\\
\frac{x_i}{1-x_{n+1}}=\frac{y_i}{1-y_{n+1}}\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\} &&\Rightarrow\\
\frac{x_i^2}{(1-x_{n+1})^2}=\frac{y_i^2}{(1-y_{n+1})^2}=k_i\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\} &&\Rightarrow\\
x_i^2=k_i(1-x_{n+1})^2\ \wedge\ y_i^2=k_i(1-y_{n+1})^2\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\} &&\Rightarrow\\
\sum_{i=1}^{n}x_i^2=(1-x_{n+1})^2\sum_{i=1}^{n}k_i\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}y_i^2=(1-y_{n+1})^2\sum_{i=1}^{n}k_i &&\Rightarrow\\
1-x_{n+1}^2=k(1-x_{n+1})^2\ \wedge\ 1-y_{n+1}^2=k(1-y_{n+1})^2 &&\Rightarrow\\
1+x_{n+1}=k(1-x_{n+1})\ \wedge\ 1+y_{n+1}=k(1-y_{n+1}) &&\Rightarrow\\
x_{n+1}=y_{n+1}=\frac{k-1}{k+1}\,,
\end{aligned}$$

όπου $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$. Επομένως

$$\begin{aligned}
&x_i=y_i\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\}\ \wedge\ x_{n+1}=y_{n+1}\\
&\Rightarrow (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς η $\mathbf{p}$ είναι 1-1.
Αν $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, τότε

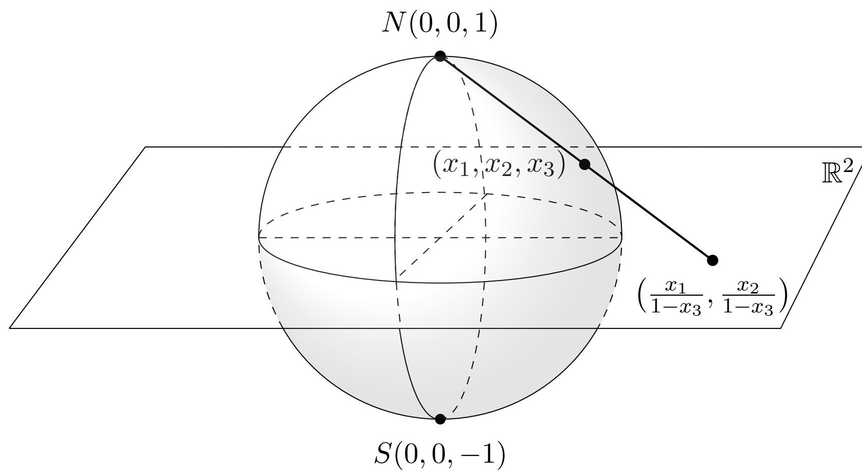
$$\left(\frac{2y_1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \frac{-1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}\right) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

και $\mathbf{p}\left(\frac{2y_1}{1+\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1+\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right) = (y_1, \ldots, y_n)$, άρα η $\mathbf{p}$ είναι επί.
Η αντίστροφη της $\mathbf{p}$ είναι η $\mathbf{p}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, με

$$\mathbf{p}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \frac{-1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}\right),$$

η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής. Άρα η $\mathbf{p}$ είναι ομοιομορφισμός, επομένως

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n.$$



Σχήμα 2.4. Στερεογραφική προβολή του $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ στον $\mathbb{R}^2$.

Από τη γεωμετρία είναι γνωστό ότι, αν $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, με $x \neq y$, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $f(x) = y$. [1] Επομένως $\mathbb{S}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{S}^n \setminus \{y\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{S}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Στα επόμενα, όταν θέλουμε να δείξουμε τον χώρο που προκύπτει από την $\mathbb{S}^n$, με εξαίρεση ένα οποιοδήποτε σημείο της x, θα γράφουμε $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$. Αν $f : \mathbb{S}^n \setminus \{x\} \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ είναι ένας ομοιομορφισμός, τότε τον ομοιομορφισμό $\mathbf{p} \circ f : \mathbb{S}^n \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^n$, τον ονομάζουμε επίσης στερεογραφική προβολή.

[1] Για την απόδειξη του ισχυρισμού βλέπε 7.7.17.

9. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με $f(x)=(Ax^t+b^t)^t$, όπου $A=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}\in GL(\mathbb{R},n)$ και $b\in\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **αφινικός ή ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός** και είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη: Έστω $x=(x_1,\ldots,x_n)$ και $y=(y_1,\ldots,y_n)$. Είναι

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \|Ax^t-Ay^t\| \\ &= \Big\|\Big(\sum_{i=1}^n a_{1i}(x_i-y_i),\ldots,\sum_{i=1}^n a_{ni}(x_i-y_i)\Big)\Big\| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n a_{ji}(x_i-y_i)\big)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n a_{ji}^2(x_i-y_i)^2\big)}\,.\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $M=\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\leq \sqrt{M}\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2} \\ &= \sqrt{M}\|x-y\|.\end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής. Επιπλέον

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) \quad &\Rightarrow \quad (Ax^t+b^t)^t=(Ay^t+b^t)^t \\ &\Rightarrow \quad Ax^t=Ay^t \\ &\Rightarrow \quad A^{-1}(Ax^t)=A^{-1}(Ay^t) \\ &\Rightarrow \quad x^t=y^t \\ &\Rightarrow \quad x=y\,,\end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1.
Αν $y\in\mathbb{R}^n$, τότε $\big[A^{-1}\big(y^t-b^t\big)\big]^t\in\mathbb{R}^n$ και $f\Big(\big[A^{-1}\big(y^t-b^t\big)\big]^t\Big)=y$, άρα η f είναι επί.
Η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, με $f^{-1}(x)=\big(A^{-1}(x^t-b^t)\big)^t$, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής, όπως αποδείχθηκε η συνέχεια της f. Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός. □

Μία ειδική περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στον $\mathbb{R}^n$ είναι οι λεγόμενες **Ευκλείδειες ισομετρίες**. Είναι γνωστό από την γραμμική άλγεβρα το ότι Ευκλείδεια ισομετρία είναι κάθε απεικόνιση $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, με $h(x)=\big(Ax^t+b^t\big)^t$, όπου A ένας ορθογώνιος $n\times n$ πίνακας ($A\in O(\mathbb{R},n)$), δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος, με $A^{-1}=A^t$).

10. Αν και δώσαμε εννέα παραδείγματα ομοιομορφισμών, δεν δώσαμε ούτε ένα παράδειγμα μη ομοιόμορφων χώρων. Αυτό έγινε, γιατί μας λείπουν προς το παρόν εκείνα τα εργαλεία, με τη βοήθεια των οποίων αποφαινόμαστε ότι δύο χώροι δεν είναι ομοιόμορφοι. Παρόλα αυτά θα επιχειρήσουμε με κάποιον μη τοπολογικό τρόπο να αποδείξουμε κάτι που στα επόμενα θα προκύπτει από ένα απλό επιχείρημα συνεκτικότητας. Θα δείξουμε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφοι. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ένας ομοιομορφισμός. Η απεικόνιση $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f_a(x) = f(a, x)$ είναι προφανώς συνεχής και μη σταθερή. Από τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι το $f_a(\mathbb{R})$ είναι ένα μη τετριμμένο διάστημα. Έχουμε,

$$\begin{aligned} & f_a(\mathbb{R}) \cap f_b(\mathbb{R}) \neq \varnothing && \Rightarrow \\ (\exists\, r \in \mathbb{R}) \quad & r \in f_a(\mathbb{R}) \cap f_b(\mathbb{R}) && \Rightarrow \\ (\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \quad & r = f_a(x_1) = f_b(x_2) && \Rightarrow \\ & f(a, x_1) = f(b, x_2) && \Rightarrow \\ & a = b\,, \end{aligned}$$

άρα, αν $a \neq b$, τότε $f_a(\mathbb{R}) \cap f_b(\mathbb{R}) = \varnothing$. Συνεπώς η οικογένεια $f_a(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$ είναι μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια ξένων μεταξύ τους μη τετριμμένων διαστημάτων, άτοπο.[2]

Πρόταση 2.3.4. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

α΄) Η f είναι ομοιομορφισμός.

β΄) Η f είναι συνεχής και ανοικτή.

γ΄) Η f είναι συνεχής και κλειστή.

δ΄) Αν $A \subseteq X$, τότε $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Το ότι η f είναι συνεχής είναι προφανές. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής το $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, άρα η f είναι συνεχής και ανοικτή.

β') $\Rightarrow$ γ'): Έστω ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το $f(X \setminus A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Επειδή η f είναι 1-1 και επί έχουμε $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A) = Y \setminus f(A)$, άρα το $Y \setminus f(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, επομένως το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα η f είναι συνεχής και κλειστή.

γ') $\Rightarrow$ δ'): Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \tag{2.4}$$

[2] Είναι γνωστό από την ανάλυση ότι κάθε οικογένεια ξένων μεταξύ τους μη τετριμμένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη.

(πρόταση 2.1.4).
Επιπλέον, επειδή η f είναι κλειστή έχουμε

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \tag{2.5}$$

(πρόταση 2.2.3).
Από τις (13.8) και (2.5) έχουμε $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

δ') $\Rightarrow$ α'): Επειδή για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, η f είναι συνεχής. Επειδή για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ η f είναι κλειστή, συνεπώς, αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Αλλά $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$, άρα η f^{-1} είναι συνεχής. Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός. □

Πρόταση 2.3.5. *Έστωσαν X Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί απεικόνιση, τότε οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f είναι ομοιομορφισμός.

β΄) Αν $A \subseteq X$, τότε $f(A^0) = \big(f(A)\big)^0$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής και ανοικτή. Επειδή η f είναι ανοικτή από την πρόταση 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι

$$f(A^0) \subseteq \big(f(A)\big)^0. \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού έχουμε:
Αν $y \in \big(f(A)\big)^0$, τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του Y, ώστε $y \in U \subseteq f(A)$. Άρα $f^{-1}(y) \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ και το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, γιατί η f είναι συνεχής. Άρα $f^{-1}(y) \in A^0$, άρα $y \in f(A^0)$, επομένως

$$\big(f(A)\big)^0 \subseteq f(A^0). \tag{2.7}$$

Από τις (2.6) και (2.7) έχουμε ότι

$$f(A^0) = \big(f(A)\big)^0.$$

β') $\Rightarrow$ α'): Έχουμε ότι $f(A^0) \subseteq \big(f(A)\big)^0$, άρα (πρόταση 2.2.2) η f είναι ανοικτή. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y. Αν $f^{-1}(U) = V$, τότε το $f(V) = U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, άρα $\big(f(V)\big)^0 = f(V)$, άρα $f(V^0) = f(V)$, άρα $V = V^0$, άρα το $V = f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως η f είναι συνεχής. □

Πρόταση 2.3.6. *Έστωσαν X, Y ομοιόμορφοι τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και A υπόχωρος του X. Αν g και h οι περιορισμοί της f στα σύνολα A και $X \setminus A$ αντιστοίχως, τότε οι απεικονίσεις $g : A \to g(A)$ και $h : X \setminus A \to h(X \setminus A)$ είναι ομοιομορφισμοί.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 2.3.7. *Αν X, Y ομοιόμορφοι χώροι και ο X είναι 1ος αριθμήσιμος, τότε ο Y είναι 1ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: Έστω $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x. Άμεση συνέπεια της πρότασης 2.3.4 είναι το ότι το $\mathcal{B}'_{f(x)} = \{f(A)/A \in \mathcal{B}\}$ είναι μια βάση περιοχών του $f(x)$. Για την απεικόνιση $F : \mathcal{B}_x \to \mathcal{B}'_{f(x)}$, με $F(A) = f(A)$ έχουμε

$$\begin{aligned} F(A) = F(B) &\Rightarrow f(A) = f(B) \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B)) \\ &\Rightarrow A = B, \end{aligned}$$

άρα είναι 1-1.
Έστω $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$, τότε

$$\begin{aligned} B &= f(f^{-1}(B)) \\ &= F(f^{-1}(B)) \wedge f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_x, \end{aligned}$$

άρα είναι F επί.
Συνεπώς $\aleph_0 \geq |\mathcal{B}_x| = |F(\mathcal{B}_x)| = |\mathcal{B}'_{f(x)}|$, δηλαδή ο Y είναι 1ος αριθμήσιμος. □

Πρόταση 2.3.8. *Αν X, Y ομοιόμορφοι χώροι και ο X είναι 2ος αριθμήσιμος, τότε ο Y είναι 2ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: Όμοια με την απόδειξη της αμέσως προηγούμενης πρότασης. □

Ορισμός 2.3.3. Μια ιδιότητα ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται **τοπολογική ιδιότητα ή τοπολογικό αναλλοίωτο**, αν και μόνον , αν την έχουν όλοι οι ομοιόμορφοι με τον X χώροι.

Παράδειγμα 2.3.1. Με τα έως τώρα δεδομένα η 1η και η 2η αριθμησιμότητα, όπως φαίνεται από τις προτάσεις 2.3.7 και 2.3.8 είναι τοπολογικά αναλλοίωτα.

Πρόταση 2.3.9. *Αν X, Y είναι ομοιόμορφοι χώροι και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$X \ni x_n \to x \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(x).$$

Απόδειξη: Έστω U μια περιοχή του $f(x)$. Τότε η $f^{-1}(U)$ είναι μια περιοχή του x και επειδή $x_n \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \in f^{-1}(U)$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f(x_n) \in f(f^{-1}(U)) = U$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $f(x_n) \to f(x)$. □

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του ομοιομορφισμού.

Πρόταση 2.3.10. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{H}_X$ των ομοιομορφισμών του X στον εαυτό του είναι ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας αυτής είναι η ταυτοτική απεικόνιση (i_X) και το συμμετρικό του ομοιομορφισμού $f : X \to X$ είναι η απεικόνιση f^{-1}.*

Ορισμός 2.3.4. Η απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται **εμφύτευση** του X στον Y, αν και μόνον, αν η $g : X \to f(X)$, με $g(x) = f(x)$ είναι ομοιομορφισμός.

Παραδείγματα 2.3.2.

1. Μια συνηθισμένη περίπτωση εμφύτευσης είναι η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ ενός μη κενού υποσύνολο A του τοπολογικού χώρου X στον X.

2. Αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m < n$, τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, με $f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ είναι μια εμφύτευση. Για αυτόν τον λόγο, επειδή $\mathbb{R}^m \cong f(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$, μπορούμε να "βλέπουμε" τον $\mathbb{R}^m$, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως έχουμε

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n \subset \cdots$$

Αν $n < m$, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $\mathbb{R}^m$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον τοπολογικό χώρο

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n,$$

ο οποίος έχει την ασθενή τοπολογία που εισάγει η ακολουθία $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα ισχύει και με τις σφαίρες $\mathbb{S}^n, n \in \mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε τον τοπολογικό χώρο

$$\mathbb{S}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^n,$$

ο οποίος έχει την ασθενή τοπολογία που εισάγει η ακολουθία $\mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Είναι η τοπολογία μία γεωμετρία;

Μετά το τέλος της απόλυτης κυριαρχίας της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της εμφάνισης των εναλλακτικών γεωμετριών (υπερβολική- ελλειπτική - προβολική), προέκυψε η φυσική απαίτηση της σύγκρισης των διαφόρων γεωμετριών μεταξύ τους. Ο Γερμανός μαθηματικός Felix Klein (1849-1925) είχε την ιδιοφυή έμπνευση να δώσει έναν ενοποιητικό ορισμό της γεωμετρίας, έτσι ώστε να μπορεί με φυσικό τρόπο να γίνει σύγκριση και ταξινόμηση των γεωμετριών. Το 1872 σε μία ομιλία του στο πανεπιστήμιο του Erlangen εγκαινίασε ένα πρόγραμμα ταξινόμησης των γεωμετριών, το οποίο έκτοτε επικράτησε να λέγεται Erlangen program. Σύμφωνα με τον Klein:

i. Σε κάθε μη κενό σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε μία γεωμετρία, αρκεί να επισυνάψουμε στο X μία υποομάδα G της συμμετρικής ομάδας του S_X του X. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των 1-1 και επί απεικονίσεων $f : X \to X$ με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων είναι ομάδα και ονομάζεται συμμετρική ομάδα του X. Το ζεύγος (X, G) ονομάζουμε **γεωμετρία** στο X. Το X ονομάζεται **υποκείμενος χώρος** της γεωμετρίας και η ομάδα G **ομάδα μετασχηματισμών** της γεωμετρίας.

ii. **Σχήμα** της γεωμετρίας (X, G) ονομάζεται κάθε υποσύνολο A του X. Δύο σχήματα C_1, C_2 της γεωμετρίας (X, G) λέγονται ίσα , αν και μόνον, αν υπάρχει μετασχηματισμός $f \in G$, ώστε $f(C_1) = C_2$ ή $C_2 = f^{-1}(C_1)$.

iii. Μία ιδιότητα ενός σχήματος C ονομάζεται **αναλλοίωτο** της γεωμετρίας (X, G), αν και μόνον, αν την έχουν και όλα τα ίσα με το C, σχήματα της γεωμετρίας.

iv. Δύο γεωμετρίες (X_1, G_1) και (X_2, G_2) λέγονται **ισόμορφες γεωμετρίες** ή μοντέλα της ίδιας γεωμετρίας, αν και μόνον, αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : X_1 \to X_2$, ώστε για κάθε $h \in G_1$ να ισχύει $f \circ h \circ f^{-1} \in G_2$ και για κάθε $\phi \in G_2$ να ισχύει $f^{-1} \circ \phi \circ f \in G_1$.

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\
{\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f\circ h\circ f^{-1}} \\
X_1 & \xleftarrow[f^{-1}]{} & X_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
X_2 & \xrightarrow{f^{-1}} & X_1 \\
{\scriptstyle \phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^{-1}\circ\phi\circ f} \\
X_2 & \xleftarrow[f]{} & X_1
\end{array}
$$

Μετά τους ορισμούς του Klein ας έλθουμε στο θέμα μας: Αν X ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{H}_X$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X στον εαυτό του (βλ. πρόταση 2.3.10), η οποία είναι προφανώς υποομάδα της S_X, τότε το ζεύγος $(X, \mathcal{H}_X)$ είναι μία γεωμετρία κατά Klein.

Θα μας βοηθήσει πολύ να κατανοήσουμε την τοπολογία, μία σύγκριση της Ευκλείδειας γεωμετρίας στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$), με την γεωμετρία που ορίζει η Ευκλείδεια τοπολογία στον χώρο $\mathbb{R}^2$. Στην πρώτη περίπτωση η ομάδα G αποτελείται από τις λεγόμενες ισομετρίες. **Ισομετρία** είναι κάθε απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με την ιδιότητα:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Εύκολα αποδεικνύονται τα:

i. Οι ισομετρίες είναι 1-1 και επί απεικονίσεις.

ii. Το σύνολο G, με την πράξη της σύνθεσης των απεικονίσεων είναι υποομάδα της ομάδας $S_{\mathbb{R}^2}$.

Επομένως το ζεύγος $(\mathbb{R}^2, G)$ είναι μία γεωμετρία στο επίπεδο (Ευκλείδεια γεωμετρία). Ομοίως και το ζεύγος $(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2})$, δηλαδή η Ευκλείδεια τοπολογία στο επίπεδο είναι μία γεωμετρία. Η πρώτη γεωμετρία:

i. Διατηρεί τα μήκη.

ii. Διατηρεί τα μέτρα των γωνιών.

iii. Διατηρεί τις ευθείες. Τρία σημεία, διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία είναι συνευθειακά απεικονίζονται, μέσω της οποιασδήποτε ισομετρίας σε συνευθειακά σημεία.

iv. Διατηρεί τα σχήματα. Ένα τρίγωνο, μέσω μιας οποιασδήποτε ισομετρίας απεικονίζεται σε ίσο τρίγωνο. Ένα τετράπλευρο, μέσω μιας οποιασδήποτε ισομετρίας απεικονίζεται σε ίσο τετράπλευρο. Ένας κύκλος, μέσω μιας οποιασδήποτε ισομετρίας απεικονίζεται σε ίσο κύκλο. Μια έλλειψη, μέσω μιας οποιασδήποτε ισομετρίας απεικονίζεται σε ίση έλλειψη κ.ο.κ.

Ενώ η δεύτερη γεωμετρία:

i. Δεν διατηρεί τα μήκη. Για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα AB και CD του επιπέδου, υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ώστε $f(AB) = CD$.

ii. Δεν διατηρεί τα μέτρα των γωνιών. Για δύο οποιεσδήποτε γωνίες xOy και $x'O'y'$ του επιπέδου, υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ώστε $f(xOy) = x'O'y'$.

iii. Δεν διατηρεί τις ευθείες. Αν ε είναι μία ευθεία και p μια παραβολή στο επίπεδο, τότε, υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ώστε $f(\varepsilon) = p$.

iv. Δεν διατηρεί τα σχήματα. Τα οποιαδήποτε τρίγωνα, τα οποιαδήποτε παραλληλόγραμμα, οι οποιαδήποτε κύκλοι, οι οποιεσδήποτε ελλείψεις είναι ίσα σχήματα, γιατί είναι ομοιόμορφα. Είναι αυτό που ορισμένοι μαθηματικοί γλαφυρά λένε $\heartsuit = \circ$.

2.5 Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση της πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $(x,y) \xrightarrow{+} x+y$ είναι συνεχής.
   Απόδειξη: Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθία με $(x_n,y_n) \to (x,y)$. Τότε $x_n \to x$ και $y_n \to y$, άρα $(x_n,y_n) \xrightarrow{+} x_n+y_n \to x+y$, επομένως η + είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο (x,y), άρα είναι συνεχής.

2. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση του πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $(x,y) \xrightarrow{\cdot} x\cdot y$ είναι συνεχής.
   Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της άσκησης 1.

3. Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, με

$$f((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m)) = (x_1+y_1,\ldots,x_m+y_m)\,,$$
$$g((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m)) = (x_1y_1,\ldots,x_my_m)$$

   είναι συνεχείς.
   Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της άσκησης 1.

4. Αν X τοπολογικός χώρος, να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f : X \to X \times X$, με $f(x) = (x,x)$ είναι συνεχής.
   Απόδειξη: Έστω x_0 ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο του X και $U \times V$, μια περιοχή του $f(x_0) = (x_0,x_0)$. Τότε οι U, V είναι περιοχές του x_0 στον X, επομένως το $U \cap V$ είναι περιοχή του x_0. Επιπλέον, αν $x \in U \cap V$, τότε $f(x) = (x,x) \in U \times V$, άρα $f(U \cap V) \subseteq U \times V$, επομένως η f είναι συνεχής στο x_0, άρα είναι συνεχής.

5. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f : M(\mathbb{R},n) \to \mathbb{R}$, με $f(A) = \det(A)$ είναι συνεχής. Το $M(\mathbb{R},n)$ ταυτίζεται με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n^2}$.
   Απόδειξη: Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ η απεικόνιση $\det : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γιατί είναι η ταυτοτική. Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για n. Αν $A \in M(\mathbb{R},n+1)$, τότε $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}$, όπου A_{1i} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A, με την διαγραφή της πρώτης γραμμής και της i-στήλης. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, η απεικόνιση: $A_{1i} \mapsto \det(A_{1i})$ είναι συνεχής, άρα και η $A \mapsto \det(A)$ είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών απεικονίσεων.

6. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι. Αν για την απεικόνιση $f : X \to Y$ ισχύει $f(A') \subseteq (f(A))'$ για κάθε $A \subseteq X$, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;
   Απόδειξη: Έστω $A \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A \cup A' && \Rightarrow \\ f(\overline{A}) &= f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \subseteq f(A) \cup (f(A))' = \overline{f(A)} && \Rightarrow \\ f(\overline{A}) &\subseteq \overline{f(A)}\,, \end{aligned}$$

   άρα η f είναι συνεχής (πρόταση 2.1.4).

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Αντιπαράδειγμα: Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=c$ είναι συνεχής. Έχουμε $f(\mathbb{R}')=f(\mathbb{R})=\{c\}$ και $(f(\mathbb{R}))'=\{c\}'=\varnothing$.

7. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $X_1,\ldots,X_n$ κλειστά υποσύνολα του X τέτοια ώστε $X=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Αν $f_i : X_i \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις τέτοιες, ώστε $f_i/X_i\cap X_j = f_j/X_i\cap X_j$ για κάθε $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f : X\to Y$ τέτοια, ώστε $f/X_i = f_i$ για κάθε $i=1,\ldots,n$.
   Απόδειξη: Για την ύπαρξη της f: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : X \to Y$, ώστε $f(x) = f_i(x) \Leftrightarrow x\in X_i$. Η f είναι καλώς ορισμένη, γιατί, αν $x\in X_i\cap X_j$, τότε $f_i(x)=f_j(x)$ και, προφανώς $f/X_i=f_i$. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε $f^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F\cap X_i)$. Κάθε ένα από τα $f_i^{-1}(F\cap X_i)$, λόγω της συνέχειας των f_i, είναι κλειστό υποσύνολο του X_i. Επιπλέον τα X_i είναι κλειστά υποσύνολα του X, άρα το $f_i^{-1}(F\cap X_i)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Άρα το $f^{-1}(F)=\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F\cap X_i)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, επομένως η f είναι συνεχής.
   Για την μοναδικότητα της f: Έστω $f' : X\to Y$ μια απεικόνιση με τις ιδιότητες της f και $x\in X$. Τότε $x\in X_i$ για κάποιο $i\in\{1,\ldots,n\}$. Επομένως $f'(x)=f_i(x)=f(x)$, άρα $f'=f$.

8. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $X_i, i\in I$ οικογένεια ανοικτών υποσσυνόλων του X τέτοια ώστε $X=\bigcup_{i\in I} X_i$. Αν $f_i : X_i\to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις τέτοιες, ώστε $f_i/X_i\cap X_j = f_j/X_i\cap X_j$ για κάθε $i,j\in I$, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f : X\to Y$ τέτοια, ώστε $f/X_i=f_i$ για κάθε $i\in I$.

   Υπόδειξη: Η απόδειξη, όπως εκείνη της προηγούμενης άσκησης.

9. Αν η $f : X\to Y$ είναι συνεχής και 1-1 και ο X είναι διαχωρίσιμος, να δειχθεί ότι ο Y είναι διαχωρίσιμος.

   Απόδειξη: Έστω A ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του X, τότε το $f(A)$ είναι αριθμήσιμο, γιατί $|f(A)|=|A|$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του Y, ώστε $f(A)\cap U=\varnothing$, τότε $f^{-1}\big(f(A)\cap U\big)=\varnothing$, άρα $f^{-1}\big(f(A)\big)\cap f^{-1}\big(U\big)=\varnothing$, άρα $A\cap f^{-1}\big(U\big)=\varnothing$. Επειδή το $f^{-1}\big(U\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συμπεραίνουμε ότι το A δεν είναι πυκνό, άτοπο. Επομένως, για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Y ισχύει ότι $f(A)\cap U\neq\varnothing$, άρα το $f(A)$ είναι και πυκνό υποσύνολο του Y, συνεπώς ο Y είναι διαχωρίσιμος.

10. Αν J ένα ανοικτό διάστημα της πραγματικής ευθείας και $f : J\to f(J)$ μια συνεχής, 1-1 απεικόνιση, να δειχθεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός.
    Απόδειξη: Κατ' αρχάς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $J=(a,b)$, με $a<b$. Όπως γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό, επειδή η f είναι συνεχής και μη σταθερή, θα έχουμε $f\big((a,b)\big)=(c,d)$, όπου $c,d\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ και $c<d$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ας υποθέσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Για να δείξουμε ότι η f είναι ομοιομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ανοικτή απεικόνιση. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του (a,b) και $y\in f(U)$, τότε $x=f^{-1}(y)\in U$ και, επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του (a,b), υπάρχει ανοικτό διάστημα (k,l), ώστε $x\in(k,l)\subseteq U\subseteq(a,b)$, άρα $y=$

$f(x) \in (k', l') \subseteq f(U)$, όπου $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k' < \lim\limits_{x\to l^-} f(x) = l'$, άρα το $f(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (c, d) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

11. Αν $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων και το A είναι πυκνό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί ότι το $f(A)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

    Απόδειξη: Είναι $\overline{f(A)} = f(\overline{A}) = f(X) = Y$.

12. Αν $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων και το A είναι αραιό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί ότι το $f(A)$ είναι αραιό υποσύνολο του Y.

    Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned}\left(\overline{f(A)}\right)^0 &= \left(f(\overline{A})\right)^0\\ &= f\big((\overline{A})^0\big)\\ &= f(\varnothing)\\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

13. Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, με $x \neq y$, να αποδειχθεί ότι $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

    Υπόδειξη: Η $f : \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, με $f(a) = a - x + y$ είναι ομοιομορφισμός και $f(x) = y$.

14. Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2 \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (μεγέθυνση της τρύπας).

    Υπόδειξη: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} = \{(r, \vartheta)/r > 0, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$ και

    $B = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2 = \{(r, \vartheta)/r > 1, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$. Η απεικόνιση $f : A \to B$, με $f(r, \vartheta) = (r + 1, \vartheta)$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

15. Να δειχθεί ότι ο άπειρος κύλινδρος $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ είναι ομοιόμορφος με το τρυπημένο επίπεδο.

    Υπόδειξη:

$$\begin{aligned}C &\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\\ &\cong \mathbb{S}^1 \times (0, \infty)\\ &\cong \{re^{it}/r > 0 \wedge t \in [0, 2\pi)\}\\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

16. Να αποδειχθεί ότι, αν από το επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) αφαιρέσουμε n διακεκριμένα σημεία $a_1, \ldots, a_n$, παίρνουμε έναν χώρο, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με εκείνον που προκύπτει, αν αφαιρέσουμε μια διαφορετική n-αδα διακεκριμένων σημείων $b_1, \ldots, b_n$.

    Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι στα $a_i = (x_i, y_i)$ τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, γιατί, σε αντίθετη περίπτωση με μία ή περισσότερες κατακόρυφες μεταφορές, παίρνουμε έναν χώρο, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με τον αρχικό και προκύπτει από την αφαίρεση από το επίπεδο λιγότερων από n σημείων

με διαφορετικές μεταξύ τους τετμημένες. Μάλιστα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < \cdots < x_n$. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_i / i = 1, \ldots, n\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(i, 0)/i = 1, \ldots, n\}$. Προς τούτο αρχικά θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x_i) = y_i$ και ακολούθως τη συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $F(x, y) = (x, y - f(x))$. Για την F έχουμε

- $$\begin{aligned} F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) &\Rightarrow (x_1, y_1 - f(x_1)) = (x_2, y_2 - f(x_2)) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 - f(x_1) = y_2 - f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, f(x_1) = f(x_2) \wedge y_1 - f(x_1) = y_2 - f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)\,, \end{aligned}$$

  άρα η F είναι 1-1.
- $(a, b) = F(a, b + f(a))$, άρα η F είναι επί.
- Η $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $F^{-1}(x, y) = (x, y + f(x))$ είναι επίσης συνεχής. Επομένως η F είναι ομοιομορφισμός.

Θεωρούμε ομοιομορφισμό $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(x_i) = i$ [3] και ακολούθως τον ομοιομορφισμό $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $G(x, y) = (g(x), y)$.
Η $H = G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι επίσης ομοιομορφισμός. Έχουμε δε

$$\begin{aligned} H(x_i, y_i) &= G\big(F(x_i, y_i)\big) \\ &= G\big(x_i, y_i - f(x_i)\big) \\ &= G(x_i, 0) \\ &= \big(g(x_i), 0\big) = (i, 0)\,, \end{aligned}$$

άρα

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \cong H\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}\big) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), \ldots, (n, 0)\}.$$

Επομένως το αποτέλεσμα της δράσης του ομοιομορφισμού H είναι ένας χώρος, ο οποίος εξαρτάται μόνον από το πλήθος των αφαιρουμένων σημείων και όχι από τα ίδια τα σημεία.

17. Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
Απόδειξη: Επειδή $\mathbb{R} \cong (0, \infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $f(x, r) = rx$ και έχουμε:

[3] Η απόδειξη για το ότι υπάρχει τέτοιος ομοιομορφισμός αφήνεται ως άσκηση

- $$\begin{aligned} f(x_1, r_1) = f(x_2, r_2) &\Rightarrow r_1 x_1 = r_2 x_2 \\ &\Rightarrow \|r_1 x_1\| = \|r_2 x_2\| \\ &\Rightarrow r_1 \|x_1\| = r_2 \|x_2\| \\ &\Rightarrow r_1 = r_2. \end{aligned}$$

  Από τη σχέση $r_1 x_1 = r_2 x_2$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.
- Αν $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε $y = f\big(\frac{y}{\|y\|}, \|y\|\big)$ και $\big(\frac{y}{\|y\|}, \|y\|\big) \in \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty)$, άρα η f είναι επί.
- Με χρήση του θεωρήματος μεταφοράς, εύκολα αποδεικνύεται η συνέχεια της f.
- Είναι $f^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty)$, με $f^{-1}(x) = \big(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\big)$, η οποία, εύκολα αποδεικνύεται, με χρήση του θεωρήματος μεταφοράς ότι είναι συνεχής.

Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός, άρα $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty) \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

18. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιόμορφα με το $\mathbb{R}^2$:

    α΄) Το ανοικτό τετράγωνο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}$.
    β΄) Η ανοικτή λωρίδα $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1\}$.
    γ΄) Ο ανοικτός δίσκος $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$.
    δ΄) Το ανοικτό τεταρτημόριο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y > 0\}$.
    ε΄) Η ανοικτή γωνία $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y > 0\}$.
    ϛ΄) Το υπερβολικό επίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$.

19. Έστωσαν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, με $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ και το υπερβολικό επίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} / \Im z > 0\}$. Να δειχθεί ότι η $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, με

    $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

    (**μετασχηματισμός Moebius**) είναι ομοιομορφισμός.

20. Να αποδειχθεί ότι οι χώροι $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, με την διακριτή τοπολογία που επάγεται από το $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφοι.

    Απόδειξη: Οι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{N}$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, συνεπώς υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1 και επί. Η f είναι συνεχής, γιατί ο $\mathbb{Z}$ έχει την διακριτή τοπολογία. Η f^{-1} είναι συνεχής, γιατί ο $\mathbb{N}$ έχει τη διακριτή τοπολογία. Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός.

21. Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^* \cong \big(\mathbb{R} \times \{1\}\big) \sqcup \big(\mathbb{R} \times \{2\}\big)$.

    Απόδειξη: Έχουμε $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \sqcup (0, \infty)$. Επιπλέον, $(0, \infty) \cong \mathbb{R} \times \{1\}$, γιατί η $f : \mathbb{R} \times \{1\} \to (0, \infty)$, με $f(x, 1) = e^x$ είναι ομοιομορφισμός και $(-\infty, 0) \cong \mathbb{R} \times \{2\}$, γιατί η $g : \mathbb{R} \times \{2\} \to (\infty, 0)$, με $g(x, 2) = -e^x$ είναι επίσης ομοιομορφισμός.

22. Να δειχθεί ότι ο χώρος Hilbert είναι ομοιόμορφος με άπειρους υποχώρους του.

    Υπόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο ℓ_2^n του ℓ_2, ο οποίος περιέχει τις ακολουθίες του ℓ_2, οι οποίες έχουν τον n-οστό τους όρο 0.

    Η απεικόνιση $f : \ell_2 \to \ell_2^n$, με

    $$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0, x_n, \ldots)$$

    είναι ομοιομορφισμός.

23. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : [0, 1) \to \mathbb{S}^1$, με $f(x) = e^{2\pi i x}$ είναι συνεχής, 1-1 και επί, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

    Απόδειξη: Το ότι η f είναι συνεχής, 1-1 και επί, αποδεικνύεται σχετικά εύκολα. Μένει να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιομορφισμός. Στο κεφάλαιο 4 θα το αποδείξουμε με απλά επιχειρήματα συνεκτικότητας και στο κεφάλαιο 5 με απλά επιχειρήματα συμπάγειας. Τώρα, χωρίς τις γνώσεις της συνεκτικότητας και της συμπάγειας, θα αρκεστούμε να αποδείξουμε ότι η $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0, 1)$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $\mathbf{1} = (1, 0)$. Προς τούτο θεωρούμε στο $[0, 1)$ τις ακολουθίες t_n, με $t_n \to 0$ και s_n, με $s_n \to 1$. Για τις ακολουθίες $z_n = f(t_n)$ και $y_n = f(s_n)$ έχουμε $z_n \to \mathbf{1}$ και $y_n \to \mathbf{1}$. Αλλά $f^{-1}(z_n) = t_n \to 0$ και $f^{-1}(y_n) = s_n \to 1$, συνεπώς η f^{-1} είναι ασυνεχής στο σημείο $\mathbf{1}$, άρα η f δεν είναι ομοιομορφισμός.

24. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $f(t) = (t, t^2)$ είναι μια εμφύτευση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$.

    Απόδειξη: Το $f(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο $\{(t, t^2)/t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = x^2\}$, δηλαδή μια παραβολή. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$, με $g(t) = f(t)$, η οποία είναι 1-1, επί και συνεχής, με αντίστροφη την $g^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ και $g^{-1}(x, y) = x$, η οποία είναι επίσης συνεχής, άρα η f είναι εμφύτευση.

25. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $f(t) = (2t + 1, 5t - 3)$ είναι μια εμφύτευση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$.

26. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ είναι μια εμφύτευση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$.
    Απόδειξη: Θεωρούμε την $G : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$, με $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. Έστω $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, τότε

    $$\begin{aligned} g(t_1) = g(t_2) &\Rightarrow e^{t_1} \cos t_1 = e^{t_2} \cos t_2 \wedge e^{t_1} \sin t_1 = e^{t_2} \sin t_2 \\ &\Rightarrow e^{2t_1} \cos^2 t_1 = e^{2t_2} \cos^2 t_2 \wedge e^{2t_1} \sin^2 t_1 = e^{2t_2} \sin^2 t_2 \\ &\Rightarrow e^{2t_1} \big(\cos^2 t_1 + \sin^2 t_1 \big) = e^{2t_2} \big(\cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 \big) \\ &\Rightarrow e^{2t_1} = e^{2t_2} \\ &\Rightarrow t_1 = t_2, \end{aligned}$$

    άρα η g είναι 1-1.
    Έστω $t \in \mathbb{R}$ και t_n ακολουθία, με $t_n \to t$, τότε $e^{t_n} \cos t_n \to e^t \cos t \wedge e^{t_n} \sin t_n \to$

$e^t \sin t$, άρα $(e^{t_n}\cos t_n, e^{t_n}\sin t_n) \to (e^t\cos t, e^t \sin t)$, άρα $g(t_n) \to g(t)$ άρα η g είναι συνεχής.
Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι η

$$g^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \text{ με } g^{-1}(e^t\cos t, e^t\sin t) = t$$

είναι συνεχής. Έστω $(e^t\cos t, e^t\sin t) \in f(\mathbb{R})$ και η ακολουθία $(e^{t_n}\cos t_n, e^{t_n}\sin t_n)$, ώστε $(e^{t_n}\cos t_n, e^{t_n}\sin t_n) \to (e^t\cos t, e^t\sin t)$, τότε

$$\begin{aligned} e^{t_n}\cos t_n \to e^t\cos t \wedge e^{t_n}\sin t_n \to e^t\sin t \Rightarrow\ & e^{2t_n}\cos^2 t_n \to e^{2t}\cos^2 t \\ & \wedge e^{2t_n}\sin^2 t_n \to e^{2t}\sin^2 t \\ & \Rightarrow e^{2t_n}\big(\cos^2 t_n + \sin^2 t_n\big) \\ & \to e^{2t}\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big) \\ & \Rightarrow e^{2t_n} \to e^{2t} \\ & \Rightarrow t_n \to t, \end{aligned}$$

άρα $g^{-1}(e^{t_n}\cos t_n, e^{t_n}\sin t_n) \to g^{-1}(e^t\cos t, e^t\sin t)$, άρα και η g^{-1} είναι συνεχής, επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

27. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : [0,1) \to \mathbb{C}$, με $f(t) = e^{2\pi i t}$ δεν είναι εμφύτευση του $[0,1)$ στο $\mathbb{C}$.

    Απόδειξη: Έχουμε ότι $f\big([0,1)\big) = \mathbb{S}^1$. Αν πάρουμε την $g : [0,1) \to \mathbb{S}^1$, με $g(x) = f(x)$, παρατηρούμε ότι η g^{-1} δεν είναι συνεχής (άσκηση 24), άρα η f δεν είναι εμφύτευση.

28. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να εμφυτευθεί στο $\mathbb{Z}$.

    Απόδειξη: Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ μια συνεχής και 1-1 απεικόνιση και $y \in f(\mathbb{Q})$. Επειδή το $f(\mathbb{Q})$ έχει τη διακριτή τοπολογία, το $\{y\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $f(\mathbb{Q})$, άρα το $\{x_0\} = f^{-1}(\{y_0\})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $\{x_0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, άτοπο.

29. Να δειχθεί ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των ανοικτών υποσυνόλων, καθώς και εκείνος των κλειστών υποσυνόλων ενός χώρου είναι τοπολογικά αναλλοίωτα.

30. Αν $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και p ένα οριακό σημείο του $A \subset X$, να δειχθεί ότι το $f(p)$ είναι οριακό σημείο του $f(A)$.

31. Να αποδειχθεί ότι ο οποιοσδήποτε ομοιομορφισμός $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$.
    Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $\mathbb{D}^n = \{\mathbf{0}\} \bigsqcup \{rx,\, r \in (0,1] \wedge x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$.
    Ακολούθως ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n, \text{ με } h(z) = \begin{cases} rf(x), & z = rx \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & z = \mathbf{0} \end{cases}.$$

Έχουμε

- Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε

$$\begin{aligned} h(z_1) = h(z_2) &\Rightarrow r_1 f(x_1) = r_2 f(x_2) \\ &\Rightarrow \|r_1 f(x_1)\| = \|r_2 f(x_2)\| \\ &\Rightarrow r_1 \|f(x_1)\| = r_2 \|f(x_2)\| \\ &\Rightarrow r_1 = r_2. \end{aligned}$$

  Επειδή $r_1 = r_2$ η σχέση $r_1 f(x_1) = r_2 f(x_2)$ συνεπάγεται την σχέση $f(x_1) = f(x_2)$ και , επειδή η f είναι 1-1 έχουμε $x_1 = x_2$, επομένως $z_1 = z_2$. Επιπλέον $h(z) \neq \mathbf{0}$, αν $z \neq \mathbf{0}$. Άρα η h είναι 1-1.

- Αν $z = \mathbf{0}$, τότε $z = h(\mathbf{0})$ και, αν $z = rx \neq \mathbf{0}$, τότε $z = h\big(rf^{-1}(x)\big)$, επομένως η h είναι επί.

- Θα αποδείξουμε ότι η h είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο $z = rx$, όπου $0 < r \leq 1$ και $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Θεωρούμε ακολουθία $z_n = r_n x_n$, με $0 < r_n \leq 1$ και $x_n \in \mathbb{S}^{n-1}$, ώστε $z_n \to z$, τότε

$$\begin{aligned} r_n x_n \to rx &\Rightarrow \|r_n x_n\| \to \|rx\| \\ &\Rightarrow r_n \|x_n\| \to r\|x\| \\ &\Rightarrow r_n \to r, \end{aligned}$$

  επομένως $\frac{1}{r_n} \to \frac{1}{r}$ και , επειδή $r_n x_n \to rx$ θα έχουμε $x_n \to x$ και, λόγω της συνέχειας της f, θα έχουμε $f(x_n) \to f(x)$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} z_n \to z &\Rightarrow r_n \to r \wedge x_n \to x \\ &\Rightarrow h(z_n) = r_n f(x_n) \to r f(x) = f(z), \end{aligned}$$

  άρα η h είναι συνεχής στο z.

- Θα αποδείξουμε τη συνέχεια της h στο $\mathbf{0}$. Θεωρούμε ακολουθία $z_n = r_n x_n$, με $0 < r_n \leq 1$ και $x_n \in \mathbb{S}^{n-1}$, ώστε $z_n \to \mathbf{0}$, τότε

$$\begin{aligned} r_n x_n \to \mathbf{0} &\Rightarrow \|r_n x_n\| \to \|\mathbf{0}\| \\ &\Rightarrow r_n \|x_n\| \to 0 \\ &\Rightarrow r_n \to 0 \\ &\Rightarrow r_n f(x_n) \to \mathbf{0} \\ &\Rightarrow h(z_n) \to h(\mathbf{0}), \end{aligned}$$

  επομένως η h είναι συνεχής και στο $\mathbf{0}$.
  Άρα η h είναι συνεχής.

- Η αντίστροφη της h είναι η

$$h^{-1} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n, \text{ με } h^{-1}(z) = \begin{cases} r f^{-1}(x), & z = rx \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & z = \mathbf{0} \end{cases},$$

η συνέχεια της οποίας αποδεικνύεται όπως ακριβώς η συνέχεια της h.

Άρα η $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ είναι ομοιομορφισμός, με $h/\mathbb{S}^{n-1} = f$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

3

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

3.1 Ο διαχωρισμός στους μετρικούς χώρους

Κάθε μετρικός χώρος έχει δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι ότι τα μονοσύνολα είναι κλειστά υποσύνολά του και η δεύτερη ότι τα κλειστά και ξένα υποσύνολά του διαχωρίζονται από ανοικτά και ξένα υποσύνολά του, δηλαδή αν A, B είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, τότε υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του χώρου, ώστε $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$.

Τα αξιώματα διαχωρισμού, η πραγμάτευση των οποίων θα ακολουθήσει την απόδειξη των προτάσεων που αφορούν τον διαχωρισμό στους μετρικούς χώρους αποτελούν ένα μέτρο της παθολογίας των τοπολογικών χώρων, δηλαδή της απόστασης τους από τους μετρικούς χώρους που είναι οι "καλύτεροι" και ικανοποιούν όλα τα αξιώματα διαχωρισμού.

Πρόταση 3.1.1. *Τα μονοσύνολα είναι κλειστά υποσύνολα των μετρικών χώρων.*

Απόδειξη: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x \in X$. Αν $y \in X$, με $x \neq y$, τότε $d(x, y) > 0$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$, ώστε $\varepsilon < d(x, y)$, τότε προφανώς $x \notin S(y, \varepsilon)$, άρα $S(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$, άρα το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Ορισμός 3.1.1. Έστωσαν (X, d) μετρικός χώρος $\varnothing \neq A \subseteq X$ και $x \in X$. Ονομάζουμε **απόσταση** του x από το A τον μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $\inf\{d(x, y)/y \in A\}$. Την απόσταση του x από το A συμβολίζουμε με $d(x, A)$.

Λήμμα 3.1.2. *Αν (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό κλειστό υποσύνολο του X, τότε*

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) = 0\,.$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$:

$$\begin{aligned} x\in A &\Rightarrow (\forall\,\varepsilon>0),\quad S(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing\\ &\Rightarrow (\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,y\in A); d(x,y)<\varepsilon\\ &\Rightarrow (\forall\,\varepsilon>0),\quad d(x,A)=\inf\{d(x,y)\,/\,y\in A\}\leq\varepsilon\\ &\Rightarrow d(x,A)=0\,. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$:

$$\begin{aligned} d(x,A)=0 &\Rightarrow \big(\varepsilon>0\Rightarrow \inf\{d(x,y)\,/\,y\in A\}<\varepsilon\big)\\ &\Rightarrow \big(\varepsilon>0\Rightarrow \exists\,y\in A; d(x,y)<\varepsilon\big)\\ &\Rightarrow \big(\varepsilon>0)\Rightarrow S(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing\big)\\ &\Rightarrow \big((U\in\mathfrak{T}_d\wedge x\in U)\ \Rightarrow\ U\cap A\neq\varnothing\big)\\ &\Rightarrow x\in\overline{A}=A\,. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.1.3. *Αν (X,d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε η απεικόνιση $d_A : X\to\mathbb{R}$, με*

$$d_A(x)=d(x,A)$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη: Αν $z\in X$, τότε $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$, άρα

$$\begin{aligned} \inf\{d(x,z)\,/\,z\in A\} &\leq \inf\{d(x,y)+d(y,z)\,/\,z\in A\}\\ &= d(x,y)+\inf\{d(y,z)\,/\,z\in A\}\\ &\Rightarrow d(x,A)\leq d(x,y)+d(y,A)\\ &\Rightarrow d_A(x)-d_A(y)\leq d(x,y)\,. \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $d_A(y)-d_A(x)\leq d(x,y)$. Επομένως για κάθε $x,y\in X$ ισχύει $|d_A(x)-d_A(y)|\leq d(x,y)$. Συνεπώς, αν $\varepsilon>0$, τότε

$$d(x,y)<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad |d_A(x)-d_A(y)|<\varepsilon.$$

Άρα η d_A είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο $y\in X$, επομένως η d_A είναι συνεχής.
□

Πρόταση 3.1.4. *Αν (X,d) μετρικός χώρος, A, B μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, τότε υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $A\subseteq U$ και $B\subseteq V$.*

Απόδειξη: Αν $d(x,A)=d(x,B)=0$, τότε από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B \quad \Rightarrow \quad A \cap B \neq \varnothing,$$

άτοπο. Άρα $(d_A(x), d_B(x)) \neq (0,0)$. Οι απεικονίσεις $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

και $g : X \to [0,\infty) \times [0,\infty) \setminus \{(0,0)\}$, με

$$g(x) = (d_A(x), d_B(x))$$

είναι συνεχείς. Συνεπώς η σύνθετη απεικόνιση $h = f \circ g : X \to \mathbb{R}$, με

$$h(x) = \frac{d_A(x) - d_B(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

είναι συνεχής. Επομένως τα σύνολα

$$U = \{x \in X / h(x) < 0\} = h^{-1}((-\infty, 0))$$

και

$$V = \{x \in X / h(x) > 0\} = h^{-1}((0, \infty))$$

είναι ανοικτά και προφανώς ξένα. Επιπλέον

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad d_A(x) = d(x,A) = 0 \\ &\Rightarrow \quad h(x) < 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in U, \end{aligned}$$

άρα $A \subseteq U$ και

$$\begin{aligned} x \in B \quad &\Rightarrow \quad d_B(x) = d(x,B) = 0 \\ &\Rightarrow \quad h(x) > 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in V, \end{aligned}$$

άρα $B \subseteq V$. Επομένως το ζητούμενο αποδείχθηκε.

□

Παρατήρηση: Επειδή τα μονοσύνολα στους μετρικούς χώρους είναι κλειστά σύνολα, ισχύουν γι'αυτά και οι εξής δύο συνθήκες διαχωρισμού:

1. Συνθήκη διαχωρισμού Hausdorff: Αν x, y και $x \neq y$, τότε υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x \in U$ και $y \in V$.

2. Συνθήκη κανονικότητας: Αν $x \in X$ και B μη κενό και κλειστό υποσύνολο του X, ώστε $x \notin B$, τότε υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x \in U$ και $B \subseteq X$.

Ένα βασικό ζητούμενο σε έναν τοπολογικό χώρο είναι το ποιες ιδιότητες διαχωρισμού ικανοποιεί. Όπως φαίνεται από τις προτάσεις 3.1.1 και 3.1.4 οι συνθήκες της κλειστότητας των μονοσυνόλων, καθώς και του διαχωρισμού των κλειστών και ξένων υποσυνόλων του χώρου από ανοικτά και ξένα υποσύνολα του χώρου, είναι αναγκαίες για να προέρχεται από μετρική η τοπολογία του χώρου.

3.2 Χώροι T_1

Ορισμός 3.2.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **χώρος** T_1 ή χώρος που ικανοποιεί την T_1 **συνθήκη διαχωρισμού**, αν και μόνον, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$ υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $y \notin U$.

Πρόταση 3.2.1. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο τοπολογικός χώρος X χώρος T_1 είναι κάθε μονοσύνολο να είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστω $x \in X$. Τότε, αν $y \in X \setminus \{x\}$, υπάρχει περιοχή U του y, ώστε $x \notin U$, άρα $U \subseteq X \setminus \{x\}$, άρα το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Το ικανό: Έστω $x, y \in X$, με $x \neq y$. Επειδή το $\{y\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, το $U = X \setminus \{y\}$ είναι περιοχή του x, με $y \notin U$. □

Παραδείγματα 3.2.1.

1. Οι μετρικοί χώροι είναι χώροι T_1.

2. Ένα μη κενό σύνολο X, εφοδιασμένο με τη συμπεπερασμένη ή τη συναριθμήσιμη τοπολογία είναι χώρος T_1, γιατί για κάθε $x \in X$ το $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, αφού το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

3. Ένα σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0 δεν είναι χώρος T_1, γιατί το $\{x_0\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του X, αφού το $X \setminus \{x_0\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

4. Ένα σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία με την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου x_0 δεν είναι χώρος T_1, γιατί αν $y \in X$ και $y \neq x_0$, το $\{y\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του X, αφού το $X \setminus \{y\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Πρόταση 3.2.2. *Έστωσαν X ένας T_1 χώρος, $A \subseteq X$, x_0 ένα οριακό σημείο του A και U μια περιοχή του x_0, τότε το $A \cap U$ είναι απειροσύνολο.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι για κάποια περιοχή U του x_0 ισχύει

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap U = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

τότε, επειδή τα μονοσύνολα είναι κλειστά, το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το $V = U \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι περιοχή του x_0 και $(A \setminus \{x_0\}) \cap V = \varnothing$, άτοπο. □

Πρόταση 3.2.3. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, τότε ο $X \times Y$ είναι χώρος T_1 με την καρτεσιανή τοπολογία, αν και μόνον, αν ο X και ο Y είναι χώροι T_1.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστωσαν $x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \neq x_2$, τότε, αν $y \in Y$ είναι $(x_1, y) \neq (x_2, y)$. Επειδή ο χώρος $X \times Y$ είναι T_1, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W του $X \times Y$, ώστε $(x_1, y) \notin W$ και $(x_2, y) \in W$. Έχουμε $y \in p_2(W)$, επειδή $(x_2, y) \in W$. Άρα από την $(x_1, y) \notin W$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 \notin p_1(W)$. Το $U = p_1(W)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $x_1 \notin U$ και $x_2 \in U$, επειδή $(x_2, y) \in W$, άρα ο χώρος X είναι T_1. Ομοίως αποδεικνύεται το ότι ο χώρος Y είναι T_1.

Το ικανό: Έστωσαν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, με $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$ ή $y_1 \neq y_2$. Έστω ότι ισχύει το πρώτο. Επομένως υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε $x_1 \notin U$ και $x_2 \in U$. Επομένως το $U \times Y$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$, με $(x_1, y_1) \notin U \times Y$ και $(x_2, y_2) \in U \times Y$, άρα ο χώρος $X \times Y$ είναι T_1. □

Παρατήρηση: Η πιο πάνω πρόταση γενικεύεται και για το καρτεσιανό γινόμενο n χώρων, με $n > 2$.

Πρόταση 3.2.4. *Η διαχωριστική ιδιότητα T_1 είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, με $X \cong Y$ και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος T_1. Αν $y_1, y_2 \in Y$, με $y_1 \neq y_2$, τότε

$$f^{-1}\big(y_1\big) = x_1 \neq x_2 = f^{-1}\big(y_2\big).$$

Επειδή ο X είναι χώρος T_1 υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε $x_1 \notin U$ και $x_2 \in U$. Τότε το $f(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, με $y_1 = f(x_1) \notin f(U)$ και $y_2 = f(x_2) \in f(U)$. Άρα ο Y είναι χώρος T_1. □

Τέλος, άμεση συνέπεια του ορισμού της τοπολογίας των υποχώρων και του ορισμού του χώρου T_1 είναι η πρόταση:

Πρόταση 3.2.5. *Αν Y είναι ένας υπόχωρος του τοπολογικού χώρου X, ο οποίος είναι χώρος T_1, τότε ο Y είναι T_1 χώρος. Δηλαδή η ιδιότητα T_1 "κληρονομείται" στους υπόχωρους ενός χώρου.*

3.3 Χώροι T_2 ή Hausdorff

Ορισμός 3.3.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **χώρος** T_2 ή **χώρος Hausdorff**, αν και μόνον, αν για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$ υπάρχουν περιοχές U, V των x, y, αντιστοίχως τέτοιες, ώστε $U \cap V = \varnothing$ ή απλά τα διαφορετικά σημεία του χώρου "διαχωρίζονται" με ανοικτά σύνολα. Κάποιες φορές λέμε ότι ο χώρος έχει τη διαχωριστική ιδιότητα T_2 ή αλλιώς τη διαχωριστική ιδιότητα Hausdorff.

Παραδείγματα 3.3.1.

1. Οι μετρικοί χώροι είναι χώροι Hausdorff.

2. Έστω X ένα απειροσύνολο εφοδιασμένο με την συμπεπερασμένη τοπολογία. Αν A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \cap B = \varnothing$, τότε $A^c \cup B^c = X$, άρα ένα τουλάχιστον από τα A^c ή B^c είναι απειροσύνολο, συνεπώς τα A, B δεν μπορεί να είναι συγχρόνως ανοικτά. Συνεπώς δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, άρα ο X δεν είναι Hausdorff.

3. Θεωρούμε το τοπολογικό γινόμενο $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$, όπου ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένος με την Ευκλείδεια τοπολογία και ο χώρος $\{0, 1\}$ με τη τετριμμένη τοπολογία. Ο χώρος αυτός ονομάζεται **η πραγματική ευθεία των διπλασίων σημείων**. Αν A, B

είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R} \times \{0,1\}$, ώστε $(3,0) \in A$ και $(3,1) \in B$, τότε, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του $\mathbb{R}$, ώστε $(3,0) \in A = U \times \{0,1\}$ και $(3,1) \in B = V \times \{0,1\}$. Αλλά $(3,0) \in A \cap B$, άρα $A \cap B \neq \varnothing$, άρα τα διαφορετικά σημεία $(3,0)$ και $(3,1)$ του X δεν διαχωρίζονται με ανοικτά υποσύνολα του X, επομένως ο X δεν είναι Hausdorff.

Είναι προφανής η ισχύς της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 3.3.1. *Αν ο χώρος X είναι Hausdorff, τότε είναι T_1.*

Παρατήρηση: Αν X είναι τοπολογικός χώρος με τη συμπεπερασμένη τοπολογία και $x, y \in X$, με $x \neq y$, τότε το $U = X \setminus \{y\}$ είναι μια περιοχή του x, με $y \notin U$. Άρα ο X είναι T_1. Αν, όμως το X είναι απειροσύνολο, ο X δεν είναι Hausdorff, όπως δείξαμε στο παράδειγμα που προηγήθηκε. Επομένως υπάρχουν χώροι T_1, οι οποίοι δεν είναι Hausdorff.

Πρόταση 3.3.2. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε οι επόμενες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Ο χώρος X είναι Hausdorff.

β΄) Για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$, υπάρχει περιοχή U του x, με $y \notin \overline{U}$.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$, τότε υπάρχουν περιοχές U, V των x, y, αντιστοίχως, με $U \cap V = \varnothing$. Αν $y \in \overline{U}$, τότε $V \cap U \neq \varnothing$, άτοπο. Συνεπώς $y \notin \overline{U}$.

β') ⇒ α'): Έστωσαν $x, y \in X$, όπως θέλει η υπόθεση, άρα $y \in X \setminus \overline{U} = V$ και το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Άρα το V είναι περιοχή του y και το U περιοχή του x, με $U \cap V = \varnothing$. Επομένως ο χώρος X είναι Hausdorff. □

Πρόταση 3.3.3. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε οι επόμενες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Ο χώρος X είναι Hausdorff.

*β΄) Το σύνολο $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ (**διαγώνιο σύνολο**) είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, όταν ο χώρος $X \times X$ είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία.*

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Θεωρούμε το σύνολο $B = (X \times X) \setminus \Delta$ και έστω $(x,y) \in B$. Τότε $x \neq y$, άρα υπάρχουν περιοχές U, V των x, y, αντιστοίχως, με $U \cap V = \varnothing$. Το $U \times V$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times X$. Αν $(a,b) \in U \times V$ και $(a,b) \notin B$, τότε $a = b$, άρα $a \in U \cap V$, άτοπο. Συνεπώς, αν $(a,b) \in U \times V$, τότε $(a,b) \in B$, δηλαδή $U \times V \subseteq B$, άρα το B είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times X$, συνεπώς το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

β') ⇒ α'): Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$, άρα $(x,y) \in B = (X \times X) \setminus \Delta$. Το B είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times X$, άρα υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X, ώστε $(x,y) \in U \times V \subseteq B$. Είναι $U \cap V = \varnothing$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, υπάρχει $a \in U \cap V$. Όμως, η σχέση $a \in U \cap V$, συνεπάγεται ότι $(a,a) \in U \times V$, άρα $(a,a) \in \Delta$, άρα $B \cap \Delta \neq \varnothing$, άτοπο. Επομένως το V είναι περιοχή του y και το U περιοχή του x, με $U \cap V = \varnothing$. Άρα ο χώρος X είναι Hausdorff. □

Πρόταση 3.3.4. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι. Αν ο Y είναι Hausdorff και η απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ συνεχείς, τότε το σύνολο*

$$C = \{x \in X / f(x) = g(x)\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: Έστω $x \in X \setminus C$, άρα $f(x) \neq g(x)$. Συνεπώς υπάρχουν ανοικτές περιοχές U, V των $f(x), g(x)$, αντιστοίχως, ώστε $U \cap V = \varnothing$. Τα σύνολα $A = f^{-1}(U)$ και $B = g^{-1}(V)$ είναι περιοχές του x, συνεπώς το $A \cap B$ είναι περιοχή του x. Αν $y \in A \cap B$, τότε $f(y) \in U$ και $g(y) \in V$. Επειδή $U \cap V = \varnothing$, έπεται ότι $f(y) \neq g(y)$, άρα $y \in X \setminus C$, δηλαδή $x \in A \cap B \subseteq X \setminus C$, άρα το $X \setminus C$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το C είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Πρόταση 3.3.5. *Έστωσαν* X, Y *τοπολογικοί χώροι. Αν ο χώρος* Y *είναι Hausdorff και* $f, g : X \to Y$ *συνεχείς απεικονίσεις, οι οποίες συμπίπτουν σε ένα πυκνό υποσύνολο* D *του* X, *τότε* $f = g$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x \in X$, με $f(x) \neq g(x)$. Συνεπώς, υπάρχουν περιοχές U, V των $f(x)$, $g(x)$, αντιστοίχως, ώστε $U \cap V = \varnothing$. Τα σύνολα $f^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ είναι περιοχές του x, άρα το $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ είναι ανοικτό και μη κενό υποσύνολο του X, συνεπώς $W \cap D \neq \varnothing$. Έστω $z \in W \cap D$, τότε $f(z) \in U$ και $g(z) \in V$. Επειδή $z \in D$ έχουμε $f(z) = g(z) = y$, άρα $y \in U \cap V$, άρα $U \cap V \neq \varnothing$, άτοπο □

Πρόταση 3.3.6. *Έστω* X *χώρος Hausdorff και ακολουθία* x_n *στοιχείων του με* $x_n \to a \in X$ *και* $x_n \to b \in X$, *τότε* $a = b$. *Δηλαδή κάθε ακολουθία σε έναν χώρο Hausdorff έχει το πολύ ένα όριο.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $a \neq b$. Επειδή ο χώρος X είναι Hausdorff, υπάρχουν περιοχές U, V των a, b, αντιστοίχως, ώστε $U \cap V = \varnothing$. Επειδή $a_n \to a$, υπάρχει φυσικός αριθμός n_1, ώστε $a_n \in U$, αν $n \geq n_1$. Ομοίως υπάρχει φυσικός αριθμός n_2, ώστε $a_n \in V$, αν $n \geq n_2$. Για $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ είναι $a_n \in U \cap V$, άρα $U \cap U \neq \varnothing$, άτοπο. □

Πρόταση 3.3.7. *Έστωσαν* X, Y *τοπολογικοί χώροι, τότε ο* $X \times Y$ *είναι χώρος Hausdorff με την καρτεσιανή τοπολογία, αν και μόνον, αν οι* X *και* Y *είναι χώροι Hausdorff.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστωσαν $x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \neq x_2$, τότε, αν $y \in Y$ είναι $(x_1, y) \neq (x_2, y)$. Επειδή ο χώρος $X \times Y$ είναι Hausdorff, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του $X \times Y$, ώστε $(x_1, y) \in U$ και $(x_2, y) \in V$. Τότε το $U' = p_1(U)$ και $V' = p_1(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, με $x_1 \in U'$ και $x_2 \in V'$. Αν $z \in U' \cap V'$, τότε $(z, y) \in U \cap V$, άτοπο, άρα $U' \cap V' = \varnothing$. Επομένως ο χώρος X είναι Hausdorff. Ομοίως αποδεικνύεται το ότι ο χώρος Y είναι Hausdorff.

Το ικανό: Έστωσαν (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$, με $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$ ή $y_1 \neq y_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο. Επομένως υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x_1 \in U$ και $x_2 \in V$. Συνεπώς τα $U \times Y$ και $V \times Y$ είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $X \times Y$, με $(x_1, y_1) \in U \times Y$ και $(x_2, y_2) \in U \times Y$, άρα ο χώρος $X \times Y$ είναι Hausdorff. □

Παρατήρηση: Η πιο πάνω πρόταση γενικεύεται και για το καρτεσιανό γινόμενο n χώρων, με $n > 2$.

Πρόταση 3.3.8. *Η διαχωριστική ιδιότητα Hausdorff είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, με $X \cong Y$ και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος Hausdorff. Αν $y_1, y_2 \in Y$, με $y_1 \neq y_2$, τότε $x_1 = f^{-1}\big(y_1\big) \neq f^{-1}\big(y_2\big) = x_2$. Επειδή ο X είναι χώρος Hausdorff, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x_1 \in U$ και $x_2 \in V$. Κατά συνέπεια τα $f(U)$, $f(V)$ είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του Y, με $y_1 = f(x_1) \in f(U)$ και $y_2 = f(x_2) \in f(U)$. Άρα ο Y είναι χώρος Hausdorff. □

Τέλος, άμεση συνέπεια του ορισμού της τοπολογίας των υποχώρων και του ορισμού του χώρου Hausdorff είναι η πρόταση:

Πρόταση 3.3.9. *Αν Y είναι ένας υπόχωρος του χώρου Hausdorff X, τότε ο Y είναι χώρος Hausdorff. Δηλαδή η διαχωριστική ιδιότητα Hausdorff "κληρονομείται" στους υπόχωρους του χώρου.*

3.4 T_3 και T_4 χώροι

Ορισμός 3.4.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **χώρος** T_3, αν και μόνον, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε μη κενό κλειστό υποσύνολο B του X, με $x \notin B$ υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U και V του X, ώστε $x \in U$ και $B \subseteq V$.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α′) Ο χώρος X είναι T_3.

β′) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε περιοχή V του x, υπάρχει περιοχή U του x, ώστε

$$U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

γ′) Αν $x \in X$ και F μη κενό και κλειστό υποσύνολο του X, με $x \notin F$, τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε

$$x \in U \quad \textit{και} \quad \overline{U} \cap F = \varnothing.$$

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Το σύνολο V^c είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, με $x \notin V^c$. Επειδή ο χώρος X είναι T_3, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, W του X, ώστε $x \in U$ και $V^c \subseteq W$. Άρα $x \in U$ και $W^c \subseteq V$. Επειδή $U \cap W = \varnothing$ έχουμε

$$U \subseteq W^c \quad \Rightarrow \quad \overline{U} \subseteq \overline{W^c} = W^c \subseteq V,$$

άρα το U είναι περιοχή του x, με $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

β') ⇒ γ'): Το $V = F^c$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, με $x \in V$. Άρα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, με $x \in U$ και $U \subseteq \overline{U} \subseteq V = F^c$. Όμως η σχέση $\overline{U} \subseteq F^c$, συνεπάγεται τη σχέση $F \cap \overline{U} = \varnothing$. Επομένως για το ανοικτό υποσύνολο U του X ισχύουν τα $x \in U$ και $\overline{U} \cap F = \varnothing$.

γ') $\Rightarrow$ α'): Έστω $x \in X$ και B κλειστό υποσύνολο του X, με $x \notin B$. Επομένως υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε $x \in U$ και $\overline{U} \cap B = \varnothing$, άρα $x \in U$ και $B \subseteq (\overline{U})^c$. Το $V = (\overline{U})^c$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $B \subseteq V$. Επιπλέον,

$$U \subseteq \overline{U} \Rightarrow (\overline{U})^c \subseteq U^c$$
$$\Rightarrow V \cap U = \varnothing,$$

άρα ο χώρος X είναι T_3. □

Λήμμα 3.4.2. *Αν A και B είναι υποσύνολα των τοπολογικών χώρων X και Y, αντιστοίχως, τότε $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $(x, y) \in \overline{A \times B}$ και U μια περιοχή του (x, y) στον $X \times Y$. Από τον ορισμό της καρτεσιανής τοπολογίας υπάρχουν περιοχές U_1 και U_2 των x και y, αντιστοίχως, ώστε $U_1 \times U_2 \subseteq A \times B$. Το $U_1 \times U_2$ είναι περιοχή του (x, y) και, επειδή $(x, y) \in \overline{A \times B}$ θα έχουμε $(U_1 \times U_2) \cap (A \times B) \neq \varnothing$, άρα $U_1 \cap A \neq \varnothing$ και $U_2 \cap B \neq \varnothing$, επομένως $x \in \overline{A}$ και $y \in \overline{B}$, άρα $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$, δηλαδή

$$\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B} \tag{3.1}$$

Αντιστρόφως, έστω $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ και U μια περιοχή του (x, y). Επομένως υπάρχουν περιοχές U_1 και U_2 των x και y, αντιστοίχως, ώστε $U_1 \times U_2 \subseteq U$. Έχουμε $x \in \overline{A}$, άρα $U_1 \cap A \neq \varnothing$. Ομοίως και $U_2 \cap B \neq \varnothing$, άρα $(U_1 \times U_2) \cap (A \times B) \neq \varnothing$, άρα $U \cap (A \times B) \neq \varnothing$, επομένως $(x, y) \in \overline{A \times B}$, δηλαδή

$$\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B} \tag{3.2}$$

Από τις (3.1) και (3.2) έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.4.3. *Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι, τότε ο $X \times Y$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι T_3, αν και μόνον, αν οι χώροι X και Y είναι T_3.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστω $x \in X$ και F μη κενό, κλειστό υποσύνολο του X, ώστε $x \notin F$. Τότε, αν $y \in Y$ θα είναι $(x, y) \in X \times Y$ και $(x, y) \notin F \times Y$. Το $F \times Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με $(x, y) \notin F \times Y$ και, επειδή ο χώρος $X \times Y$ είναι T_3, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του $X \times Y$, ώστε $(x, y) \in U$ και $F \times Y \subseteq V$. Τα $U' = p_1(U)$ και $V' = p_1(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Αν υπάρχει $x \in U' \cap V'$, τότε $(x, y) \in U$ και $(x, y) \in V$, άρα $U \cap V \neq \varnothing$, άτοπο. Επομένως τα U' και V' είναι ξένα με $x \in U'$ και $F \subseteq V'$, άρα ο χώρος X είναι T_3. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο χώρος Y είναι T_3.
Το ικανό: Έστω $(x, y) \in X \times Y$ και U μια περιοχή του (x, y). Τότε, υπάρχει περιοχή U_1 του x στον X και περιοχή U_2 του y στον Y, ώστε $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subseteq U$. Επειδή οι χώροι X και Y είναι T_3, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα V_1 και V_2 των X, Y, αντιστοίχως, ώστε $x \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq V_1$ και $y \in U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq V_2$. Άρα $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subseteq \overline{U_1} \times \overline{U_2} \subseteq V_1 \times V_2$. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $\overline{U_1} \times \overline{U_2} \subseteq \overline{U_1 \times U_2}$. Επιπλέον το $V_1 \times V_2$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$, άρα (πρόταση 3.4.1) ο χώρος $X \times Y$ είναι T_3. □

Παρατήρηση: Η πιο πάνω πρόταση γενικεύεται και για το καρτεσιανό γινόμενο n χώρων, με $n > 2$.

Πρόταση 3.4.4. *Η ιδιότητα T_3 είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της πρότασης 3.3.8. □

Πρόταση 3.4.5. *Αν Y είναι ένας υπόχωρος του T_3 χώρου X, τότε ο Y είναι χώρος T_3. Δηλαδή η διαχωριστική ιδιότητα T_3 "κληρονομείται" στους υπόχωρους του χώρου.*

Απόδειξη: Έστω $x \in Y$ και F κλειστό υποσύνολο του Y, με $x \notin F$. Τότε υπάρχει κλειστό υποσύνολο K του X, ώστε $F = Y \cap K$. Προφανώς $x \notin K$ και, επειδή ο X είναι χώρος T_3 υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X, ώστε $x \in U$, $K \subseteq V$ και $U \cap V = \varnothing$. Για τα $U' = U \cap Y$ και $V' = V \cap Y$ έχουμε ότι είναι ανοικτά υποσύνολα του Y, με $x \in U'$, $F = K \cap Y \subseteq U \cap Y = U'$ και $U' \cap V' = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \varnothing$, άρα ο Y είναι χώρος T_3. □

Παρατηρήσεις:

1. Έστω ο χώρος X με την τετριμμένη τοπολογία. Το μοναδικό μη κενό ανοικτό υποσύνολο V του X είναι το ίδιο το X. Αν $U = X$, τότε το U είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του X και για κάθε $x \in V$ ισχύει $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, άρα ο X είναι T_3 (πρόταση 3.4.1). Όμως, αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε δεν υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, με $x \in U$ και $y \in V$, γιατί το μοναδικό μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X. Άρα ο X δεν είναι T_2. Συνεπώς υπάρχουν χώροι, οι οποίοι είναι T_3 και δεν είναι T_2.

2. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{(a,b)/a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\} \cup \{\{x\}/x \in \mathbb{Q}\}$ είναι βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$ που είναι γνωστή με το όνομα τοπολογία της ρητής επέκτασης. Η τοπολογία αυτή είναι πλουσιότερη από την Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}$, επομένως το $\mathbb{R}$ με αυτήν την τοπολογία είναι χώρος T_2. Όμως στην τοπολογία αυτή το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και, επειδή το μοναδικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που το περιέχει είναι το $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U και V του χώρου, ώστε $1 \in U$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq V$. Άρα ο χώρος αυτός δεν είναι T_3. Συνεπώς υπάρχουν χώροι, οι οποίοι είναι T_2 και δεν είναι T_3.

Ορισμός 3.4.2. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **χώρος** T_4, αν και μόνον, αν για κάθε ζεύγος μη κενών κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B του X υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε

$$A \subseteq U \quad \text{και} \quad B \subseteq V.$$

Πρόταση 3.4.6. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Ο χώρος X είναι T_4.

β΄) Για κάθε κλειστό υποσύνολο A του X και για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X, με $A \subseteq U$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X, ώστε

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

γ') *Για κάθε ζεύγος μη κενών κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B του X, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X, ώστε*

$$A \subseteq V \text{ και } B \cap \overline{V} = \varnothing.$$

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Το σύνολο $B = U^c$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, με $B \cap U = \varnothing$, άρα $B \cap A = \varnothing$. Επειδή ο X είναι T_4, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα V, W του X, ώστε $A \subseteq V$ και $B \subseteq W$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} V \subseteq W^c \subseteq B^c \quad &\Rightarrow \quad \overline{V} \subseteq \overline{W^c} = W^c \subseteq B^c = U \\ &\Rightarrow \quad A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U\,. \end{aligned}$$

β') $\Rightarrow$ γ'): Το $B^c = U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $A \subseteq B^c = U$. Άρα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X, ώστε $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq B^c = U$. Συνεπώς το ζητούμενο σύνολο είναι το V, γιατί $A \subseteq B^c = U$ και $\overline{V} \subseteq B^c = U$, άρα $A \subseteq V \wedge B \cap \overline{V} = \varnothing$.

γ') $\Rightarrow$ α'): Έστωσαν A, B μη κενά κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Άρα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X, ώστε $A \subseteq V$ και $B \cap \overline{V} = \varnothing$, άρα $A \subseteq V$ και $B \subseteq \overline{V}^c$. Το $\overline{V}^c$ είναι ανοικτό. Επιπλέον $V \subseteq \overline{V}$, άρα $\overline{V}^c \subseteq V^c$, άρα $\overline{V}^c \cap V = \varnothing$, δηλαδή το $\overline{V}^c$ είναι και ξένο με το V, άρα ο χώρος είναι T_4. □

Παρατηρήσεις:

1. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με την τετριμμένη τοπολογία $\mathcal{T}$, δηλαδή $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$, τότε ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι, με τετριμμένο τρόπο T_4, αλλά δεν είναι T_2. Επομένως υπάρχουν T_4 χώροι, οι οποίοι δεν είναι T_2.

2. Θεωρούμε τα διαστήματα $U_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ και το σύνολο $\mathcal{T} = \{\varnothing, (0,1)\} \cup \{U_n / \, n = 2, 3, ...\}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $\mathcal{T}$ ορίζει μια τοπολογία στο διάστημα $(0,1)$. Τα κλειστά σύνολα του $(0,1)$, ως προς αυτή την τοπολογία είναι τα $\varnothing$, $(0,1)$, $[\frac{1}{2}, 1)$, $[\frac{2}{3}, 1)$, $[\frac{3}{4}, 1), \ldots, [1 - \frac{1}{n}, 1)$. Επομένως δεν υπάρχουν μη κενά και ξένα κλειστά υποσύνολα του $(0,1)$, άρα ο χώρος είναι T_4 με τετριμμένο τρόπο . Αν πάρουμε το κλειστό υποσύνολο $A = [\frac{1}{2}, 1)$ και το σημείο $\frac{1}{4}$ του χώρου και υποθέσουμε ότι U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του χώρου, ώστε $\frac{1}{4} \in U$ και $[\frac{1}{2}, 1) \subseteq V$, τότε, επειδή το $\frac{1}{8}$ ανήκει σε κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του χώρου, έχουμε ότι $U \cap V \neq \varnothing$, άρα ο χώρος δεν είναι T_3. Επομένως υπάρχουν T_4 χώροι, οι οποίοι δεν είναι T_3.

Πρόταση 3.4.7. *Ο χώρος $\mathbb{R}_r$ των δεξιά ημιανοικτών διαστημάτων είναι χώρος T_4.*

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο μη κενά κλειστά και ξένα υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}_r$. Αν $a \in A$, τότε υπάρχει $a' > a$, ώστε $[a, a') \cap B = \varnothing$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε $a \in \overline{B} = B$, άρα $A \cap B \neq \varnothing$, το οποίο αντίκειται στον τρόπο επιλογής των A και B. Επομένως για κάθε $a \in A$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_a \in \mathbb{R}_r$, ώστε $[a, x_a) \cap B = \varnothing$. Ομοίως για κάθε $b \in B$, μπορούμε να επιλέξουμε $y_b \in \mathbb{R}_r$, ώστε $[b, y_b) \cap A = \varnothing$. Τα $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$ και $V = \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}_r$, με $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$. Έστω ότι $a \in A$ και $b \in B$. Επειδή, $a \neq b$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < b$. Αν $[a, x_a) \cap [b, x_b) \neq \varnothing$, τότε πρέπει $B \ni b \in [a, x_a)$, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, $[a, x_a) \cap [b, x_b) = \varnothing$, άρα και $U \cap V = \varnothing$. Συνεπώς ο χώρος $\mathbb{R}_r$ είναι T_4. □

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο χώρος $\mathbb{R}_l$ των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων είναι χώρος T_4.

Παράδειγμα 3.4.1. Αποδείξαμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}_r$ είναι χώρος T_4. Αν πάρουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{S} = \mathbb{R}_r \times \mathbb{R}_r$ με την καρτεσιανή τοπολογία, δηλαδή το επίπεδο του Songrenfrey, τότε προκύπτει ένας χώρος T_3, ως καρτεσιανό γινόμενο δύο T_3 χώρων. Όπως θα δούμε στο έβδομο κεφάλαιο, ο χώρος Sorgenfrey δεν είναι χώρος T_4. Από το αντιπαράδειγμα αυτό, προκύπτει ότι ο χώρος $\mathbf{S} = \mathbb{R}_r \times \mathbb{R}_r$ είναι T_3, ως καρτεσιανό γινόμενο T_3 χώρων (πρόταση 3.4.3), αλλά όχι T_4 και ότι το καρτεσιανό γινόμενο δύο T_4 χώρων, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τους T_3, τους T_1 και τους χώρους Hausdorff, δεν είναι απαραίτητα T_4 χώρος.

Πρόταση 3.4.8. *Η ιδιότητα T_4 είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της πρότασης 3.3.8. □

Λήμμα 3.4.9. *Το σύνολο των αριθμών της μορφής $\frac{k}{2^n}$, όπου k περιττός φυσικός και $n \in \mathbb{N}$ (δυαδικά κλάσματα), είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(a-\delta, a+\delta)$, με $a \in [0,1]$ περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του D. Το ζητούμενο είναι προφανές, αν $\delta \geq 1$. Για αυτόν τον λόγο υποθέτουμε ότι $0 < \delta < 1$. Είναι $\frac{1}{2^n} \to 0$, άρα υπάρχει $p = 2^{n_0}$, με $0 < \frac{1}{p} < \delta$. Έχουμε

$$[0,1] = [0, \tfrac{1}{p}] \cup \ldots \cup [\tfrac{p-1}{p}, 1],$$

άρα υπάρχει περιττός $m \in \{1, \ldots, p-1\}$, με $\frac{m}{p} \leq a \leq \frac{m+1}{p}$, άρα

$$\frac{1}{p} < \delta \Rightarrow a - \delta \leq \frac{m}{p} \leq a < a + \delta$$
$$\Rightarrow \frac{m}{p} \in (a-\delta, a+\delta)$$

και, επειδή $\frac{m}{p} \in D$, το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Ακολουθεί μία σημαντική για την τοπολογία πρόταση, η οποία πέραν της χρησιμότητάς της στην απόδειξη του σημαντικού θεωρήματος μετρικοποίησης του Urysohn, αξίζει και για την εκπληκτικής επινοητικότητας απόδειξη της, η οποία δικαίως χαρακτηρίστηκε ως η πρώτη ιστορικά μη τετριμμένη απόδειξη της τοπολογίας.

Πρόταση 3.4.10. ***(Λήμμα Urysohn**[1]) Αν X είναι ένας T_4 χώρος και F, G δύο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του, τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, ώστε*

$$f(F) = \{0\} \text{ και } f(G) = \{1\}.$$

Απόδειξη: Το σύνολο G^c είναι ανοικτό με $F \subseteq G^c$. Άρα, επειδή ο χώρος X είναι T_4 υπάρχει ανοικτό υποσύνολο $U_{\frac{1}{2}}$, ώστε

[1]Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924): Ρώσος μαθηματικός

$$F \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq G^c.$$

Με την ίδια λογική, υπάρχουν ανοικτά $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$, ώστε

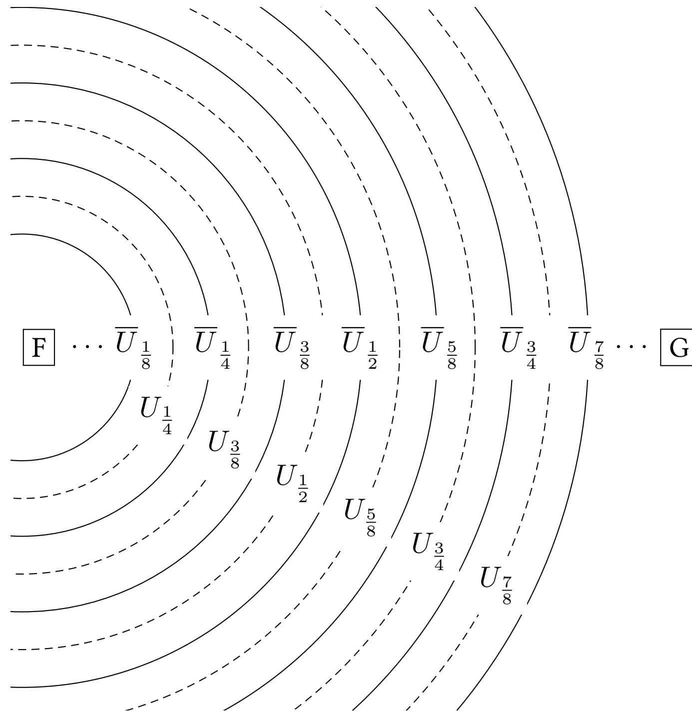
$$F \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq G^c.$$

Στο τρίτο βήμα διαπιστώνουμε την ύπαρξη ανοικτών $U_{\frac{1}{8}}$, $U_{\frac{3}{8}}$, $U_{\frac{5}{8}}$, $U_{\frac{7}{8}}$, ώστε

$$F \subseteq U_{\frac{1}{8}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{8}}} \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{3}{8}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{8}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq$$
$$U_{\frac{5}{8}} \subseteq \overline{U_{\frac{5}{8}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq U_{\frac{7}{8}} \subseteq \overline{U_{\frac{7}{8}}} \subseteq G^c\,,$$

κ.ο.κ. Αν D είναι το σύνολο των δυαδικών κλασμάτων του προηγουμένου λήμματος, τότε ορίζεται μια ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων U_t, $t \in D$ του X και μια αντίστοιχη ακολουθία $\overline{U_t}$, $t \in D$ κλειστών υποσυνόλων του X μεταξύ των F και G^c, ώστε για κάθε $t \in D$ να ισχύουν τα

- $F \subseteq U_t \subseteq G^c$.
- $F \subseteq \overline{U_t} \subseteq G^c$.
- $t < s \Rightarrow U_t \subseteq U_s$.
- $t < s \Rightarrow \overline{U_t} \subseteq U_s$.
- $\bigcup_{t \in D} U_t \subseteq G^c$.



Σχήμα 3.1

Ακολούθως ορίζουμε απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, την οποία εφεξής θα ονομάζουμε **απεικόνιση Urysohn**, ως εξής

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \notin \bigcup\limits_{t \in D} U_t \\ \inf\{t \in D \,/\, x \in U_t\}\,, & x \in \bigcup\limits_{t \in D} U_t \end{cases}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} x \in G \subseteq \Big(\bigcup_{t \in D} U_t\Big)^c \quad &\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{t \in D} U_t \\ &\Rightarrow \quad f(x) = 1 \\ &\Rightarrow \quad f(G) = \{1\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x \in F \quad &\Rightarrow \quad (\forall\, t \in D) \quad x \in U_t \\ &\Rightarrow \quad f(x) = \inf(D) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f(F) = \{0\}\,. \end{aligned}$$

Μένει να αποδείξουμε την συνέχεια της f. Για να γίνει αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφει σε ανοικτά υποσύνολα του X, τα υποβασικά σύνολα του [0,1]. Με δεδομένο το ότι το σύνολο $\{[0,b)/b \in (0,1)\} \cup \{(a,1]/a \in (0,1)\}$ είναι μία υποβάση του [0,1], αρκεί τα $f^{-1}\big([0,b)\big)$ και $f^{-1}\big((a,1]\big)$ να είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

- Για το πρώτο: Αν $x \in f^{-1}([0,b))$, με $0 < b \leq 1$, τότε $f(x) < b \leq 1$, άρα $f(x) < 1$, άρα $x \notin G$, άρα $x \in G^c \subseteq \bigcup\limits_{t \in D} U_t$, άρα υπάρχει $t \in D$, ώστε $x \in U_t$. Αν $A_x = \{t \in D \,/\, x \in U_t\}$, τότε $f(x) = \inf A_x$. Λόγω της πυκνότητας του D στο [0,1] υπάρχει $t_x \in D$, ώστε $f(x) < t_x < b$. Επιπλέον υπάρχει $t \in A_x$ τέτοιο, ώστε $t < t_x$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση $f(x) \geq t_x$, άτοπο. Συνεπώς, υπάρχει $t \in A_x$, ώστε $U_t \subseteq U_{t_x}$, άρα $x \in U_{t_x} \subseteq \bigcup\limits_{t \in [0,b) \cap D} U_t$, δηλαδή

$$f^{-1}([0,b)) \subseteq \bigcup_{t \in [0,b) \cap D} U_t. \tag{3.3}$$

Και, αν $x \in \bigcup\limits_{t \in [0,b) \cap D} U_t$, τότε υπάρχει $t < b$, με $x \in U_t$. Αν $f(x) \geq b$, τότε $t \geq b$, άτοπο. Συνεπώς $f(x) < b$, άρα $x \in f^{-1}([0,b))$, άρα

$$\bigcup_{t \in [0,b) \cap D} U_t \subseteq f^{-1}([0,b)). \tag{3.4}$$

Από τις (3.3) και (3.4) έχουμε:

$$\bigcup_{t \in [0,b) \cap D} U_t = f^{-1}([0,b)),$$

δηλαδή το $f^{-1}([0,b))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

- Για το δεύτερο: Αν $x \in f^{-1}((a,1])$, τότε $f(x) > a$. Συνεπώς, από την πυκνότητα του D στο [0,1] υπάρχουν $t, s \in D$, με $a < t < s < f(x)$. Είναι $x \notin U_s$ και, επειδή $\overline{U_t} \subseteq U_s$, έχουμε $x \notin \overline{U_t}$, άρα $x \in \overline{U_t}^{\,c}$, άρα $x \in \bigcup\limits_{t \in (a,1] \cap D} \overline{U_t}^{\,c}$, επομένως

$$f^{-1}((a,1]) \subseteq \bigcup_{(a,1] \cap D} \overline{U_t}^{\,c}. \tag{3.5}$$

Και, αν $x \in \bigcup\limits_{t \in (a,1] \cap D} \overline{U_t}^{\,c}$, τότε για κάποιο $t_x \in D$, με $a < t_x$, έχουμε $x \in \overline{U_{t_x}}^{\,c}$, άρα $x \notin \overline{U_{t_x}}$. Έστω $r \in D$, με $r < t_x$. Επειδή $U_r \subseteq \overline{U_{t_x}}$ είναι $x \notin U_r$. Συνεπώς για κάθε $r < t_x$ έχουμε $x \notin U_r$, άρα $f(x) = \inf\{r \in D / x \in U_r\} \geq t_x > a$, άρα $x \in f^{-1}((a,1])$, δηλαδή

$$\bigcup_{t \in (a,1] \cap D} \overline{U_t}^{\,c} \subseteq f^{-1}((a,1]). \tag{3.6}$$

Από τις (3.5) και (3.6) έχουμε

$$\bigcup_{t \in (a,1] \cap D} \overline{U_t}^{\,c} = f^{-1}((a,1]),$$

δηλαδή το $f^{-1}((a,1])$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επομένως το προς απόδειξη ζητούμενο αποδείχθηκε, άρα η f είναι συνεχής.

□

Παρατήρηση:

Στο λήμμα Urysohn το διάστημα $[0,1]$ μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε διάστημα ($[a,b]$), αρκεί να αντικαταστήσουμε την f με την $g = a + (b-a)f$.

3.5 Κανονικοί και φυσιολογικοί χώροι

Το σύνολο $X = \{a,b,c\}$ με την τοπολογία $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, X\}$ είναι ένα παράδειγμα ενός χώρου, ο οποίος είναι T_3, γιατί τα κλειστά και μη κενά υποσύνολα του, τα οποία δεν περιέχουν ένα οποιοδήποτε στοιχείο του είναι συγχρόνως και ανοικτά, αλλά δεν είναι T_1 χώρος, γιατί το μονοσύνολο $\{b\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του X. Ο ίδιος χώρος με την ίδια τοπολογία είναι και T_4, γιατί τα μοναδικά μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολά του είναι συγχρόνως και ανοικτά. Επομένως, υπάρχουν χώροι T_3, οι οποίοι δεν είναι T_1, καθώς και χώροι T_4, οι οποίοι δεν είναι T_1. Ως εκ τούτων έχουν νόημα οι ακόλουθοι δύο ορισμοί:

Ορισμός 3.5.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **κανονικός χώρος**, αν και μόνον, αν είναι συγχρόνως T_1 και T_3.

Ορισμός 3.5.2. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **φυσιολογικός χώρος**, αν και μόνον, αν είναι συγχρόνως T_1 και T_4.

Πρόταση 3.5.1. *Κάθε κανονικός χώρος είναι χώρος Hausdorff.*

Απόδειξη: Έστω X ένας κανονικός χώρος και $x, y \in X$, με $x \neq y$. Το $\{y\}$ είναι κλειστό και ξένα υποσύνολα του X, με $x \notin \{y\}$. Επομένως υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x \in U$ και $y \in V$, δηλαδή ο X είναι Hausdorff. □

Πρόταση 3.5.2. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, τότε ο $X \times Y$ είναι χώρος κανονικός με την καρτεσιανή τοπολογία, αν και μόνον, αν ο X και ο Y είναι χώροι κανονικοί.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια των προτάσεων 3.2.3 και 3.4.3 □

Πρόταση 3.5.3. *Η κανονικότητα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια των προτάσεων 3.2.4 και 3.4.4 □

Τέλος, άμεση συνέπεια του ορισμού της τοπολογίας των υποχώρων και του ορισμού του κανονικού χώρου είναι η πρόταση

Πρόταση 3.5.4. *Αν Y είναι ένας υπόχωρος του κανονικού τοπολογικού χώρου X, τότε ο Y είναι χώρος κανονικός. Δηλαδή η κανονικότητα "κληρονομείται" στους υπόχωρους ενός κανονικού χώρου.*

Πρόταση 3.5.5. *Η φυσιολογικότητα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια των προτάσεων 3.2.3 και 3.4.8 □

Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι η

Πρόταση 3.5.6. *Αν ένας χώρος είναι φυσιολογικός, τότε είναι κανονικός.*

Όπως φαίνεται στο παράδειγμα 3.4.1 το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Παρατηρήσεις:

1. Η φυσιολογικότητα δεν είναι εν γένει κληρονομούμενη ιδιότητα:
   Υπάρχει παράδειγμα φυσιολογικού χώρου, ο οποίος έχει μη φυσιολογικό υπόχωρο. Δεν παραθέτουμε εδώ το παράδειγμα αυτό, γιατί χρειάζονται από τη θεωρία συνόλων οι διατακτικοί αριθμοί, το οποίο θεωρούμε ότι ξεπερνά τους στόχους του παρόντος.

2. Αν, όμως ο X είναι φυσιολογικός χώρος και το A είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του X, τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο A είναι, ως υπόχωρος του X, φυσιολογικός.

3.6 Ασκήσεις

1. Αν X είναι T_1 τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $\mathcal{B}_x$ το σύνολο των περιοχών του x, να δειχθεί ότι $\bigcap_{U \in \mathcal{B}_x} U = \{x\}$.

2. Αν ο χώρος X είναι Hausdorff και η $f : X \to X$ συνεχής, να δειχθεί ότι το σύνολο $A = \{x \in X / x = f(x)\}$ των σταθερών σημείων της f είναι κλειστό υποσύνολο του X.

   Υπόδειξη: Εφαρμογή της πρότασης 3.3.5 για $Y = X$ και $g = i_X$.

3. Αν X φυσιολογικός χώρος και Y μη κενό και κλειστό υποσύνολο του X, να δειχθεί ότι ο υπόχωρος Y είναι φυσιολογικός.

4. Αποδείξτε την ισοδυναμία των επομένων δύο προτάσεων:

   α') Ο χώρος X είναι T_4.

   β') Για οποιοδήποτε ζεύγος U_1, U_2 ανοικτών και μη κενών υποσυνόλων του X, με $U_1 \cup U_2 = X$, υπάρχει ζεύγος κλειστών και μη κενών υποσυνόλων F_1, F_2 του X, ώστε $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ και $F_1 \cup F_2 = X$.

   Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Έχουμε

$$U_1 \cup U_2 = X \Rightarrow \big(U_1 \cup U_2\big)^c = \varnothing$$
$$\Rightarrow U_1^c \cap U_1^c = \varnothing\,.$$

   Θέτουμε $D_1 = U_1^c$ και $D_2 = U_2^c$. Τα D_1, D_2 είναι μη κενά, κλειστά και ξένα, άρα, επειδή ο χώρος είναι T_4, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα V_1, V_2 του X, ώστε $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $D_1 \subseteq V_1$ και $D_2 \subseteq V_2$. Έχουμε $(V_1 \cap V_2)^c = X$, άρα $V_1^c \cup V_2^c = X$.
   Τα $F_1 = V_1^c, F_2 = V_2^c$ είναι μη κενά, γιατί

$$F_1 = \varnothing \Rightarrow V_1^c = \varnothing$$
$$\Rightarrow V_1 = X$$
$$\Rightarrow \varnothing = V_1 \cap V_2 = V_2$$
$$\Rightarrow \varnothing = D_2 \subseteq V_2,$$

   άτοπο.
   Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $F_1 = \varnothing$. Επομένως

$$F_1 = V_1^c \Rightarrow F_1^c = V_1 \supseteq D_1$$
$$\Rightarrow F_1 \subseteq D_1^c = U_1$$

   και

$$F_2 = V_2^c \Rightarrow F_2^c = V_1 \supseteq D_2$$
$$\Rightarrow F_2 \subseteq D_2^c = U_2\,.$$

Επιπλέον $F_1 \cup F_2 = V_1^c \cup V_2^c = \big(V_1 \cap V_2\big)^c = X$. Επομένως τα F_1, F_2 είναι τα ζητούμενα σύνολα.

β') ⇒ α'): Έστω ότι τα F_1, F_2 είναι μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Τα $U_1 = F_1^c$, $U_2 = F_2^c$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε

$$\begin{aligned} U_1 \cup U_2 &= F_1^c \cup F_2^c \\ &= \big(F_1 \cap F_2\big)^c \\ &= X\,. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχουν μη κενά και κλειστά υποσύνολα K_1, K_2 του X, ώστε $K_1 \subseteq U_1$, $K_2 \subseteq U_2$ και $K_1 \cup K_2 = X$. Προφανώς τα K_1^c, K_2^c είναι μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, με $F_1 = U_1^c \subseteq K_1^c$ και $F_2 = U_2 \subseteq K_2^c$. Άρα ο X είναι χώρος T_4.

5. **Χώρος Niemytski** είναι ο χώρος $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ εφοδιασμένος με μία τοπολογία, της οποίας τα βασικά ανοικτά σύνολα είναι οι ανοικτές μπάλες $S(x,\varepsilon)$ που περιέχονται στο σύνολο $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ και οι ανοικτές μπάλες που εφάπτονται στην ευθεία $L = \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$ στο σημείο x_0, μαζί με το σημείο $(x_0,0)$, τις οποίες θα συμβολίζουμε με $T(x_0,\delta)$. Την τοπολογία Niemytski που περιγράψαμε θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}^*$, την δε τοπολογία που επάγεται στο χώρο X από την Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$, με $\mathcal{T}$.
Να δειχθεί ότι:

(α΄) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$.

(β΄) Η τοπολογία που επάγει η $\mathcal{T}^*$ στην ευθεία L είναι η διακριτή.

(γ΄) Ο χώρος Niemytski είναι χώρος Hausdorff.

(δ΄) Ο χώρος Niemytski είναι χώρος T_3.

Απόδειξη:

(α΄) Αν $U = S\big((x,y),\varepsilon\big)$ είναι ένα βασικό σύνολο της τοπολογίας $\mathcal{T}$, με $U \subseteq P$, τότε $U \in \mathcal{T}^*$. Συνεπώς $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$.

(β΄) Έχουμε $\{(x_0,0)\} = T(x_0,\varepsilon) \cap L$, άρα τα μονοσύνολα της ευθείας L είναι ανοικτά υποσύνολά της, επομένως η τοπολογία που επάγει η $\mathcal{T}^*$ στην ευθεία L είναι η διακριτή.

(γ΄) Έστω $a, b \in X$, με $a \neq b$.

- Αν $a, b \in P$, τότε, υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$, ώστε $a \in U$, $b \in V$ και $U \cap V = \varnothing$.

- Αν $a \in P$ και $b = (x_0,0) \in L$, τότε επιλέγουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, αρκούντως μικρά, ώστε $S(a,\varepsilon_1) \cap T(x_0,\varepsilon_2) = \varnothing$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $U = S(a,\varepsilon_1)$, $V = T(x_0,\varepsilon_2)$. Επιπλέον $U, V \in \mathcal{T}$, $a \in U$,$b \in V$ και $U \cap V = \varnothing$.

- Αν $a=(x,0)\in L$ και $b=(y,0)\in L$, τότε $T(x,\frac{|x-y|}{2})\cap T(y,\frac{|x-y|}{2})=\varnothing$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $U=T\big(x,\frac{|x-y|}{2}\big)$, $V=T\big(y,\frac{|x-y|}{2}\big)$. Επιπλέον $U,V\in\mathcal{T}$, $a\in U, b\in V$ και $U\cap V=\varnothing$.

Συνεπώς ο χώρος Niemytski είναι χώρος Hausdorff.

(δ΄) Έστω F κλειστό υποσύνολο του X και $x\notin F$.

- Αν $x\in P$, τότε, επειδή το F^c είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $x\in F^c$ υπάρχει $\varepsilon>0$, ώστε $S(x,\varepsilon)\subseteq F^c$, άρα $F\subseteq\big(S(x,\varepsilon)\big)^c$. Ο χώρος X είναι T_3, ως προς την $\mathcal{T}$-τοπολογία και το $W=\big(S(x,\varepsilon)\big)^c$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, ως προς την $\mathcal{T}$-τοπολογία, με $x\notin W$. Άρα υπάρχουν ξένα $U,V\in\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}^*$, ώστε $x\in U$ και $F\subseteq W\subseteq V$, επομένως στην περίπτωση αυτή το T_3 αξίωμα διαχωρισμού αληθεύει.

- Αν $x=(x,0)\in L$, τότε, επειδή $F^c\in\mathcal{T}^*$, υπάρχει $\varepsilon>0$, ώστε $T(x,\varepsilon)\subseteq F^c$. Θέτουμε $U=T\big(x,\frac{\varepsilon}{2}\big)\subseteq\overline{T\big(x,\frac{\varepsilon}{2}\big)}\subseteq T\big(x,\varepsilon)\big)\subseteq F^c$. Έχουμε $x\in U$, $F\subseteq\big(\overline{T\big(x,\frac{\varepsilon}{2}\big)}\big)^c$. Αν θέσουμε $\big(\overline{T\big(x,\frac{\varepsilon}{2}\big)}\big)^c=V$, τότε το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $x\in U$, $F\subseteq V$ και $U\cap V=\varnothing$, άρα και σ' αυτήν την περίπτωση το T_3 αξίωμα διαχωρισμού αληθεύει.

Επομένως ο χώρος Niemytski είναι χώρος T_3.

Στις ασκήσεις του 7ου κεφαλαίου θα αποδείξουμε ότι ο χώρος Niemytski δεν είναι χώρος T_4.

4 ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

4.1 Συνεκτικοί χώροι

Η συνεκτικότητα είναι μια πολύ σημαντική έννοια της τοπολογίας. Ουσιαστικά είναι "φυσική" έννοια, την οποία περιγράφουμε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Διαισθητικά συνεκτικοί είναι εκείνοι οι χώροι που αποτελούνται από "ένα κομμάτι". Για παράδειγμα, η ευθεία αποτελείται από ένα κομμάτι. Αν όμως από αυτή αφαιρέσουμε ένα σημείο, χάνεται η συνοχή της και τα κομμάτια του σχήματος που προκύπτει είναι πλέον δύο. Άλλο ένα παράδειγμα είναι αυτό του κύκλου, ο οποίος αποτελείται από ένα κομμάτι, το οποίο παραμένει ένα και με την αφαίρεση ενός σημείου, χάνεται όμως η συνοχή του, αν αφαιρεθούν περισσότερα από ένα σημεία, γιατί τότε τα κομμάτια γίνονται δύο ή και περισσότερα.

Ο επόμενος ορισμός δίνει με αυστηρό τρόπο αυτό που διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε, ως "ένα κομμάτι".

Ορισμός 4.1.1. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **συνεκτικός**, αν και μόνον, αν δεν υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $U \cup V = X$. Στην περίπτωση που, υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα του U, V, ώστε $U \cup V = X$, ο χώρος ονομάζεται **μη συνεκτικός** και το ζεύγος $\{U, V\}$ **διάσπαση** του X.

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι ο ορισμός της συνεκτικότητας μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής

Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται συνεκτικός, αν και μόνον, αν δεν υπάρχουν μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα F, G του X, ώστε $F \cup G = X$.

Ορισμός 4.1.2. Έστω X τοπολογικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Το ονομάζεται **συνεκτικό**, αν και μόνον, αν είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος, ως υπόχωρος του X, με την επαγόμενη από τον X στο A τοπολογία, ή αλλιώς δεν υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε

$$A \cap U \neq \varnothing,\ A \cap V \neq \varnothing \text{ και } A \subseteq U \cup V.$$

Παραδείγματα 4.1.1.

1. Το απειροσύνολο X με τη συμπεπερασμένη τοπολογία είναι συνεκτικός χώρος, γιατί δεν έχει μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο και U, V είναι δύο τέτοια υποσύνολα του X, τότε $U \cap V = \varnothing$, άρα $U^c \cup V^c = X$, άτοπο, γιατί τα U^c, V^c είναι και τα δύο πεπερασμένα.

2. Με ανάλογο επιχείρημα, αποδεικνύεται ότι αν, X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο με τη συναριθμήσιμη τοπολογία, τότε ο χώρος X είναι συνεκτικός.

3. Ο τοπολογικός χώρος X με την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου x_0 είναι συνεκτικός, γιατί η ένωση δύο οποιονδήποτε μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του είναι γνήσιο υποσύνολο του X, αφού δεν περιέχει το x_0.

4. Ο τοπολογικός χώρος X με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0 είναι συνεκτικός, γιατί τα οποιαδήποτε δύο μη κενά, ανοικτά υποσύνολά του δεν είναι ξένα, αφού έχουν κοινό σημείο το x_0.

5. Ο $\mathbb{R}_l$ είναι μη συνεκτικός χώρος, γιατί τα $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$ είναι ανοικτά και ξένα και $(-\infty, a) \cup [a, \infty) = \mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει και για τον $\mathbb{R}_r$.

6. Ο οποιοσδήποτε διακριτός χώρος X με περισσότερα από δύο στοιχεία είναι μη συνεκτικός, γιατί, αν $A \neq \varnothing, X$, τότε το A και το $X \setminus A$ είναι ανοικτά, μη κενά και ξένα.

7. Τα μονοσύνολα σε έναν οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο είναι προφανώς συνεκτικά υποσύνολα του.

8. Το $\mathbb{Q}$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$, γιατί $\mathbb{Q} \subseteq \big(-\infty, \sqrt{2}\,\big) \cup \big(\sqrt{2}, \infty\big)$, $\big(-\infty, \sqrt{2}\big) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ και $\big(\sqrt{2}, \infty\big) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

9. Το $\mathbb{A}$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$, γιατί
$$\mathbb{A} \subseteq \big(-\infty, 2\big) \cup \big(2, \infty\big),\ \big(-\infty, 2\big) \cap \mathbb{A} \neq \varnothing \text{ και } \big(2, \infty\big) \cap \mathbb{A} \neq \varnothing.$$

Μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της συνεκτικότητας ενός χώρου με έναν ισοδύναμο τρόπο:

Ορισμός 4.1.3. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται συνεκτικός, αν και μόνον, αν δεν υπάρχουν μη κενά υποσύνολα A, B του X, ώστε $A \cap \overline{B} = \varnothing$, $\overline{A} \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = X$.

Σχόλιο: Κατ' αρχάς να τονίσουμε ότι τα A και B στον πιο πάνω ορισμό είναι, προφανώς ξένα, γιατί $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cap \overline{B} = \varnothing$, άρα $A \cap B = \varnothing$. Πιο παραστατικά ο ορισμός αυτός σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαμέριση του X σε δύο σύνολα, τα οποία είναι "μακρυά" το ένα από το άλλο. Το "μακρυά" ερμηνεύεται πως κανένα από τα δύο ξένα υποσύνολα δεν περιέχει οριακά σημεία του άλλου. Στις ασκήσεις θα δούμε την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών.

Πρόταση 4.1.1. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X είναι συνεκτικός.

β΄) Τα μοναδικά υποσύνολα του X, τα οποία είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά είναι το $\varnothing$ και το X.

γ΄) Δεν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : X \to \{0,1\}$, αν ο χώρος $\{0,1\}$ είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το $A \neq \varnothing, X$ είναι ανοικτό και κλειστό, τότε τα A, $X \setminus A$ είναι μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, με $A \cup (X \setminus A) = X$, άτοπο.

β') $\Rightarrow$ γ'): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η $f : X \to \{0,1\}$ είναι συνεχής και επί. Επειδή το $\{0\}$ είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\{0,1\}$, το $A = f^{-1}(0)$ είναι μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του X, το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό, άτοπο, γιατί αντιφάσκει στην υπόθεση.

γ') $\Rightarrow$ α'): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο X είναι μη συνεκτικός, άρα υπάρχουν μη κενά και ανοικτά σύνολα A, $X \setminus A$. Τότε η απεικόνιση

$$\chi_A = \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

είναι επί. Επιπλέον, τα μοναδικά ανοικτά υποσύνολα του $\{0,1\}$ είναι τα $\varnothing$, $\{0,1\}$, $\{1\}$, $\{0\}$, τα οποία έχουν εικόνα μέσω της χ_A^{-1}, αντιστοίχως, τα $\varnothing$, X, A, $X \setminus A$, τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X, άρα η χ_A είναι και συνεχής, άτοπο, γιατί αντιφάσκει με την υπόθεση. □

Πρόταση 4.1.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος και A_i, $i \in I$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X, με $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, τότε το $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του X, άρα υπάρχει απεικόνιση $f : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ συνεχής και επί. Έστω $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, τότε ή $f(x_0) = 0$ ή $f(x_0) = 1$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει το πρώτο. Επειδή η f/A_i είναι συνεχής και το A_i συνεκτικό είναι $f(A_i) = \{0\}$ για κάθε $i \in I$, άρα

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \{0\},$$

άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι η f είναι επί. □

Πρόταση 4.1.3. *Έστω τοπολογικός χώρος X. Αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο $E_{x,y}$ του X, ώστε $x, y \in E_{x,y}$, τότε ο X είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστω $a \in X$. Τότε $X = \bigcup\limits_{x\in X} E_{a,x}$ και $a \in \bigcap\limits_{x\in X} E_{a,x}$, άρα $\bigcap\limits_{x\in X} E_{a,x} \neq \varnothing$. Συνεπώς, επειδή τα $E_{a,x}$ είναι συνεκτικά ο X είναι συνεκτικός (πρόταση 4.1.2). □

Πρόταση 4.1.4. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$, τότε το διάστημα $[a,b]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το διάστημα $[a,b]$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}$ με την επαγόμενη από το $\mathbb{R}$ Ευκλείδεια τοπολογία. Έστωσαν A, B δύο μη κενά, ανοικτά υποσύνολα του $[a,b]$, με $A \cup B = [a,b]$. Ισχύει ένα τουλάχιστον εκ των $a \in A$ ή $a \in B$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει το πρώτο. Επειδή το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $[a,b]$, υπάρχει $s \in (a,b]$, ώστε $[a,s) \subseteq A$. Θεωρούμε το μη κενό σύνολο $S = \{s \in (a,b]/[a,s) \subseteq A\}$ και έχουμε ότι $\bigcup\limits_{s\in S}[a,s) = [a,s')$, όπου $s' = \sup S$. Για το s' έχουμε

α') $s' < b$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση $B = \varnothing$ ή $B = \{b\}$, άτοπο, επειδή το B είναι μη κενό και ανοικτό και

β') $s' \notin A$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, επειδή το A είναι ανοικτό και $a < s' < b$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $(-\varepsilon + s', s' + \varepsilon) \subseteq A$, άρα $[a, s' + \varepsilon) \subseteq A$, άρα $s' + \varepsilon \in S$, άρα $s' + \varepsilon \le s'$, άτοπο.

Επομένως $s' \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό υποσύνολο του $[a,b]$ και $s' < b$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $(-\delta + s', s' + \delta) \subseteq [a,b]$. Άρα $s' - \frac{\delta}{2} \in A \cap B$, άρα $A \cap B \neq \varnothing$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι δυο οποιαδήποτε μη κενά, ανοικτά υποσύνολα του $[a,b]$ δεν είναι ξένα. Συνεπώς το $[a,b]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. □

Παρατηρήσεις:

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός. Πράγματι, τα διαστήματα $[-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[-n,n] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[-n,n] \neq \varnothing.$$

Συνεπώς το $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-n,n]$ είναι συνεκτικός χώρος (πρόταση 4.1.2).

2. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε τα διαστήματα $[a,b)$ και $(a,b]$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Τα διαστήματα $\left[a, b - \frac{b-a}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a, b - \tfrac{b-a}{n}\right] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a, b - \tfrac{b-a}{n}\right] \neq \varnothing.$$

Επομένως το $[a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a, b - \frac{b-a}{n}\right]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (πρόταση 4.1.2). Ομοίως συμπεραίνουμε και τη συνεκτικότητα του δευτέρου διαστήματος. □

3. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε το διάστημα (a,b) είναι συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Τα διαστήματα $\left[a + \frac{b-a}{n}, b - \frac{b-a}{n}\right]$, $n \ge 2$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και

$$\frac{a+b}{2} \in \bigcap_{n=2}^{\infty}\left[a + \tfrac{b-a}{n}, b - \tfrac{b-a}{n}\right] \Rightarrow \bigcap_{n=2}^{\infty}\left[a + \tfrac{b-a}{n}, b - \tfrac{b-a}{n}\right] \neq \varnothing.$$

Επομένως το $(a,b) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{n}, b - \frac{b-a}{n}\right]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (πρόταση 4.1.2). $\square$

4. Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε τα διαστήματα (a,∞) και $(-\infty,a)$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$.

   Απόδειξη: Τα διαστήματα (a,n), $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και

   $$a+1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a,n) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}(a,n) \neq \varnothing.$$

   Επομένως, το $(a,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a,n)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (πρόταση 4.1.2). Ομοίως αποδεικνύεται η συνεκτικότητα και του δευτέρου διαστήματος. $\square$

5. Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε τα διαστήματα $[a,\infty)$ και $(-\infty,a]$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$.

   Απόδειξη: Τα διαστήματα $[a,n)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και

   $$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a,n) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a,n) \neq \varnothing.$$

   Επομένως, το $[a,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a,n)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (πρόταση 4.1.2). Ομοίως αποδεικνύεται η συνεκτικότητα και του δευτέρου διαστήματος. $\square$

Συνεπώς

Πρόταση 4.1.5. *Κάθε μη τετριμμένο διάστημα* [1] *της πραγματικής ευθείας είναι συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}$.

Και αντιστρόφως

Πρόταση 4.1.6. *Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}$, *με δύο τουλάχιστον στοιχεία είναι διάστημα.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω A συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με δύο τουλάχιστον στοιχεία, το οποίο δεν είναι διάστημα. Άρα υπάρχουν $a,b \in A$ $(a<b)$ και $s \in \mathbb{R}$, με $a<s<b$, ώστε $s \notin A$. Τότε τα $(-\infty,s)$, (s,∞) είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επιπλέον έχουμε $a \in A \cap (-\infty,s)$ και $b \in A \cap (s,\infty)$, άρα $A \cap (-\infty,s) \neq \varnothing$, $A \cap (s,\infty) \neq \varnothing$ και $A \subseteq (-\infty,s) \cup (s,\infty)$, άτοπο. $\square$

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια των προηγηθέντων δύο προτάσεων και των παρατηρήσεων είναι το ότι τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$, με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι τα μη τετριμμένα διαστήματα.

[1] Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε τα $[a,a] = \{a\}$ και $(a,a) = \varnothing$, θεωρούνται τετριμμένα διαστήματα.

Πρόταση 4.1.7. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε τα B και $\overline{A}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του X.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το B είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : B \to \{0,1\}$. Η f/A είναι επίσης συνεχής και, επειδή το A είναι συνεκτικό, η f/A δεν είναι επί του $\{0,1\}$, επομένως ή $f(A) = \{0\}$ ή $f(A) = \{1\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο. Είναι $f(A) \subseteq f(B) \subseteq f(\overline{A})$ και, επειδή η f είναι συνεχής, έχουμε $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \{0\}$, άρα $f(\overline{A}) = \{0\}$, συνεπώς $f(B) = \{0\}$, άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι η f είναι επί. Ομοίως αποδεικνύεται και η συνεκτικότητα του $\overline{A}$. □

Παρατήρηση: Η συνεκτικότητα του $\overline{A}$ δεν συνεπάγεται απαραίτητα και τη συνεκτικότητα του A. Για παράδειγμα, το $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικός χώρος, αλλά το $\mathbb{Q}$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.1.8. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής και επί απεικόνιση. Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε ο Y είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο Y είναι μη συνεκτικός, άρα υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του Y, ώστε $U \cup V = Y$. Τότε τα $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ είναι προφανώς μη κενά ανοικτά και ξένα, με $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X$, άρα ο X είναι μη συνεκτικός, άτοπο. □

Πόρισμα. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y.*

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα που προκύπτει από την πρόταση 4.1.8 είναι ότι η συνεκτικότητα είναι αναλλοίωτη στις συνεχείς και επί απεικονίσεις. Η ιδιότητα αυτή είναι ισχυρότερη από εκείνη του τοπολογικού αναλλοιώτου, άρα κατά μείζονα λόγο η συνεκτικότητα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο. Με τη βοήθεια του τοπολογικού αναλλοιώτου της συνεκτικότητας θα εξετάσουμε τις επόμενες δύο περιπτώσεις μη ομοιόμορφων χώρων.

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφος με το υποσύνολο του $(0,1) \cup (1,2)$, γιατί ο μεν πρώτος είναι συνεκτικός και ο δεύτερος, είναι μη συνεκτικός υπόχωρος του πρώτου, επειδή τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας είναι τα διαστήματα.

2. Οι χώροι $[0,1)$ και $(0,1)$ με την Ευκλείδεια τοπολογία δεν είναι ομοιόμορφοι. Πράγματι, αν ισχυριστούμε το αντίθετο, τότε πρέπει να υπάρχει ομοιομορφισμός $f : [0,1) \to (0,1)$. Ο ομοιομορφισμός αυτός θα απεικονίζει το συνεκτικό σύνολο $(0,1) = [0,1) \setminus \{0\}$ στο σύνολο $(0,a) \cup (a,1)$, όπου $a = f(0)$, το οποίο δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

Πρόταση 4.1.9. *Αν οι X, Y είναι συνεκτικοί χώροι, τότε ο χώρος $X \times Y$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστω $x = (a,b), y = (c,d) \in X \times Y$. Τότε ο $X \times \{d\}$ είναι συνεκτικός, ως ομοιόμορφος του X και ο $\{a\} \times Y$ είναι επίσης συνεκτικός, ως ομοιόμορφος του Y. [2]Είναι $(a,d) \in X \times \{d\} \cap \{a\} \times Y$, άρα $X \times \{d\} \cap \{a\} \times Y \neq \varnothing$. Συνεπώς το $E_{xy} = X \times \{d\} \cup \{a\} \times Y$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $X \times Y$, με $x = (a,b) \in E_{xy}$ και $y = (c,d) \in E_{xy}$. Επομένως (πρόταση 4.1.3) ο $X \times Y$ είναι συνεκτικός. □

[2]Οι ομοιομορφίες $X \times \{d\} \cong X, \{a\} \times Y \cong Y$ αποδεικνύονται εύκολα και αφήνονται ως ασκήσεις.

Με επαγωγή στο n εύκολα αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση [3]

Πρόταση 4.1.10. *Αν οι $X_1, \ldots, X_n$, όπου $n \geq 2$ είναι συνεκτικοί χώροι, τότε ο χώρος $\prod_{i=1}^{n} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συνεκτικός.*

Παρατηρήσεις:

1. Η αντίστροφη της συνεπαγωγής της προηγούμενης πρότασης αληθεύει προφανώς, γιατί αν ο χώρος $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ είναι συνεκτικός, τότε και ο $p_i(X) = X_i$ είναι συνεκτικός για κάθε $i = 1, \ldots, n$, γιατί οι προβολές p_i είναι συνεχείς συναρτήσεις.

2. Στην άσκηση 6 του κεφαλαίου 1, είδαμε ότι η καρτεσιανή τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ και η Ευκλείδεια συμπίπτουν. Επομένως ο $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, όπου $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικός, γιατί οι X_i είναι συνεκτικοί.

Παραδείγματα 4.1.2. Τα παραδείγματα που ακολουθούν πραγματεύονται συνεκτικά υποσύνολα των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1. Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $x \neq y$, τότε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x και y είναι το σύνολο

$$[xy] = \big\{(1-t)x + ty / t \in [0,1]\big\}.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $[xy]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ως εικόνα του συνεκτικού συνόλου $[0,1]$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, με $f(t) = (1-t)x + ty$.

2. Το τεθλασμένο ευθύγραμμο τμήμα $[xzy]$ με άκρα τα σημεία $x, y \in \mathbb{R}^n$ και ενδιάμεσο σημείο το σημείο $z \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται, αν και μόνον, αν τα x, y και z δεν είναι συνευθειακά, δηλαδή δεν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$, ώστε $z = (1-t)x + ty$. Στην περίπτωση αυτή είναι το σύνολο

$$[xzy] = \begin{cases} (1-2t)x + 2tz\,, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)z + (2t-1)y\,, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Το τεθλασμένο ευθύγραμμο τμήμα $[xzy]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, γιατί είναι εικόνα του συνεκτικού συνόλου $[0,1]$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, με $f(t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2tz\,, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)z + (2t-1)y\,, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$. Το ότι η f είναι συνεχής είναι συνέπεια της πρότασης 2.1.7.

3. Ο τρυπημένος χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, x \neq y$ και $\mathbf{0} \notin [xy]$, τότε $[xy] \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{0} \in [xy]$, τότε για κάποιο $z \in \mathbb{R}^n \wedge z \notin [xy]$ είναι $[xzy] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, τα αυθαιρέτως επιλεγμένα $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ανήκουν σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

[3] Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι ο χώρος $\big(\prod_{i=1}^{n-1} X_i\big) \times X_n$ είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Συνεπώς, το ζητούμενο είναι συνέπεια της πρότασης 4.1.3. Να παρατηρήσουμε ότι συνεκτικό είναι και το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που προκύπτει, αν από τον $\mathbb{R}^n$ αφαιρεθεί ένα οποιοδήποτε σημείο του και όχι κατ' ανάγκην το $\mathbf{0}$, γιατί, αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

Στο 10ο από τα παραδείγματα 2.3.1, με καθόλου εύκολο τρόπο, αποδείξαμε ότι $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$. Με απλό επιχείρημα συνεκτικότητας, μπορούμε να αποδείξουμε κάτι πιο γενικό, το $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$ για $n \geq 2$. Πράγματι, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας ομοιομορφισμός και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{f(a)\},$$

άτοπο, γιατί ο $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ είναι χώρος μη συνεκτικός και ο $\mathbb{R}^n \setminus \{f(a)\}$ συνεκτικός.

4. Στην περίπτωση 6 από τα παραδείγματα 2.3.1 συναντήσαμε έναν ομοιομορφισμό $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Επομένως ο χώρος $\mathbb{B}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ άρα είναι συνεκτικός.

5. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ είναι προφανώς συνεχής. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}^{n-1} &\Rightarrow f(x) = x \\ &\Rightarrow x \in f(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x \in f(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) &\Rightarrow (\exists\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})\, x = f(y) = \frac{y}{\|y\|} \\ &\Rightarrow \|x\| = 1 \\ &\Rightarrow x \in \mathbb{S}^{n-1}, \end{aligned}$$

άρα $\mathbb{S}^{n-1} = f(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Συνεπώς ο $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ως εικόνα του συνεκτικού συνόλου $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, μέσω της συνεχούς f.

6. Έχουμε ότι $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n = \bigsqcup\{rx / r \in (1, \infty) \wedge x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$.
Η απεικόνιση $\Phi : (1, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$, με $\Phi(r, x) = rx$, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής. Επομένως ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ είναι συνεκτικός, ως εικόνα του συνεκτικού $(1, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ μέσω της συνεχούς Φ.

7. Αν από τον κύκλο $\mathbb{S}^1$ αφαιρέσουμε το σημείο $A(\cos\phi, \sin\phi)$, τότε το $\mathbb{S}^1 \setminus \{A\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι το $\mathbb{S}^1 \setminus \{A\}$ είναι εικόνα του διαστήματος $(\phi, \phi + 2k\pi)$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : (\phi, \phi + 2k\pi) \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

8. Κάθε τόξο AB του $\mathbb{S}^1$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, έστω $A(\cos\phi, \sin\phi)$ και $B(\cos\theta, \sin\theta)$, με $0 \leq \phi < \theta < 2\pi$. Τότε το AB είναι εικόνα του διαστήματος $[\phi, \theta]$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : [\phi, \theta] \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Άρα το τόξο AB είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 4.1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Το A ονομάζεται **συνεκτική συνιστώσα** του X, αν και μόνον, αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X και δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο B του X που περιέχει γνήσια το A δηλαδή $A \subset B$.

Παρατηρήσεις:

1. Έστω $x \in X$. Το $\{x\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X, άρα το σύνολο $\mathfrak{U}_x$ που έχει στοιχεία όλα τα συνεκτικά υποσύνολα του X, τα οποία περιέχουν το x είναι μη κενό. Έχουμε $\bigcap\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C \neq \varnothing$, γιατί $x \in \bigcap\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C$. Άρα το $\bigcup\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C$ είναι συνεκτικό. Αν A συνεκτικό υποσύνολο του X, με $\bigcup\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C \subset A$, τότε $x \in A$, άρα $A \in \mathfrak{U}_x$, άρα $A \subseteq \bigcup\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C$, άτοπο. Συνεπώς το $\bigcup\limits_{C \in \mathfrak{U}_x} C$ είναι συνεκτική συνιστώσα του X ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το x και συμβολίζεται με C_x.

2. Είναι προφανές το ότι, αν ο X είναι συνεκτικός, τότε η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του είναι ο ίδιος ο X.

3. Το σύνολο $\mathbf{C}_X = \{C_x \,/\, x \in X\}$ των συνεκτικών συνιστωσών του χώρου X είναι μία διαμέριση του X, μέσω της οποίας εισάγεται στον X σχέση ισοδυναμίας $\sim$, ως εξής:

$$x \sim y \iff \exists\, C_x \in \mathbf{C}_X,\, y \in C_x.$$

   Συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του C_X με $n(X)$.

Παραδείγματα 4.1.3. [4]

1. Το σύνολο $(0,1) \cup (1,2) \cup (2,3)$ έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες, τις $(0,1)$, $(1,2)$ και $(2,3)$.

2. Το σύνολο $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $C_1 = \{e^{ix} \,/\, 0 < x < \pi\}$ και $C_2 = \{e^{ix} \,/\, \pi < x < 2\pi\}$.

3. Το σύνολο $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ (η μοναδιαία σφαίρα εκτός του ισημερινού της) έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 / z > 0\}$ και $\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 / z < 0\}$.

Πρόταση 4.1.11. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε*

α΄) Κάθε συνεκτική συνιστώσα A του X είναι κλειστό υποσύνολο του X.

β΄) Αν A, B είναι συνεκτικές συνιστώσες του με $A \neq B$, τότε $A \cap B = \varnothing$.

Απόδειξη:

α΄) Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι A το δεν είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε $A \subset \overline{A}$, άτοπο, γιατί το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό και το A συνεκτική συνιστώσα του X, η οποία περιέχεται γνήσια στο $\overline{A}$. □

[4] Στα επόμενα παραδείγματα, για όσα σύνολα αναφέρονται ως συνεκτικά υποσύνολα κάποιων Ευκλείδειων χώρων, συνεκτικότητα είτε έχει ήδη αποδειχθεί είτε είναι εύκολα αποδείξιμη και αφήνεται ως άσκηση.

β΄) Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $A \cap B \neq \varnothing$, τότε το $A \cup B$ είναι συνεκτικό, με $A \subset A \cup B$, άτοπο, γιατί το A είναι συνεκτική συνιστώσα του X, η οποία περιέχεται γνήσια στο $A \cup B$. □

Πρόταση 4.1.12. *Αν X, Y τοπολογικοί χώροι. Αν υπάρχει απεικόνιση $f : X \to Y$ συνεχής και επί, τότε $n(X) \geq n(Y)$.*

Απόδειξη: Έστω $A \in C_X$. Το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y, επομένως υπάρχει μοναδικό $C(A) \in C_Y$, ώστε $f(A) \subseteq C(A)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : C_X \to C_Y$, με $F(A) = C(A)$, η οποία, επειδή το $C(A)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο είναι καλώς ορισμένη. Έστω $B \in C_Y$, τότε, αν $b \in B$ θα έχουμε $f^{-1}(b) \in X$, άρα, υπάρχει $A \in C_X$, ώστε $f^{-1}(b) \in A$, άρα $b \in f(A)$, άρα $f(A) \subseteq B$, άρα $F(A) = B$, άρα η F είναι επί. Επομένως $|C_X| \geq |C_Y|$, δηλαδή $n(X) \geq n(Y)$. □

Πρόταση 4.1.13. *Ο πληθάριθμος του συνόλου των συνεκτικών συνιστωσών ενός τοπολογικού χώρου είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, με $X \cong Y$ και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Από την προηγούμενη πρόταση, επειδή η f είναι επί θα έχουμε

$$n(X) \geq n(Y). \tag{4.1}$$

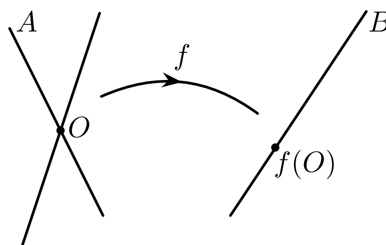
Αλλά και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης επί, άρα

$$n(X) \leq n(Y). \tag{4.2}$$

Από τις (4.1) και (4.2), έπεται ότι $n(X) = n(Y)$, δηλαδή ο πληθάριθμος $n(X)$ δεν αλλάζει όταν ο X διατρέχει την κλάση των ομοιόμορφων με τον X τοπολογικών χώρων. □

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι μία εφαρμογή της πρότασης 4.1.13

Παράδειγμα 4.1.1. Στο Ευκλείδειο επίπεδο τα σχήματα A και B (σχήμα 4.1) δεν είναι ομοιόμορφοι χώροι, ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν, είναι $f : A \to B$ ένας ομοιομορφισμός, τότε $A \setminus \{O\} \cong B \setminus \{f(O)\}$, άτοπο, γιατί ο χώρος $A \setminus \{O\}$ έχει τέσσερις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ ο χώρος $B \setminus \{f(O)\}$ δύο.



Σχήμα 4.1

Ορισμός 4.1.5. Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται **ολικώς μη συνεκτικός**, αν και μόνον, αν οι μοναδικές συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα μονοσύνολα.

Παραδείγματα 4.1.4.

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, επειδή τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του είναι τα διαστήματα, ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ολικώς μη συνεκτικό, είναι να μην περιέχει διάστημα. Επομένως ολικώς μη συνεκτικά υποσύνολα του είναι τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Αν (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Q}^2$, με $(a, b) \neq (c, d)$, τότε $a \neq c$ ή $b \neq d$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $a < b$ και, έστω r ένας άρρητος του ανοικτού διαστήματος με άκρα τα a και b. Αν $A \subseteq \mathbb{Q}^2$, με (a, c), $(b, d) \in A$, τότε τα σύνολα $U = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R} \wedge x < r\}$ και $V = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R} \wedge x > r\}$ είναι μη κενά, ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, με $A \cap U \neq \varnothing$, $A \cap V \neq \varnothing$ και $A \subseteq U \cup V$. Επομένως το A είναι μη συνεκτικό. Δηλαδή δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Q}^2$ με περισσότερα από ένα στοιχεία, άρα το $\mathbb{Q}^2$ είναι ολικώς μη συνεκτικός χώρος.

3. Με ανάλογο επιχείρημα αποδεικνύεται ότι το $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ είναι ολικώς μη συνεκτικό, ενώ, όπως θα δούμε σε παράδειγμα της επομένης παραγράφου, το $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ είναι συνεκτικό.

4.2 Δρομοσυνεκτικοί χώροι

Στην ενότητα αυτή θα πραγματευτούμε μία ισχυρότερη έννοια από εκείνη της συνεκτικότητας την δρομοσυνεκτικότητα.

Ορισμός 4.2.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $x, y \in X$. **Δρόμος στον X με αρχή το σημείο x και πέρας το y** ονομάζεται κάθε συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to X$, για την οποία $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$. Όταν υπάρχει τέτοια απεικόνιση γ, λέμε ότι τα x και y συνδέονται με δρόμο. Αν δεν υπάρχει δρόμος στον X, με αρχή το x και πέρας το y λέμε ότι τα x και y δεν συνδέονται με δρόμο.

Παράδειγμα 4.2.1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ ένας δρόμος από το σημείο x στο σημείο y, είναι, όπως έχουμε ήδη δει, είναι η συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, με $\gamma(t) = (1-t)x + ty$.

Ορισμός 4.2.2. Έστωσαν α, β δρόμοι στον τοπολογικό χώρο X, με $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, $\beta(0) = y$ και $\beta(1) = z$. Τότε η συνεχής απεικόνιση $\gamma = \alpha * \beta : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t)\,, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1)\,, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ είναι ένας δρόμος, με αρχή το σημείο x και πέρας το σημείο z και ονομάζεται **σύνθεση των δρόμων α και β**. Η συνέχεια της απεικόνισης γ αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρότασης 2.1.8.

Ορισμός 4.2.3. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **δρομοσυνεκτικός**, αν και μόνον, αν για οποιαδήποτε δύο σημεία $x, y \in X$ υπάρχει δρόμος στον X, με αρχή το x και πέρας το y.

Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται **δρομοσυνεκτικό υποσύνολο** του X, αν και μόνον, αν για οποιαδήποτε δύο σημεία $x, y \in A$, υπάρχει δρόμος γ στον X, με αρχή το x και πέρας το y, ώστε $\gamma(\mathbb{I}) \subseteq A$.[5]

Παρατήρηση: Στα επόμενα, ο χαρακτηρισμός "υποσύνολο του...", ο οποίος συνοδεύει τις έννοιες συνεκτικό, μη συνεκτικό ή δρομοσυνεκτικό, για λόγους συντομίας μπορεί να παραλείπεται.

Παραδείγματα 4.2.1.

1. Με τα ίδια επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν στις περιπτώσεις 1 και 3 των παραδειγμάτων 4.1.2, αποδεικνύεται ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ και ο τρύπιος χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ είναι δρομοσυνεκτικοί χώροι.

2. Έστωσαν $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $n \geq 2$ και γ ένας δρόμος στον $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, με αρχή το x και πέρας το y. Τότε η συνεχής απεικόνιση $\gamma' : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $\gamma'(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ είναι ένας δρόμος στον $\mathbb{S}^{n-1}$, με αρχή το x και πέρας το y, άρα ο χώρος $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι δρομοσυνεκτικός.

3. Το μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **κυρτό**, αν και μόνον, αν μαζί με τα οποιαδήποτε $x, y \in A$ το ευθύγραμμο τμήμα $[xy]$ περιέχεται επίσης στο A, δηλαδή

$$x, y \in A \Rightarrow (1-t)x + ty \in A \quad \forall \quad t \in [0,1].$$

Τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι προφανώς δρομοσυνεκτικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.2.1. *Κάθε δρομοσυνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστω X ένας δρομοσυνεκτικός χώρος και $a \in X$. Τότε για κάθε $x \in X$, υπάρχει δρόμος γ_{ax}, με αρχή το a και πέρας το x. Τα σύνολα $D_{ax} = \gamma(\mathbb{I})$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του X, ως εικόνες του συνεκτικού $\mathbb{I}$ μέσω της συνεχούς γ_{ax}. Ισχύει ότι $X = \bigcup\limits_{x \in X} D_{ax}$ και $\bigcap\limits_{x \in X} D_{ax} \neq \varnothing$, γιατί $a \in \bigcap\limits_{x \in X} D_{ax}$. Άρα ο X είναι συνεκτικός (πρόταση 4.1.2). □

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, όπως φαίνεται από το αντιπαράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.2.2. Στην άσκηση 22 του 1ου κεφαλαίου εξετάσαμε το σύνολο $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y = \sin \frac{1}{x}\}$, το οποίο προκύπτει από την καμπύλη του τοπολόγου $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$ και είδαμε ότι

$$\overline{S} = S \cup \{(0, b) / -1 \leq b \leq 1\}.$$

Το S είναι συνεκτικό, ως εικόνα του συνεκτικού $(0, \infty)$, μέσω της συνεχούς $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$. Συνεπώς και το $\overline{S}$ είναι συνεκτικό. Με απαγωγή σε άτοπο θα δείξουμε ότι το $\overline{S}$ δεν είναι δρομοσυνεκτικό. Έστω ότι είναι δρομοσυνεκτικό. Τότε θα υπάρχει δρόμος γ στο $\overline{S}$, με

[5] Τον δρόμο γ τον λέμε και δρόμο στο A.

αρχή το σημείο $(0,0)$ και πέρας το σημείο $(1, \sin 1)$. Επειδή η απεικόνιση γ είναι συνεχής στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$, ώστε

$$x \in (0,\delta) \Rightarrow \|\gamma(x) - \gamma(0)\| < \frac{1}{2}.$$

Αλλά,

$$x \in (0,\delta) \Rightarrow \gamma(x) = \sin\frac{1}{x},$$

επομένως

$$x \in (0,\delta) \Rightarrow |\sin\frac{1}{x}| < \frac{1}{2}.$$

Επειδή $\frac{2}{(2n+1)\pi} \to 0$, υπάρχει φυσικός n, ώστε $\frac{2}{(2n+1)\pi} \in (0,\delta)$. Τότε $\left|\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right| < \frac{1}{2}$, άρα $1 < \frac{1}{2}$, άτοπο.

Παρατήρηση: Στην πρόταση 4.1.7 είδαμε ότι, αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο ενός χώρου, τότε συνεκτικό είναι και το $\overline{A}$. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και με τη δρομοσυνεκτικότητα. Το S του προηγούμενου παραδείγματος είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, γιατί αν, $a,b \in (0,\infty)$, με $a < b$, οι απεικονίσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = \left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$ και $g : [0,1] \to [a,b]$, με $g(x) = (b-a)x + a$, είναι συνεχείς, επομένως συνεχής είναι και η απεικόνιση $\gamma = f \circ g$, η οποία είναι ένας δρόμος στον $\mathbb{R}^2$, με αρχή το $\left(a, \sin\frac{1}{a}\right)$ και πέρας το $\left(b, \sin\frac{1}{b}\right)$, ώστε $(f \circ g)(\mathbb{I}) \subseteq S$. Αλλά το $\overline{S}$ δεν είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Πρόταση 4.2.2. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής και επί απεικόνιση. Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ο Y είναι δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστω ότι $z, w \in Y$. Τότε υπάρχουν $x, y \in X$, ώστε $f(x) = z$ και $f(y) = w$. Επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικό υπάρχει δρόμος γ στον X, με $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$. Η απεικόνιση $f \circ \gamma$ είναι ένας δρόμος στον Y, με αρχή το σημείο $f(\gamma(0)) = f(x) = z$ και πέρας το σημείο $f(\gamma(1)) = f(y) = w$. Άρα ο Y είναι δρομοσυνεκτικός. □

Πόρισμα. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε το $f(X)$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του Y.*

Παρατήρηση: Όπως με τη συνεκτικότητα, έτσι και με την δρομοσυνεκτικότητα το συμπέρασμα που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση είναι ότι η δρομοσυνεκτικότητα είναι αναλλοίωτη στις συνεχείς απεικονίσεις. Η ιδιότητα αυτή είναι ισχυρότερη από εκείνη του τοπολογικού αναλλοιώτου. Άρα, κατά μείζονα λόγο η δρομοσυνεκτικότητα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

Πρόταση 4.2.3. *Αν οι X, Y είναι δρομοσυνεκτικοί χώροι, τότε ο $X \times Y$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι δρομοσυνεκτικός χώρος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε $x = (a,b)$, $y = (c,d) \in X \times Y$. Τότε, επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει δρόμος α στον X, ώστε $\alpha(0) = a$ και $\alpha(1) = c$. Επειδή ο Y είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει δρόμος β στον Y, με $\beta(0) = b$ και $\beta(1) = d$. Η απεικόνιση

$\gamma : \mathbb{I} \to X \times Y$, με $\gamma(t) = (\alpha(t), b)$ είναι ένας δρόμος στον $X \times Y$, με αρχή το σημείο (a, b) και πέρας το σημείο (c, b). Η απεικόνιση $\delta : \mathbb{I} \to X \times Y$, με $\delta(t) = (c, \beta(t))$ είναι ένας δρόμος στον $X \times Y$, με αρχή το σημείο (c, b) και πέρας το σημείο (c, d). Επομένως η σύνθεση $\gamma * \delta$ των δρόμων γ και δ είναι ένας δρόμος στον $X \times Y$, με αρχή το σημείο (a, b) και πέρας το (c, d). Συνεπώς ο $X \times Y$ είναι δρομοσυνεκτικός. □

Με επαγωγή στο n, εύκολα αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 4.2.4. *Αν οι τοπολογικοί χώροι $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ είναι δρομοσυνεκτικοί, τότε ο χώρος $\prod_{i=1}^{n} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι δρομοσυνεκτικός.*

Πρόταση 4.2.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A_i, i \in I$ οικογένεια δρομοσυνεκτικών υποσυνόλων του X, με $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, τότε το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Τότε υπάρχουν $i, j \in I$, ώστε $x \in A_i$ και $y \in A_j$. Αν $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, επειδή το A_i είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X, υπάρχει δρόμος γ στον X, με αρχή το x και πέρας το a, ώστε $\gamma(\mathbb{I}) \subseteq A_i$. Επειδή το A_j είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X, υπάρχει δρόμος δ στον X, με αρχή το a και πέρας το y, ώστε $\delta(\mathbb{I}) \subseteq A_j$. Ο $\gamma * \delta$ είναι ένας δρόμος στον X με αρχή το x και πέρας το y, ώστε $(\gamma * \delta)(\mathbb{I}) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, άρα το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X. □

Ορισμός 4.2.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Το A ονομάζεται **δρομοσυνεκτική συνιστώσα του** X, αν και μόνον, αν το A είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X και δεν υπάρχει δρομοσυνεκτικό υποσύνολο B του X, ώστε $A \subset B$.

Πρόταση 4.2.6. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε αν A, B είναι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του, με $A \neq B$, τότε $A \cap B = \varnothing$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $A \cap B \neq \varnothing$, άρα, από την πρόταση 4.2.5, συμπεραίνουμε ότι το $A \cup B$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X. Έχουμε $A \subseteq A \cup B$ και $A \neq B$, άρα $A \subset A \cup B$, άτοπο, γιατί το A είναι δρομοσυνεκτική συνιστώσα. □

Πρόταση 4.2.7. *Ο πληθάριθμος του συνόλου $\mathbf{D}_X$ των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών ενός τοπολογικού χώρου X είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της πρότασης 4.1.13. □

Λήμμα 4.2.8. *Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ και $y, z \in S(x, \varepsilon)$, τότε $[yz] \subseteq S(x, \varepsilon)$.*

Απόδειξη: Έστω $w \in [yz]$, τότε υπάρχει $t \in [0, 1]$, ώστε $w = (1 - t)y + tz$, άρα

$$\begin{aligned} \|x - w\| &= \|(1 - t)(x - y) + t(x - z)\| \\ &\leq (1 - t)\|x - y\| + t\|x - z\| \\ &< (1 - t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon \\ &\Rightarrow w \in S(x, \varepsilon), \end{aligned}$$

άρα $[yz] \subseteq S(x, \varepsilon)$. □

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του πιο πάνω λήμματος είναι το ότι το $S(x, \varepsilon)$, αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$ είναι ένα δρομοσυνεκτικό σύνολο.

Πρόταση 4.2.9. *Αν το A είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, τότε το A είναι δρομοσυνεκτικό.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in A$, τα οποία δεν συνδέονται με δρόμο. Επειδή το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq A$. Από το προηγηθέν λήμμα, έπεται ότι όλα τα σημεία της $S(x, \varepsilon)$ συνδέονται με δρόμο με το x, συνεπώς το σύνολο U των σημείων του A που συνδέονται με δρόμο με το x, καθώς και το σύνολο V των σημείων του A που δεν συνδέονται με δρόμο με το x, είναι μη κενά και ξένα, με $U \cup V = A$. Έστω $y \in U \subseteq A$. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$, ώστε $S(y, \varepsilon_1) \subseteq A$. Όλα τα σημεία του $S(y, \varepsilon_1)$ συνδέονται με δρόμο με το y, άρα συνδέονται με δρόμο με το x, άρα $S(y, \varepsilon_1) \subseteq U$. Συνεπώς το U είναι ανοικτό υποσύνολο του A. Έστω $z \in V \subseteq A$. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$, ώστε $S(z, \varepsilon_2) \subseteq A$. Όλα τα σημεία του $S(z, \varepsilon_2)$ συνδέονται με δρόμο με το z, άρα, αν κάποιο από αυτά συνδεόταν με δρόμο με το x, τότε και το z θα συνδεόταν με δρόμο με το x, το οποίο είναι αδύνατο, άρα όλα τα σημεία του $S(z, \varepsilon_2)$ ανήκουν στο V, δηλαδή $S(z, \varepsilon_2) \subseteq V$. Συνεπώς το V είναι ανοικτό υποσύνολο του A. Άρα το ζεύγος U, V είναι μια διάσπαση του A, άτοπο, επειδή το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. □

Το παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζει ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα στη συνεκτικότητα.

Παράδειγμα 4.2.3. Με το παράδειγμα αυτό θα δείξουμε πόσο δραματικά αλλάζουν τα δεδομένα της συνεκτικότητας, όταν περνάμε από τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$, σε έναν οποιονδήποτε Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ διάστασης > 1. Συγκεκριμένα, όταν από το $\mathbb{R}$ αφαιρέσουμε έστω και ένα σημείο, προκύπτει μη συνεκτικός χώρος, ενώ, αν από τον $\mathbb{R}^n$, με $n \geq 2$ αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο σημείων A, για παράδειγμα το $\mathbb{Q}^n$, τότε ο χώρος που προκύπτει είναι δρομοσυνεκτικός.
Πράγματι, το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα περιέχει δύο διαφορετικά σημεία x, y. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[xy]$ και στο εσωτερικό του

$$]xy[= \{(1-t)x + ty / t \in (0,1)\}$$

ένα σημείο $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Τέτοιο σημείο προφανώς υπάρχει, γιατί το $]xy[$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ακολούθως θεωρούμε σημείο w εκτός της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x και y [6] και την ευθεία $(\delta) = \{(1-t)z + tw / t \in \mathbb{R}\}$ που διέρχεται από τα z και w. Αν $r, l \in (\delta)$, με $r \neq l$, τότε τα σύνολα

$$U_r = \left\{(1-2t)x + 2tr \,/\, t \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right]\right\} \cup \left\{(2-2t)r + (2t-1)y / t \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

και

$$U_l = \left\{(1-2t)x + 2tl \,/\, t \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right]\right\} \cup \left\{(2-2t)l + (2t-1)y \,/\, t \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

είναι ξένα.

[6] Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει τέτοιο σημείο

Σχήμα 4.2

Αν κάθε U_l, με $l \in (\delta)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A, τότε υπάρχει μια 1-1 απεικόνιση των σημείων του συνόλου (δ) στο σύνολο A, επομένως ο πληθάριθμος του A, είναι μεγαλύτερος ή ίσος του πληθαρίθμου των σημείων της (δ), άτοπο, γιατί το σύνολο των σημείων της (δ) είναι υπεραριθμήσιμο και το A αριθμήσιμο. Συνεπώς, υπάρχει $l \in (\delta)$, ώστε $U_l \cap A = \varnothing$, άρα, υπάρχει δρόμος στο $\mathbb{R}^n \setminus A$, με αρχή το x και πέρας το y. Συνεπώς το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι δρομοσυνεκτικό, άρα είναι και συνεκτικό.

4.3 Τοπική συνεκτικότητα και τοπική δρομοσυνεκτικότητα

Για να ολοκληρώσουμε τα περί συνεκτικότητας θα ασχοληθούμε με την έννοιες της τοπικής συνεκτικότητας και της τοπικής δρομοσυνεκτικότητας.

Ορισμός 4.3.1. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά συνεκτικός** (αντ. **τοπικά δρομοσυνεκτικός**) **στο σημείο** $x \in X$, αν και μόνον, αν έχει βάση περιοχών στο x, η οποία αποτελείται από συνεκτικά (αντ.δρομοσυνεκτικά) σύνολα.

Ορισμός 4.3.2. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά συνεκτικός** (αντ. **τοπικά δρομοσυνεκτικός**), αν και μόνον, αν είναι τοπικά συνεκτικός (αντ. δρομοσυνεκτικός) σε κάθε σημείο του $x \in X$.

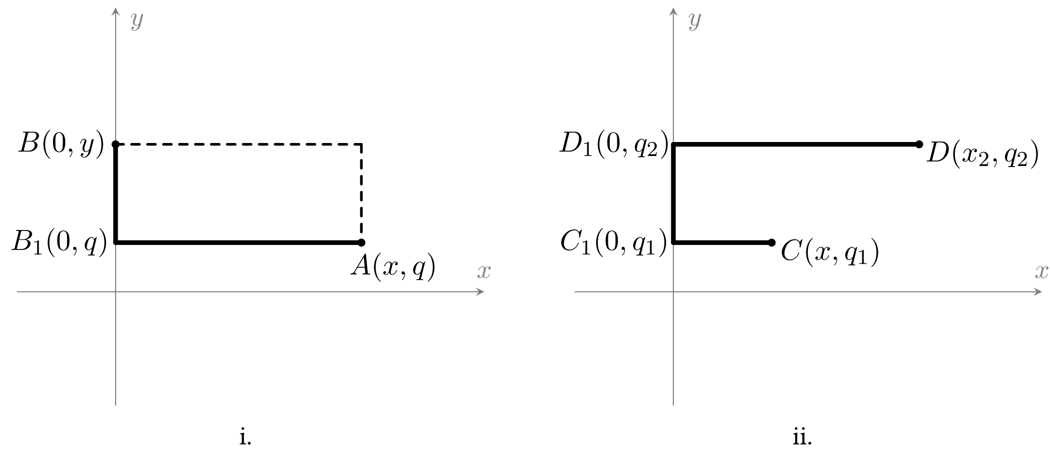
Για την απάντηση στο ερώτημα: Ποια είναι η σχέση της συνεκτικότητας με την τοπική συνεκτικότητα έχουμε τα εξής

1. **Υπάρχουν χώροι, οι οποίοι δεν είναι συνεκτικοί, αλλά είναι τοπικά συνεκτικοί.** Παράδειγμα, ο χώρος $(0,1) \cup (1,2)$.

2. **Υπάρχουν χώροι, οι οποίοι είναι και συνεκτικοί και τοπικά συνεκτικοί.** Παράδειγμα, οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^n$.

3. **Υπάρχουν χώροι, οι οποίοι δεν είναι ούτε συνεκτικοί, ούτε τοπικά συνεκτικοί.** Παράδειγμα, ο χώρος $\mathbb{Q}$.

4. **Υπάρχουν χώροι, οι οποίοι είναι συνεκτικοί, αλλά δεν είναι τοπικά συνεκτικοί.** Παράδειγμα ο χώρος $X = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, q)/x \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{Q}\}$ είναι δρομοσυνεκτικός. Πράγματι, δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου $\{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$ προφανώς συνδέονται με γραμμή που ανήκει ολόκληρη στο σύνολο X. Ένα οποιοδήποτε σημείο του συνόλου $\{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$, με ένα οποιοδήποτε σημείο του συνόλου $\{(x, q)/x \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{Q}\}$ συνδέεται με γραμμή, την BB_1A, η οποία βρίσκεται ολόκληρη εντός του X (σχήμα 4.3.i). Επιπλέον δύο σημεία του συνόλου $\{(x, q)/x \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{Q}\}$ συνδέονται με γραμμή, την CC_1D_1D, η οποία βρίσκεται ολόκληρη εντός του X (σχήμα 4.3.ii). Όμως η οποιαδήποτε περιοχή U του σημείου (x, q) δεν είναι συνεκτικό σύνολο, γιατί $p_2(U) \subseteq \mathbb{Q}$, άρα ο X δεν είναι τοπικά συνεκτικός.



Σχήμα 4.3

Πρόταση 4.3.1. *Αν ο X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος, τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη: Η αλήθεια της πρότασης είναι άμεση συνέπεια του ότι τα δρομοσυνεκτικά υποσύνολα του χώρου X είναι και συνεκτικά υποσύνολα του X. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν αληθεύει πάντα. Στις ασκήσεις του επομένου κεφαλαίου θα δούμε παράδειγμα ενός χώρου, ο οποίος είναι τοπικά συνεκτικός, αλλά δεν είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός.

Πρόταση 4.3.2. *Έστω τοπολογικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Ο X είναι τοπικά συνεκτικός.

β΄) Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X οι συνεκτικές συνιστώσες του U είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X και A μια συνεκτική συνιστώσα του U. Αν $x \in A$, υπάρχει περιοχή V του x, ώστε $V \subseteq U$ και το V να είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. Επειδή $x \in V \cap A$ είναι $V \subseteq A$, άρα το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

β') ⇒ α'): Έστω $x \in X$ και U μια περιοχή του x. Αν C είναι η συνεκτική συνιστώσα του U που περιέχει το x, τότε, από την υπόθεση το C είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επομένως το σύνολο των C είναι μια βάση περιοχών του x για κάθε $x \in X$, επομένως ο X είναι τοπικά συνεκτικός. □

Ομοίως αποδεικνύεται η

Πρόταση 4.3.3. *Έστω τοπολογικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός.

β΄) Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του U είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

Πρόταση 4.3.4. *Αν X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος, τότε οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του X ταυτίζονται με τις συνεκτικές του συνιστώσες.*

Απόδειξη: Έστωσαν C μια δρομοσυνεκτική συνιστώσα και P μια συνεκτική συνιστώσα του X, ώστε $C \cap P \neq \varnothing$. Επειδή η C είναι και συνεκτική συνιστώσα έπεται ότι $C \subseteq P$. Υποθέτουμε, για να οδηγηθούμε σε άτοπο ότι το C είναι γνήσιο υποσύνολο του P. Αν θεωρήσουμε την ένωση U όλων των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X, οι οποίες είναι διαφορετικές από την C και τέμνουν την P προφανώς $U \subseteq P$ και $C \cup U = P$. Επειδή, ο X είναι δρομοσυνεκτικός κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα του είναι ανοικτό υποσύνολο του, άρα τα C και U είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, με $C \cap U = \varnothing$. Επομένως το ζεύγος C, U είναι μια διάσπαση του P, άτοπο. Συνεπώς $C = P$. □

Πρόταση 4.3.5. *Η τοπική συνεκτικότητα και η τοπική δρομοσυνεκτικότητα είναι τοπολογικά αναλλοίωτα.*

Απόδειξη: Έστωσαν X, Y ομοιόμορφοι χώροι και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Αν U είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό (αντ. δρομοσυνεκτικό υποσύνολο) του X, τότε το $f(U)$ είναι ανοικτό και συνεκτικό (αντ. δρομοσυνεκτικό) υποσύνολο του Y. Επομένως, αν ο X είναι τοπικά συνεκτικός (αντ. δρομοσυνεκτικός), τότε κάθε $x \in X$ έχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ με στοιχεία συνεκτικά (αντ. δρομοσυνεκτικά) σύνολα. Τότε η $\mathcal{B}_{f(x)} = \{f(U)/U \in \mathcal{B}_x\}$ είναι μία βάση περιοχών του $f(x)$, με συνεκτικά (αντ. δρομοσυνεκτικά) στοιχεία, επομένως ο Y είναι τοπικά συνεκτικός (αντ. δρομοσυνεκτικός). □

Παρατήρηση: Όμως η τοπική συνεκτικότητα, καθώς και η τοπική δρομοσυνεκτικότητα, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες ολικές έννοιες, δεν είναι αναλλοίωτες στις συνεχείς απεικονίσεις. Για παράδειγμα, ο χώρος $\mathbb{Z}$, με τη διακριτή τοπολογία είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος, γιατί μια βάση περιοχών του $x \in \mathbb{Z}$ είναι το μονοσύνολο $\{x\}$, το οποίο είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, αφού ο σταθερός δρόμος $\gamma(t) = x, t \in \mathbb{I}$ συνδέει το x με τον εαυτό του. Από την άλλη, επειδή τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, η οποία είναι συνεχής, επειδή ο $\mathbb{Z}$ έχει τη διακριτή τοπολογία. Επιπλέον $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ και το $\mathbb{Q}$ δεν είναι τοπικά συνεκτικός, άρα ούτε και τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος.

4.4 Ασκήσεις

1. Με επιχείρημα συνεκτικότητας, να αποδειχθεί ότι ο χώρος [0,1) δεν είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\mathbb{S}^1$.
   Απόδειξη: Έστω $f : [0,1) \to \mathbb{S}^1$ ένας ομοιομορφισμός και $a \in (0,1)$. Τότε $[0,a) \cap (a,1) \cong \mathbb{S}^1$, άτοπο, γιατί ο δεύτερος χώρος είναι συνεκτικός, ενώ ο πρώτος δεν είναι συνεκτικός.

2. Να διαψευσθούν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

   i. Αν τα A και B είναι συνεκτικά υποσύνολα ενός χώρου X, τότε το $A \cap B$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.
   ii. Αν τα A και B είναι μη-συνεκτικά υποσύνολα ενός χώρου X, τότε το $A \cup B$ είναι μη-συνεκτικό υποσύνολο του X.
   iii. Αν το A είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του χώρου X και η $f : X \to Y$ είναι συνεχής, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του χώρου Y.

   Λύση:

   i. Είναι ψευδής, γιατί τα $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ και $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, αλλά το $A \cap B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
   ii. Είναι ψευδής, γιατί τα $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)/y = -1\}$ και $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)/y = -1\}$ είναι μη συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, αλλά το $A \cup B = \mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό.
   iii. Είναι ψευδής, γιατί το $A = \{(x, x^2+1)/x \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x, -x^2-1)/x \in \mathbb{R}\}$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, ενώ το $pr_1(A) = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}$.

3. Να αποδειχθεί ότι η $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι ανοικτό και μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$.
   Απόδειξη: Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $\det : M(\mathbb{R}, n) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, η οποία απεικονίζει κάθε πίνακα A στην ορίζουσά του $\det(A)$. Έχουμε

$$GL(\mathbb{R}, n) = \det^{-1}(-\infty, 0) \cup \det^{-1}(0, \infty).$$

   Κάθε ένα από τα $A_1 = \det^{-1}(-\infty, 0)$ και $A_2 = \det^{-1}(0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $M(\mathbb{R}, n)$, άρα το $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $M(\mathbb{R}, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Επιπλέον το ζεύγος $\{A_1, A_2\}$ είναι μια διάσπαση του $GL(\mathbb{R}, n)$, επομένως η $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$.

4. Να αποδειχθεί ότι ο $SO(\mathbb{R}, 2)$ είναι δρομοσυνεκτικός χώρος.
   Απόδειξη: Αν $A, B \in SO(\mathbb{R}, 2)$, τότε υπάρχουν $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$, ώστε $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\gamma : \mathbb{I} \to SO(\mathbb{R}, 2)$, με $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}$, και $\delta(t) = \begin{pmatrix} \cos(\phi t) & -\sin(\phi t) \\ \sin(\phi t) & \cos(\phi t) \end{pmatrix}$, οι οποίες είναι συνεχείς, με $\gamma(0) = I_2$, $\gamma(1) = A$, $\delta(0) = I_2$ και $\delta(1) = B$. Η απεικόνιση $\overline{\gamma} * \delta : \mathbb{I} \to SO(\mathbb{R}, 2)$ είναι ένας δρόμος στον $SO(\mathbb{R}, 2)$, από το A στο B, άρα ο $SO(\mathbb{R}, 2)$ είναι δρομοσυνεκτικός.

5. Να αποδειχθεί ότι ο $O(\mathbb{R},2)$ δεν είναι δρομοσυνεκτικός χώρος.
   Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο και $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε υπάρχει δρόμος $\gamma : \mathbb{I} \to O(\mathbb{R},2)$, με $\gamma(0) = A$ και $\gamma(1) = B$. Η συνεχής απεικόνιση $\det \circ \gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^*$ είναι ένας δρόμος στον $\mathbb{R}^*$ από το -1 στο 1, επομένως ο $\mathbb{R}^*$ είναι δρομοσυνεκτικός, άτοπο.

6. Κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ είναι ξένη ένωση αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών διαστημάτων.
   Απόδειξη: Έστω $x \in U$ και C_x η συνεκτική συνιστώσα του x στο U. Αν $a \in C_x$, επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$. Το $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του U και $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap C_x \neq \varnothing$, άρα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq C_x$. Επομένως το C_x είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι ένα ανοικτό διάστημα. Αν $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο των διαφορετικών μεταξύ τους διαστημάτων C_x, τότε, προφανώς $U = \bigsqcup_{C_x \in \mathcal{C}} C_x$. Από κάθε ένα τέτοιο διάστημα C_x επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό q_x και κατασκευάζουμε την απεικόνιση $f : \mathcal{C} \to \mathbb{Q}$, με $f(C_x) = q_x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} C_x \neq C_y \quad &\Rightarrow \quad C_x \cap C_y = \varnothing \\ &\Rightarrow \quad q_x \neq q_y \\ &\Rightarrow \quad f(C_x) \neq f(C_y)\,, \end{aligned}$$

   συνεπώς η f είναι 1-1. Επομένως $|\mathcal{C}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Συνεπώς το πλήθος των διαστημάτων, των οποίων η ένωση είναι το U είναι αριθμήσιμο.

7. Αν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 1-1, να δειχθεί ότι η $g : U \to f(U)$, με $g = f/U$ είναι ένας ομοιομορφισμός.[7]

   Απόδειξη: Από την άσκηση 2.5.10. γνωρίζουμε ότι αν, $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1, τότε $f((a,b)) = (c,d)$, όπου $c < d$. Αν U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η h είναι συνεχής και 1-1 στο U, τότε, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $U = \bigsqcup_{i \in K} (a_i, b_i)$, όπου το K είναι αριθμήσιμο. Άρα

$$g(U) = \bigsqcup_{i \in K} f((a_i, b_i)) = \bigsqcup_{i \in K} (c_i, d_i),$$

   επομένως η g είναι ανοικτή απεικόνιση. Άρα η $g = f/U : U \to f(U)$ είναι συνεχής, 1-1 και ανοικτή, επομένως η g είναι ομοιομορφισμός.

8. Αν A_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X, ώστε να ισχύει $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.
   Απόδειξη: Το $A_1 \cup A_2$ είναι συνεκτικό, γιατί τα A_1 και A_2 είναι συνεκτικά και το

[7] Είναι μερική περίπτωση της πρότασης γνωστής με το όνομα, αναλλοίωτο του χωρίου που θα αποδείξουμε στην παράγραφο 16.4).

$A_1 \cap A_2$ είναι μη κενό. Δεχόμαστε ότι το $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ είναι συνεκτικό. Έχουμε $A_k \cap A_{k+1} \subseteq A \cap A_{k+1}$, άρα $A \cap A_{k+1} \neq \varnothing$, άρα το $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\big) \cup A_{k+1}$ είναι συνεκτικό. Επομένως το $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ είναι συνεκτικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ δεν είναι συνεκτικό. Άρα υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \{0,1\}$, επομένως υπάρχουν $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$. Επομένως, υπάρχουν $k, m \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in A_k$ και $y \in A_m$. Έχουμε $k \neq m$, γιατί, αν $k = m$, τότε η $f/A_k : A_k \to \{0,1\}$ είναι συνεχής, 1-1 και επί, άρα το A_k είναι μη συνεκτικό, άτοπο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $k < m$. Τότε $x, y \in B = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ και η $f : B \to \{0,1\}$ είναι συνεχής και επί, άρα το B είναι μη συνεκτικό, άτοπο. Συνεπώς το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.

9. Αν X είναι ένας φυσιολογικός και συνεκτικός χώρος με περισσότερα από ένα στοιχεία, να δειχθεί ότι $|X| \geq \mathbf{c}$.
Απόδειξη: Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$. Επειδή τα $\{x\}$ και $\{y\}$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ (λήμμα Urysohn). Υποθέτουμε ότι το $f(X)$ δεν περιέχει διάστημα, άρα υπάρχει $a \in (0,1)$, ώστε $a \notin f(X)$. Τα $U = f^{-1}([0,a))$ και $V = f^{-1}((a,1])$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, με $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ και $U \cup V = X$, άρα ο X δεν είναι συνεκτικός, άτοπο. Άρα το $f(X)$ περιέχει διάστημα, έστω το J. Έχουμε $J \subseteq f(X)$, άρα $\mathbf{c} = |J| \leq |f(X)| \leq |X|$, δηλαδή το ζητούμενο.

10. Αν το C είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X και $A \subseteq X$, με $C \cap A \neq \varnothing$ και $C \cap A^c \neq \varnothing$, να δειχθεί ότι $C \cap \mathrm{Bd}(A) \neq \varnothing$.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $C \cap \mathrm{Bd}(A) = \varnothing$, άρα $(C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{A^c}) = C \cap (\overline{A} \cap \overline{A^c}) = \varnothing$. Τα $C \cap \overline{A}$ και $C \cap \overline{A^c}$ είναι κλειστά υποσύνολα του C. Επιπλέον έχουμε $C \cap A \subseteq C \cap \overline{A}$, άρα $C \cap \overline{A} \neq \varnothing$ και $C \cap A^c \subseteq C \cap \overline{A^c}$, άρα $C \cap \overline{A^c} \neq \varnothing$. Επίσης

$$\begin{aligned} C &= C \cap (A \cup A^c) \\ &\subseteq C \cap (\overline{A} \cup \overline{A^c}) \\ &= (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A^c}) \\ &\subseteq C, \end{aligned}$$

άρα $C = (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A^c})$, επομένως το C είναι μη συνεκτικό, άτοπο.

11. Δώστε ένα παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A, ώστε τα A° και $\mathrm{Bd}(A)$ να είναι μη συνεκτικά.
Υπόδειξη: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0,\ x \neq 0\} \cup \{(0,1)\}$.

12. Αν U είναι ένα μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και C μια συνεκτική συνιστώσα του U, να αποδειχθεί ότι το σύνολο C είναι υπεραριθμήσιμο.
Απόδειξη: Έστω $x \in C \subseteq U$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq U$. Το $S(x,\varepsilon)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (λήμμα 4.2.8), επομένως $S(x,\varepsilon) \subseteq C$. Το $S(x,\varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο, γιατί το $p_1\big(S(x,\varepsilon)\big)$ είναι ένα διάστημα, επομένως $|S(x,\varepsilon)| \geq |p_1\big(S(x,\varepsilon)\big)| = c$, επομένως και το C που περιέχει το $S(x,\varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

13. Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών ενός μη κενού, ανοικτού υποσυνόλου U του $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Ισχύει το ίδιο και για τα μη κενά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$;
Απόδειξη: Έστω $U_a, a \in A$ η οικογένεια των συνεκτικών συνιστωσών του U. Το $p_i(U_a)$ είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με περισσότερα από ένα στοιχεία για κάθε $i = 1, \ldots, n$, γιατί από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι το U_a είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως το $p_i(U_a)$ είναι ένα μη τετριμμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Έστω r_i^a ένας ρητός του διαστήματος $p_i(U_a)$, τότε $\big(p_1^{-1}(r_1^a), \ldots, p_n^{-1}(r_n^a)\big) \in U_a$ και, επειδή $U_a \cap U_b = \varnothing$ αν $a \neq b$, υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση του συνόλου $\{U_a, a \in A\}$ στο σύνολο $\mathbb{Q}^n$. Επομένως το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι $\leq$ του $|\mathbb{Q}^n| = \aleph_0^n = \aleph_0$, άρα αριθμήσιμο.
Για τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ δεν ισχύει το ίδιο. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο σύνολο **C** του Cantor, το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ολικώς μη συνεκτικό. Επομένως το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του είναι ίσο με το πλήθος των σημείων του, άρα υπεραριθμήσιμο.

14. Είναι το υποσύνολο $A = \{(x_1, \ldots, x_n)\mathbb{R}^n / x_k \in \mathbb{A}\}$ του $\mathbb{R}^n$, συνεκτικό;
Απάντηση: Όχι, γιατί αν ήταν συνεκτικό θα έπρεπε να είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το $p_k(A) = \mathbb{A}$, το οποίο δεν είναι.

15. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A των σημείων του επιπέδου, τα οποία έχουν μία τουλάχιστον ρητή συντεταγμένη είναι δρομοσυνεκτικό.
Απόδειξη: Συμβολίζουμε τους ρητούς με r_i και τους πραγματικούς με y_i. Έχουμε $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\} = \big(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}\big)$. Θέτουμε $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ και $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Έστω $(r_1, y_1) \in X$ και $\gamma_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $\gamma_1(t) = (r_1, (1-t)y_1)$. Τότε: $\gamma_1\big(\mathbb{I}\big) \subseteq X \subseteq A$, $\gamma_1(0) = (r_1, y_1)$ και $\gamma_1(1) = (r_1, 0)$. Αν $\gamma_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $\gamma_2(t) = ((1-t)r_1, 0)$, τότε: $\gamma_2\big(\mathbb{I}\big) \subseteq Y \subseteq A$, $\gamma_2(0) = (r_1, 0)$ και $\gamma_2(1) = (0,0)$. Συνεπώς ο δρόμος $\gamma_1 \star \gamma_2$ είναι ένας δρόμος στο A, με αρχή το (r_1, y_1) και πέρας το $(0,0)$. Έστω $(r_2, y_2) \in Y$ και $\delta_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $\delta_1(t) = (ty, r_2)$. Τότε: $\delta_1\big(\mathbb{I}\big) \subseteq Y \subseteq A$, $\delta_1(0) = (0, r_2)$ και $\delta_1(1) = (y_2, r_2)$. Αν $\delta_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $\delta_2(t) = (0, tr_2)$, τότε: $\delta_2\big(\mathbb{I}\big) \subseteq X \subseteq A$, $\delta_2(0) = (0, r_2)$ και $\delta_2(1) = (0, r_2)$. Συνεπώς ο δρόμος $\delta_2 \star \delta_1$ είναι ένας δρόμος στο A, με αρχή το $(0,0)$ και πέρας το (y_2, r_2). Επομένως ο δρόμος $(\gamma_1 \star \gamma_2) \star (\delta_2 \star \delta_1)$ είναι ένας δρόμος στο A, με αρχή το (r_1, y_1) και πέρας το (y_2, r_2). Ομοίως αποδεικνύεται ότι τα σημεία (r_1, y_1) και (r_2, y_2) συνδέονται με δρόμο στο A, καθώς και τα (y_1, r_1) και (y_2, r_2). Άρα το A είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

16. Αν X ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subset X$, να δειχθεί ότι $\mathrm{Bd}(A) \neq \varnothing$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $Bd(A) = \varnothing$, τότε $\overline{A} \setminus A^0 = \varnothing$,

$$\overline{A} \subseteq A^0 \tag{4.3}$$

Επιπλέον $A^0 \subseteq A \subseteq \overline{A}$, άρα

$$A^0 \subseteq \overline{A} \tag{4.4}$$

Από τις (4.3) και (4.4), συμπεραίνουμε ότι $A^0 = \overline{A}$, άρα από την $A^0 \subseteq A \subseteq \overline{A}$, έχουμε ότι $A = \overline{A}$ και $A = A^0$, δηλαδή το A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X και, επειδή ο X είναι συνεκτικός έχουμε $A = \varnothing$ ή $A = X$, άτοπο.

17. Αν ο (X, d) είναι ένας συνεκτικός και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με περισσότερα του ενός στοιχεία, να δειχθεί ότι $|X| = \mathbf{c}$.

    Απόδειξη: Έστω $x_0 \in X$. Η απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$, με $f(x) = d(x, x_0)$ είναι συνεχής και, επειδή ο X είναι συνεκτικός με περισσότερα του ενός στοιχεία το $f(X)$ είναι ένα μη τετριμμένο διάστημα, άρα $|f(X)| = \mathbf{c}$.
    Έχουμε $|X| \geq |f(X)|$, άρα

    $$|X| \geq \mathbf{c}. \tag{4.5}$$

    Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο D του με $\overline{D} = X$. Αν $x \in X \setminus D$, τότε υπάρχει ακολουθία $y_n(x)$ διακεκριμένων στοιχείων του D, ώστε $y_n(x) \to x$. Θεωρούμε το σύνολο E των παραπάνω ακολουθιών και ορίζουμε απεικόνιση $g : E \to X \setminus D$, ώστε

    $$g(y_n) = x \quad \Leftrightarrow \quad y_n \to x.$$

    Έχουμε $E \subseteq D^{\mathbb{N}}$, άρα $|E| \leq |D^{\mathbb{N}}| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ και $|E| \geq |X \setminus D|$, άρα $|X \setminus D| \leq \mathbf{c}$. Επομένως $|X| = |D| + |X \setminus D| \leq \aleph_0 + \mathbf{c} = \mathbf{c}$, δηλαδή

    $$|X| \leq \mathbf{c}. \tag{4.6}$$

    Από τις (4.5) και (4.6), έχουμε το ζητούμενο.

18. Αν η απεικόνιση $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{I}$, ώστε $f(x_0) = x_0$.

    Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{I}$ ισχύει ότι $f(x) \neq x$. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \mathbb{I} \to \{-1, 1\}$, με $g(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$. Από την υπόθεση που κάναμε η g είναι καλώς ορισμένη. Προφανώς είναι συνεχής και επί, γιατί $f(0) > 0$, άρα $g(0) = 1$ και $f(1) < 1$, άρα $g(1) = -1$. Επομένως (πρόταση 4.1.12) $n\big(\mathbb{I}\big) \geq n\big(\{-1, 1\}\big)$. Όμως $n\big(\{-1, 1\}\big) = 2$, επειδή ο χώρος $\{-1, 1\}$ έχει την διακριτή τοπολογία, άρα $1 \geq 2$, άτοπο.

19. Να αποδειχθεί ότι οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι τοπικά δρομοσυνεκτικοί χώροι.

    Απόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{S}^n$ και $y \in \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$. Έχουμε $\mathbb{S}^n \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^n$. Άρα το x έχει μία βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ στον $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$, η οποία αποτελείται από δρομοσυνεκτικά σύνολα. Επειδή το $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$ η $\mathcal{B}_x$ θα είναι βάση περιοχών του x και στον $\mathbb{S}^n$, με στοιχεία δρομοσυνεκτικά σύνολα, άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

20. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δύο ορισμών της συνεκτικότητα, οι οποίοι δόθηκαν στην παράγραφο 4.1.
Απόδειξη: Έστω ότι ο χώρος X είναι συνεκτικός κατά τον πρώτο ορισμό και δεν είναι συνεκτικός κατά τον δεύτερο. Άρα, υπάρχουν μη κενά σύνολα A, B, ώστε $A \cup B = X$, $\overline{A} \cap B = \varnothing$ και $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Έχουμε $X = A \cup B \subseteq \overline{A} \cup B \subseteq X$, άρα $\overline{A} \cup B = X$. Επιπλέον, $\overline{A} \cap B = \varnothing$, άρα $B = \left(\overline{A}\right)^c = U$. Ομοίως $A = \left(\overline{B}\right)^c = V$. Τα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του , με $U \cup V = X$ και

$$U \cap V = A \cap B \subseteq \overline{A} \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad U \cap V = \varnothing \,,$$

άτοπο.

Έστω ότι ο χώρος X είναι συνεκτικός κατά τον δεύτερο ορισμό και δεν είναι συνεκτικός κατά τον πρώτο. Επομένως υπάρχουν μη κενά ανοικτά υποσύνολα U, V του X, ώστε $U \cup V = X$ και $U \cap V = \varnothing$. Συνεπώς τα $V = U^c$ και $U = V^c$ είναι και κλειστά υποσύνολα του X. Έχουμε $U \cup V = X$, $\overline{V} \cap U = U^c \cap U = \varnothing$ και $\overline{U} \cap V = V^v \cap V = \varnothing$, άτοπο.

5 ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ

5.1 Συμπαγείς χώροι

Η συμπάγεια μαζί με την συνεκτικότητα είναι οι δύο πιο σημαντικές τοπολογικές έννοιες. Σε αντίθεση με τη συνεκτικότητα η συμπάγεια δεν έχει ένα "φυσικό" αντίστοιχο. Η προέλευσή της έχει ρίζες στην ανάλυση. Όπως έχουμε διαπιστώσει στην ανάλυση τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα των Ευκλείδειων χώρων έχουν ιδιαίτερη αξία, η οποία αφορά τις πλούσιες ιδιότητες των συναρτήσεων που ορίζονται σ' αυτά.

Πώς όμως είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα των κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων σύνολα σε έναν τυχαίο τοπολογικό χώρο, με δεδομένο το ότι η έννοια του φραγμένου δεν μπορεί να επεκταθεί πέραν των μετρικών χώρων; [1] Οι Heine και Borel [2] έδωσαν απάντηση στο ερώτημα αυτό, βρίσκοντας ότι η χαρακτηριστική ιδιότητα των κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων των Ευκλείδειων χώρων είναι ότι κάθε ανοικτό κάλυμμά τους έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έτσι προέκυψε η έννοια του συμπαγούς συνόλου, η οποία ορίστηκε με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στον επόμενο ορισμό το πρώτον από τον F. Hausdorff [3] στο μνημειώδες έργο του Grundzuege der Mengenlehre.

Ορισμός 5.1.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, G_i, $i \in I$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X και $A \subseteq X$. Η οικογένεια αυτή ονομάζεται **κάλυμμα του** A, αν και μόνον, αν

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Είναι προφανές πως αν $A = X$, τότε στην πιο πάνω σχέση ισχύει το =. Το κάλυμμα ονομάζεται **ανοικτό κάλυμμα**, αν και μόνον, αν τα G_i είναι ανοικτά υποσύνολα του X για κάθε $i \in I$.

[1] Όπως θα δούμε αναλυτικά στο 7ο κεφάλαιο η έννοια "φραγμένο σύνολο" αφορά αποκλειστικά υποσύνολα μετρικών χώρων.

[2] Eduard Heine (1821-1881): Γερμανός μαθηματικός- Emile Borel (1871-1956): Γάλλος μαθηματικός.

[3] Felix Hausdorff (1868-1943): Γερμανός μαθηματικός.

Ορισμός 5.1.2. Έστω X τοπολογικός χώρος και A ένα υποσύνολο του X. Το A ονομάζεται **συμπαγές υποσύνολο** του X, αν και μόνον, αν για οποιοδήποτε ανοικτό κάλυμμα U_i, $i \in I$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του I, ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$ ή πιο απλά κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Στην περίπτωση που $A = X$ λέμε ότι ο χώρος X είναι **συμπαγής**.

Παρατήρηση: Πολλές φορές για τα συμπαγή υποσύνολα ενός χώρου η έκφραση "υποσύνολο του X" παραλείπεται, επειδή ο υπερκείμενος χώρος, του οποίου το A είναι συμπαγές υποσύνολο είναι δεδομένος.

Σε αρκετές περιπτώσεις για να δείξουμε ότι ένας χώρος είναι συμπαγής, αρκεί να αποδεικνύουμε ότι έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα ένα αυθαίρετα επιλεγμένο ανοικτό κάλυμμα, το οποίο αποτελείται από βασικά ανοικτά σύνολα, επειδή κάθε κάλυμμα από ανοικτά σύνολα είναι υποσύνολο ενός καλύμματος με βασικά ανοικτά σύνολα.

Παραδείγματα 5.1.1.

1. Τα πεπερασμένα υποσύνολα ενός οποιουδήποτε τοπολογικού χώρου X είναι συμπαγή. Πράγματι, έστω $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq X$ και U_i, $i \in I$ ένα ανοικτό κάλυμμα του A. Άρα υπάρχουν δείκτες $i_1, \ldots, i_n$, ώστε $a_k \in U_{i_k}$ για κάθε $k \in J = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Συνεπώς το $U_{i_k}, i_k \in J$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του U_i, $i \in I$, άρα το A είναι συμπαγές.

2. Το $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω U_i, $i \in I$ ένα ανοικτό κάλυμμα του A και U_j το στοιχείο του καλύμματος για το οποίο $0 \in U_j$. Επειδή $\frac{1}{n} \to 0$ υπάρχει φυσικός m, ώστε $\frac{1}{n} \in U_j$ για κάθε $n > m$. Έστω U_{i_k} το στοιχείο του καλύμματος, για το οποίο ισχύει $\frac{1}{k} \in U_{i_k}$ για $k = 1, \ldots, m$. Τότε το σύνολο $\{U_j, U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του ανωτέρω καλύμματος, άρα το A είναι συμπαγές.

3. Έστω X ένας χώρος με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Τότε κάθε υποσύνολο A του X είναι συμπαγές. Πράγματι, έστω U_i, $i \in I$ ένα ανοικτό κάλυμμα του A. Θεωρούμε το στοιχείο U_j του ανωτέρω καλύμματος. Επειδή το U_j^c είναι πεπερασμένο έχουμε $A \backslash U_j = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ή $A \backslash U_j = \varnothing$. Στην πρώτη περίπτωση, έστω U_{i_k} το στοιχείο του ανωτέρω καλύμματος, για το οποίο ισχύει $a_k \in U_{i_k}$ για $k = 1, \ldots, n$. Τότε το σύνολο $\{U_j, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του καλύμματος U_i, $i \in I$. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $A \subseteq U_j$, άρα το $\{U_j\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του καλύμματος U_i, $i \in I$. Συνεπώς το A είναι συμπαγές.

4. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$, τότε το διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $\mathcal{G} = \{U_i / i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $[a, b]$ και S το σύνολο των στοιχείων x του $[a, b]$, για τα οποία το διάστημα $[a, x]$ καλύπτεται από κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$. Υπάρχει ένα στοιχείο U_j του καλύμματος $\mathcal{G}$, ώστε $a \in U_j$. Επειδή το U_j είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $[a, a + \varepsilon) \subset U_j$. Αν $c \in [a, a + \varepsilon)$, τότε προφανώς $c \in S$, άρα υπάρχει $c > a$, ώστε $c \in S$. Επειδή το S είναι φραγμένο έχει supremum, έστω $s = \sup S$, με $a < c \leq s \leq b$.
   Υποθέτουμε ότι $s < b$ και ονομάζουμε U_j το στοιχείο του καλύμματος $\mathcal{G}$, για το οποίο $s \in U_j$. Επειδή το U_j είναι ανοικτό υποσύνολο του $[a, b]$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $(-\varepsilon + s, s + \varepsilon) \subseteq U_j \subseteq [a, b]$. Επειδή $s = \sup S$ είναι $-\varepsilon + s \in S$, γιατί αλλιώτικα

$\sup S \leq -\varepsilon + s$, άρα $s \leq -\varepsilon + s$, αδύνατον. Άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{R}$ του $\mathcal{G}$, ώστε $[a, -\varepsilon + s] \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathcal{R}} U_i$. Τότε $\left[0, s + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{R}} U_i\right) \cup U_j$, άρα $s + \frac{\varepsilon}{2} \in S$, άτοπο, γιατί $s = \sup S$, συνεπώς $s = b$. Έστω U_k το στοιχείο του $\mathcal{G}$ για το οποίο $s = b \in U_k$. Επειδή το U_k είναι ανοικτό υποσύνολο του $[a, b]$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $(-\delta + b, b] \subseteq U_k$. Είναι $-\delta + b \in S$, άρα υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{M}$ του I, ώστε $[a, -\delta + b] \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathcal{M}} U_i$, άρα $[a, b] \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{M}} U_i\right) \cup U_k$, άρα το $\{U_i, \, / \, i \in \mathcal{M}\} \cup \{U_k\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$. Συνεπώς το $[a, b]$ είναι συμπαγές.

5. Ο $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής χώρος.
Η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο $\mathbb{R}$ είναι συμπαγής. Το $\{(-n, n)\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο N του $\mathbb{N}$, ώστε $\mathbb{R} \subseteq \bigcup\limits_{k \in N} (-k, k)$. Αν $n = \max\{k \, / \, k \in N\}$, τότε $\mathbb{R} \subseteq (-n, n)$, άτοπο. Συνεπώς το ζητούμενο αποδείχθηκε.

6. Το διάστημα $(0, 1)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Πράγματι, το $\mathcal{G} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2}\right) / \, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $(0, 1)$, το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, γιατί αν ένα $\mathcal{R}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$ και ο m μεγαλύτερος φυσικός, για τον οποίο $\left(\frac{1}{m}, \frac{3}{2}\right) \in \mathcal{R}$, τότε δεν υπάρχει στοιχείο του $\mathcal{R}$, στο οποίο ανήκει ο αριθμός $\frac{1}{m+1}$, άρα το $\mathcal{R}$ δεν καλύπτει το $(0, 1)$. Συνεπώς το $(0, 1)$ δεν είναι συμπαγές.

Ορισμός 5.1.3. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{G} = G_i, \, i \in I$ μια οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η $\mathcal{G}$ έχει την **ιδιότητα των πεπερασμένων τομών**, αν και μόνον, αν για κάθε μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο J του I ισχύει: $\bigcap\limits_{i \in J} G_i \neq \varnothing$.

Πρόταση 5.1.1. *Αν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X είναι συμπαγής.

β΄) Για κάθε οικογένεια $\mathcal{F} = \{F_i \, / \, i \in I\}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X, η οποία έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, ισχύει $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η $\mathcal{F} = \{F_i, \, / \, i \in I\}$ είναι μια οικογένεια μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X, με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, ώστε $\bigcap\limits_{i \in I} F_i = \varnothing$. Τότε

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i^c = X.$$

Συνεπώς το $\mathcal{G} = \{F_i^c \, / \, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και, εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχει μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο J του I, ώστε

$$\bigcup_{i \in J} F_i^c = X \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in J} F_i\right)^c = X$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing \, ,$$

άτοπο, γιατί η $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών.

β') ⇒ α'): Έστω $\mathcal{G} = \{U_i \,/\, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Αν για κάποιο $i \in I$ είναι $U_i = X$, τότε το $\mathcal{G}$ προφανώς έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Υποθέτουμε ότι $U_i \neq X$ για κάθε $i \in I$. Τότε η $\mathcal{F} = \{U_i^c \,/\, i \in I\}$ είναι μια οικογένεια μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X, με $\bigcap\limits_{i\in I} U_i^c = \Big(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\Big)^c = X^c = \varnothing$. Επομένως η οικογένεια $\mathcal{F}$ δεν έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, άρα υπάρχει μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο J του I, ώστε

$$\bigcap_{i\in J} U_i^c = \varnothing \Rightarrow \Big(\bigcup_{i\in J} U_i\Big)^c = \varnothing$$
$$\Rightarrow \bigcup_{i\in J} U_i = X,$$

άρα η $\mathcal{G}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα το $\{U_i \,/\, i \in J\}$. Συνεπώς ο X είναι συμπαγής. □

Πρόταση 5.1.2. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X, τότε το F είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω $F_i, i \in I$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του F, με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Τα F_i είναι κλειστά υποσύνολα του F και, επειδή το F είναι κλειστό υποσύνολο του X τα F_i θα είναι κλειστά υποσύνολα του X, με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, άρα $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$, συνεπώς το F είναι συμπαγής υπόχωρος του X, με την επαγόμενη από τον X τοπολογία. □

Πρόταση 5.1.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $F_1, \ldots, F_n$ συμπαγή υποσύνολα του X. Τότε το $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση δεν αληθεύει πάντα στην περίπτωση που το πλήθος των συμπαγών υποσυνόλων του χώρου είναι μη πεπερασμένο. Για παράδειγμα τα διαστήματα $[-n, n]$ είναι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αλλά το $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές.

Πρόταση 5.1.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff και H, F συμπαγή και ξένα υποσύνολα του X. Τότε υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα A, B του X, ώστε*

$$H \subseteq A \text{ και } F \subseteq B.$$

Απόδειξη: Έστωσαν $y \in F$ και $x \in H$. Επειδή ο X είναι Hausdorff και $x \neq y$, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U_x, V_x^y του X, με $x \in U_x$ και $y \in V_x^y$, ώστε $U_x \cap V_x^y = \varnothing$. Το σύνολο $\mathcal{G}_1 = \{U_x \,/\, x \in H\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του H και, επειδή το H είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο K του H, ώστε $H \subseteq \bigcup\limits_{x\in K} U_x$. Θεωρούμε τα σύνολα $A_y = \bigcup\limits_{x\in K} U_x$ και $B_y = \bigcap\limits_{x\in K} V_x^y$ για κάθε $y \in F$, τα οποία είναι προφανώς ανοικτά υποσύνολα του X. Αν $y \in F$, τότε $H \subseteq A_y$ και $A_y \cap B_y = \varnothing$. Το $\mathcal{G}_2 = \{B_y \,/\, y \in F\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του F και, επειδή το F είναι συμπαγές, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{F}_2 = \{B_{y_1}, \ldots, B_{y_n}\}$. Αν $A = A_{y_1} \cap \ldots \cap A_{y_n}$ και $B = B_{y_1} \cup \ldots \cup B_{y_n}$, τότε τα A, B είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, με $H \subseteq A$ και $F \subseteq B$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.1.5. *Έστω X χώρος Hausdorff και F συμπαγές υποσύνολο του X, τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Έστω $x \in F^c$, τότε, επειδή το $\{x\}$ είναι συμπαγές, από την πρόταση 5.1.4, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα A, B του X, ώστε $F \subseteq A$ και $x \in B$. Συνεπώς $x \in B \subseteq A^c \subseteq F^c$, άρα το F^c είναι ανοικτό, συνεπώς το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Από τις προτάσεις 5.1.4 και 5.1.5 προκύπτει το

Πόρισμα. *Κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός.*

Πρόταση 5.1.6. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής και επί απεικόνιση. Αν ο X είναι συμπαγής, τότε ο Y είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{G} = \{U_i \,/\, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του Y, τότε, επειδή τα $f^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X και

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(Y) \\ &= f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) \\ &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i), \end{aligned}$$

το $\mathcal{R} = \{f^{-1}(U_i) \,/\, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$ του $\mathcal{R}$, άρα

$$\begin{aligned} Y &= f(X) \\ &= f\big(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_k)\big) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_k)) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k, \end{aligned}$$

και, επειδή $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k \subseteq Y$ είναι $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$, συνεπώς το $\{U_1, \ldots, U_n\}$ είναι ένα ανοικτό και πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$, άρα ο Y είναι συμπαγής. □

Πόρισμα. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αν ο X είναι συμπαγής, τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Παρατήρηση: Η συμπάγεια είναι αναλλοίωτο στις συνεχείς απεικονίσεις. Επειδή οι ομοιομορφισμοί είναι ισχυρότεροι των συνεχών απεικονίσεων, κατά μείζονα λόγο, η συμπάγεια είναι αναλλοίωτη στους ομοιομορφισμούς, επομένως είναι ένα τοπολογικό αναλλοίωτο.

Πρόταση 5.1.7. *Αν οι τοπολογικοί χώροι X, Y είναι συμπαγείς, τότε ο $X \times Y$, με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{G} = \{U_i \times V_i \,/\, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $X \times Y$, με βασικά ανοικτά σύνολα. Άρα το $\{U_i \,/\, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και το $\{V_i \,/\, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του Y. Επειδή οι χώροι X και Y είναι συμπαγείς υπάρχουν μη κενά και πεπερασμένα υποσύνολα K, L του I, ώστε $X = \bigcup\limits_{i \in K} U_i$ και $Y = \bigcup\limits_{i \in L} V_i$, άρα $X \times Y = \bigcup\limits_{(i,j) \in K \times L} (U_i \times V_i)$. Το $K \times L$ είναι μη κενό και πεπερασμένο σύνολο, άρα το $\{U_i \times V_j \,/\, (i,j) \in K \times L\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$. Επομένως ο $X \times Y$ είναι συμπαγής. □

Με επαγωγή στο n αποδεικνύεται εύκολα η πρόταση [4]

Πρόταση 5.1.8. *Αν οι τοπολογικοί χώροι $X_1, \ldots, X_n$ είναι συμπαγείς, τότε ο χώρος $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συμπαγής.*

Παρατήρηση: Η αντίστροφη της συνεπαγωγής της προηγούμενης πρότασης αληθεύει προφανώς, γιατί αν ο χώρος $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι συμπαγής, τότε και ο $p_i(X) = X_i$ είναι συμπαγής για κάθε $i = 1, \ldots, n$, επειδή η προβολή p_i είναι συνεχής.

Παραδείγματα 5.1.2.

1. O $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγές σύνολο, γιατί είναι εικόνα του συμπαγούς $\mathbb{I}$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $f(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big)$.
2. O $\mathbb{D}^2$ είναι συμπαγές σύνολο, γιατί είναι εικόνα του συμπαγούς $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $f(x,t) = tx$.
3. O $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ δεν είναι συμπαγής χώρος, γιατί σε αντίθετη περίπτωση ο $p_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ θα ήταν συμπαγής, άτοπο.
4. O $\mathbb{B}^n$ δεν είναι συμπαγής χώρος, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα ήταν συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το $p_1(\mathbb{B}^n) = (-1, 1)$, άτοπο.
5. Είναι $(0,1) \not\cong [0,1]$, γιατί το δεύτερο είναι συμπαγές, ενώ το πρώτο δεν είναι.
6. Είναι $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{D}^2$, γιατί το δεύτερο είναι συμπαγές, ενώ το πρώτο δεν είναι.

Πρόταση 5.1.9. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση. Αν ο X είναι συμπαγής και ο Y Hausdorff, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής. Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X, άρα το A είναι συμπαγές υποσύνολο του X, άρα το $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, ο οποίος είναι χώρος Hausdorff, άρα το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Επομένως η f^{-1} είναι συνεχής. □

Ορισμός 5.1.4. Σπείρα ($\mathbb{T}$) ονομάζουμε την επιφάνεια, η οποία προκύπτει από την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από έναν άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και δεν τον τέμνει.

---

[4] Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι ο χώρος $\big(\prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i\big) \times X_n$ είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Έτσι, αν περιστρέψουμε τον κύκλο $(x-2)^2+z^2=1$ γύρω από τον άξονα των z, προκύπτει η σπείρα με εξίσωση

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1.$$

Πρόταση 5.1.10. *Ισχύει:*

$$\mathbb{T}\cong\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1.$$

Απόδειξη: Με εύκολους υπολογισμούς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{T}&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+z^2=1\}\\&=\{\big((2+\cos s)\cos t,(2+\cos s)\sin t,\sin s\big)/t\in[0,2\pi)\}.\end{aligned}$$

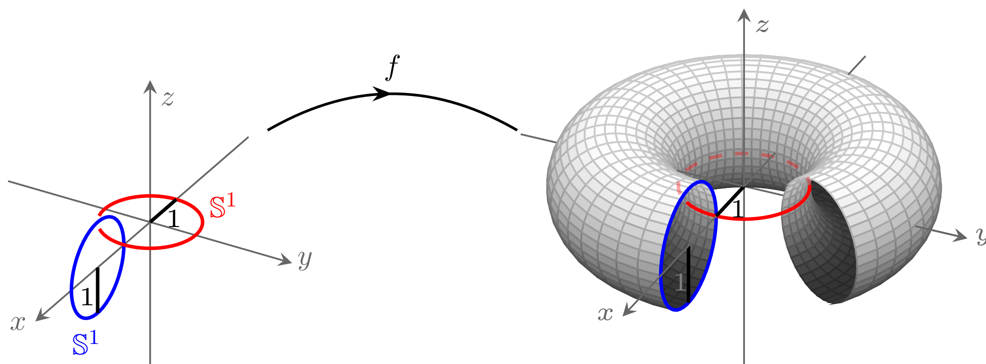
Επιπλέον έχουμε $\mathbb{S}^1=\{e^{it}/t\in[0,2\pi)\}$ και η απεικόνιση $f:\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{T}$, με

$$f(e^{it},e^{is})=\big((2+\cos s)\cos t,(2+\cos s)\sin t,\sin s\big)$$

είναι καλώς ορισμένη. Η συνέχεια της f αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς (πρόταση 2.1.10). Με στοιχειώδεις πράξεις αποδεικνύεται ότι η f είναι 1-1. Αν $(x,y,z)\in\mathbb{T}$, υπάρχει ζεύγος (e^{is},e^{it}), ώστε

$$z=\sin s,\ \cos s=\sqrt{x^2+y^2}-2,\ \sin t=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{και}\ \cos t=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

επομένως $f(e^{is},e^{it})=(x,y,z)$, άρα η f είναι επί. Ο $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{T}$, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι Hausdorff, άρα η f είναι ομοιομορφισμός. □



Σχήμα 5.1. $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$

Πρόταση 5.1.11. *Αν X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f:X\to\mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση, τότε το $f(X)$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το $f(X)$ δεν έχει μέγιστο. Τότε το $\mathcal{G} = \{(-\infty, a)/a \in f(X)\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$. Επειδή το $f(X)$ είναι συμπαγές, το $\mathcal{G}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, ας υποθέσουμε το $\mathcal{R} = \{(-\infty, a_1), \dots, (-\infty, a_n)\}$. Έστω $a_k = \max\{a_1, \dots, a_n\}$, τότε δεν υπάρχει στοιχείο του $\mathcal{R}$, το οποίο περιέχει το a_k, γιατί

$$\bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, a_i) = (-\infty, a_k),$$

άρα το $\mathcal{R}$ δεν είναι υποκάλλυμα του $\mathcal{G}$, άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι το $f(X)$ δεν έχει ελάχιστο. □

Ορισμός 5.1.5. Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζεται **συνεχές**, αν και μόνον, αν είναι συγχρόνως συμπαγές και συνεκτικό.

Πρόταση 5.1.12. *Αν X είναι συμπαγής και συνεκτικός χώρος Hausdorff και $X = K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ φθίνουσα ακολουθία συνεχών, τότε το $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι συνεχές.*

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι τα K_n είναι κλειστά υποσύνολα του X, ως συμπαγή υποσύνολα χώρου Hausdorff. Επομένως το $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι μη κενό, επειδή η ακολουθία $K_n, n \in \mathbb{N}$, εκ του τρόπου ορισμού της, έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών (πρόταση 5.1.1). Επιπλέον το $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα συμπαγές. Υποθέτουμε ότι το $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ δεν είναι συνεκτικό, άρα υπάρχουν μη κενά κλειστά υποσύνολα P και Q του K, άρα και του X, ώστε $K = P \cup Q$ και $P \cap Q = \varnothing$. Ο χώρος X είναι T_4 (συμπαγής και Hausdorff), άρα υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G, H του X, ώστε $G \cap H = \varnothing$, $P \subseteq H$ και $Q \subseteq G$. Θέτουμε $F_n = K_n \cap G^c \cap H^c$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\Big) \cap G^c \cap H^c &= K \cap G^c \cap H^c \\ &\subseteq K \cap Q^c \cap P^c = K \cap \big(Q \cup P\big)^c = \varnothing,\end{aligned}$$

άρα $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_k = \varnothing$. Έχουμε $F_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$. Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $F_n \neq \varnothing$, τότε θα πρέπει $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$ (πρόταση 5.1.1), το οποίο δεν αληθεύει. Συνεπώς υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $F_n = \varnothing$, άρα

$$\begin{aligned}(K_n \cap G^c) \cap (K_n \cap H^c) &= K_n \cap G^c \cap H^c \\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

Επιπλέον $K_n \subseteq G^c \cup H^c$, άρα $K_n = \big(K_n \cap G^c\big) \cup \big(K_n \cap H^c\big)$. Επομένως το K_n γράφεται ως ένωση δύο κλειστών και ξένων συνόλων και, επειδή είναι συνεκτικό θα πρέπει ένα

τουλάχιστον από αυτά, ας πούμε το $K_n \cap G^c$ να είναι κενό. Έχουμε

$$\begin{aligned} K_n \cap G^c = \varnothing \quad &\Rightarrow \quad K_n \subset G \\ &\Rightarrow P \cup Q = K \subset K_n \subseteq G \\ &\Rightarrow P \subseteq G \\ &\Rightarrow P \cap H \subseteq G \cap H = \varnothing \\ &\Rightarrow P = \varnothing\,, \end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως το K είναι και συνεκτικό, άρα το K είναι συνεχές. □

5.2 Τοπικά συμπαγείς χώροι-Συμπαγοποίηση

Ορισμός 5.2.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά συμπαγής**, αν και μόνον, αν για κάθε σημείο x του X, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο C_x του X, ώστε $x \in C_x^\circ$.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι η πρόταση

Πρόταση 5.2.1. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι τοπικά συμπαγής.*

Παραδείγματα 5.2.1.

1. Κάθε χώρος X με τη διακριτή τοπολογία είναι τοπικά συμπαγής χώρος, ενώ δεν είναι συμπαγής, αν το X είναι απειροσύνολο.
2. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής, αλλά είναι τοπικά συμπαγής, γιατί κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο εσωτερικό του συμπαγούς $[x-1, x+1]$.
3. Το $\mathbb{Q}$ με την Ευκλείδεια τοπολογία δεν είναι τοπικά συμπαγής. Την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα τη δούμε στην παράγραφο 7.2.

Πρόταση 5.2.2. *Η τοπική συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 5.2.2. Ο συμπαγής τοπολογικός χώρος Y ονομάζεται **συμπαγοποίηση** του τοπολογικού χώρου X, αν και μόνον, αν υπάρχει υπόχωρος X' του Y, ομοιόμορφος με τον X, ώστε $\overline{X'} = Y$.

Στην περίπτωση που το $Y \setminus X'$ είναι μονοσύνολο η συμπαγοποίηση ονομάζεται **συμπαγοποίηση με ένα σημείο** ή **συμπαγοποίηση Alexandroff**[5].

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι ουσιώδης λόγος για την όποια προσπάθεια συμπαγοποίησης ενός χώρου, υπάρχει μόνον όταν ο χώρος αυτός δεν είναι συμπαγής, γιατί σε αντίθετη περίπτωση η συμπαγοποίηση του χώρου είναι ο ίδιος ο χώρος.

[5]Pavel Sergeyevich Alexandroff (1896-1982): Ρώσος μαθηματικός

Λήμμα 5.2.3. *Αν C_i, $i \in I$ είναι μία οικογένεια γνησίων υποσυνόλων ενός χώρου Hausdorff X, ώστε $\bigcup\limits_{i\in I} C_i \neq X$ και τα C_i^c είναι συμπαγή για κάθε $i \in I$, τότε το $\big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big)^c$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έχουμε $\big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big)^c = \bigcap C_i^c$. Τα C_i^c είναι συμπαγή υποσύνολα του χώρου Hausdorff X, επομένως κλειστά υποσύνολα του X. Αν $i_0 \in I$, τότε το $\bigcap\limits_{i\in I} C_i^c$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς C_{i_0}, άρα συμπαγές, επομένως το $\big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big)^c$ είναι συμπαγές. □

Λήμμα 5.2.4. *Αν X ένας χώρος Hausdorff, A ανοικτό υποσύνολο του και C γνήσιο υποσύνολο του X, ώστε το C^c να είναι συμπαγές, τότε το $\big(A \cup C\big)^c$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έχουμε $\big(A\cup C\big)^c = A^c \cap C^c$. Το $A^c \cap C^c$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς C^c, άρα συμπαγές. □

Λήμμα 5.2.5. *Έστω X ένας μη συμπαγής χώρος Hausdorff και $\infty \notin X$. Τότε το σύνολο $\mathcal{T}$, το οποίο περιέχει*

α΄) Τα ανοικτά υποσύνολα του X.

β΄) Το $Y = X \cup \{\infty\}$ και

γ΄) Τα σύνολα της μορφής $C \cup \{\infty\}$, όπου C^c συμπαγές υποσύνολο του X

είναι μία τοπολογία στο σύνολο Y.

Απόδειξη:

i) $\varnothing \in \mathcal{T}$, γιατί το $\varnothing$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

ii) $Y \in \mathcal{T}$, εξ ορισμού του $\mathcal{T}$.

iii) Έστω $A_i \in \mathcal{T}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι $A_i \neq \varnothing$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να παραλείψουμε τα κενά σύνολα στην ένωση χωρίς αυτή να αλλάξει. Επίσης υποθέτουμε ότι $A_i \neq X$ για κάθε $i \in I$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση , αν για κάποιο $i \in I$ ισχύει $A_i = X$ ισχύει αυτό που θέλουμε, γιατί $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X \in \mathcal{T}$.
Διαμερίζουμε το σύνολο δεικτών I σε δύο υποσύνολα I' και I'', ώστε, αν $i \in I'$, τότε το A_i να είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $i \in I''$, τότε $A_i = C_i \cup \{\infty\}$, όπου το C_i^c είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X.

- Αν $I' = \varnothing$, τότε $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big) \cup \{\infty\}$, με τα C_i^c να είναι συμπαγή υποσύνολα του X. Αν $\bigcup\limits_{i\in I} C_i = X$, τότε, προφανώς $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$. Αν $\bigcup\limits_{i\in I} C_i \neq X$, τότε, από το λήμμα 5.2.3 έχουμε ότι το $\big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big)^c$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, άρα $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

- Αν $I'' = \varnothing$, τότε το $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, άρα $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

- Αν $I', I'' \neq \varnothing$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = \big(\bigcup_{i\in I'} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i\in I''} A_i\big)$. Το $\bigcup_{i\in I'} A_i = A$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $\bigcup_{i\in I''} A_i = X$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = Y \in \mathcal{T}$, άρα δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Αν $\bigcup_{i\in I''} A_i \neq X$, τότε $\bigcup_{i\in I''} A_i = B \cup \{\infty\}$, όπου το B^c είναι συμπαγές. Επομένως $\bigcup_{i\in I} A_i = (A\cup B)\cup\{\infty\}$ και το $(A\cup B)^c$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X (λήμμα 5.2.4), άρα $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Συνεπώς $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ σε κάθε περίπτωση.

iv) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ παραλείπουμε τις περιπτώσεις, όπου κάποιο από τα A_i είναι το κενό ή ολόκληρο το Y, στις οποίες το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα.

- Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, τότε το $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

- Αν $A_i = C_i \cup \{\infty\}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου C_1^c συμπαγές υποσύνολο του X, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \big(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\big) \cup \{\infty\}$. Επιπλέον, $\big(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\big)^c = \bigcup_{i=1}^{n} C_i^c$, το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο του X, επομένως $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

- Τέλος, υποθέτουμε ότι το $\{1, 2, \ldots, n\}$ διαμερίζεται σε δύο σύνολα K και K', ώστε, αν $i \in K$, τότε A_i να είναι ανοικτό υποσύνολο του X και, αν $i \in K'$, τότε $A_i = C_i \cup \{\infty\}$, με C_i^c συμπαγές υποσύνολο του X. Το C_i^c είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου Hausdorff X, επομένως το C_i^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το C_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $i \in K'$. Έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \Big(\bigcap_{i\in K} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in K'} (C_i \cup \infty)\Big)$$
$$= \Big(\bigcap_{i\in K} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in K'} C_i\Big),$$

το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$. Επομένως το $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο Y. □

Πρόταση 5.2.6. *Κάθε μη συμπαγής χώρος Hausdorff X έχει συμπαγοποίηση με ένα σημείο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε $\infty \notin X$ και το σύνολο $Y = X \cup \{\infty\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που περιγράψαμε στο λήμμα 5.2.5. Αν $\{U_i, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του Y, τότε υπάρχει $j \in I$, ώστε $\infty \in U_j$. Άρα το U_j^c είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X και

το $\{U_i, i \in I \setminus \{j\}\}$ ένα ανοικτό κάλυμμά του U_j^c. Επομένως, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I \setminus \{j\}$, ώστε $U_j^c \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$, άρα το $\{U_j, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{U_i, i \in I\}$, άρα ο Y είναι συμπαγής. Επιπλέον, το ∞ είναι ένα οριακό σημείο του X, γιατί κάθε περιοχή του ∞ τέμνει τον X. Επομένως $X \subseteq \overline{X}$ και $\infty \in \overline{X}$, άρα $X \cup \{\infty\} \subseteq \overline{X}$, δηλαδή

$$Y \subseteq \overline{X} \tag{5.1}$$

Εξ' άλλου $X \subseteq Y$, άρα $\overline{X} \subseteq \overline{Y} = Y$, δηλαδή

$$\overline{X} \subseteq Y \tag{5.2}$$

Από τις (5.1) και (5.2) συμπεραίνουμε ότι $\overline{X} = Y$, επομένως ο Y είναι μια με ένα σημείο συμπαγοποίηση του X. □

Πρόταση 5.2.7. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff, τότε η συμπαγοποίηση με ένα σημείο του X θα είναι Hausdorff και μοναδική καθ' ομοιομορφισμό, δηλαδή, αν Y, Z δύο με ένα σημείο συμπαγοποιήσεις του X, τότε $Z \cong Y$.*

Απόδειξη: Έστω Y η με ένα σημείο συμπαγοποίηση της προηγούμενης πρότασης και $x, y \in Y$, με $x \neq y$. Αν $x, y \in X$, τότε, επειδή ο X είναι Hausdorff, υπάρχουν ανοικτά και υποσύνολα U, V του X, άρα και του Y, με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \varnothing$. Αν $x \in X$ και $y = \infty$, τότε, επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο A του X, ώστε $x \in A^0$. Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, επειδή ο X είναι Hausdorff, συνεπώς το A είναι κλειστό υποσύνολο και του Y, άρα τα A^0 και $Y \setminus A$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Y προφανώς ξένα, με $x \in A^0$ και $\infty \in Y \setminus A$. Επομένως ο Y είναι Hausdorff.
Έστωσαν οι με ένα σημείο συμπαγοποιήσεις $Y = X \cup \{\infty\}$ και $Z = X \cup \{\infty'\}$ του X. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : Y \to Z$, με

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in X \\ \infty', & x = \infty \end{cases}.$$

Η f είναι προφανώς 1-1 και επί. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του Z. Αν το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε $f^{-1}(U) = U$, το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y. Αν $U = C \cup \{\infty'\}$, όπου C^c ένα συμπαγές υποσύνολο του X, τότε $f^{-1}(U) = C \cup \{\infty\}$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Άρα η f είναι συνεχής. Επιπλέον ο Y είναι συμπαγής και ο Z είναι Hausdorff, άρα η f είναι ομοιομορφισμός. Άρα $Y \cong Z$, δηλαδή η συμπαγοποίηση με ένα σημείο είναι μοναδική καθ' ομοιομορφισμό. □

Παραδείγματα 5.2.2.

1. Ο $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ δεν είναι συμπαγής, ως ομοιόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε $\big(\mathbb{S}^n \setminus \{a\}\big) \cup \{a\} = \mathbb{S}^n$, και $\overline{\mathbb{S}^n \setminus \{a\}} = \mathbb{S}^n$. Άρα ο $\mathbb{S}^n$ είναι η με ένα σημείο συμπαγοποίηση του $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$. Κάνοντας χρήση του ομοιομορφισμού $\mathbb{S}^n \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n$, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, αν $\infty \notin \mathbb{R}^n$ είναι η με ένα σημείο συμπαγοποίηση του $\mathbb{R}^n$.

2. Με τα ίδια επιχειρήματα αποδεικνύουμε ότι ο χώρος $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι η με ένα σημείο συμπαγοποίηση του χώρου $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}\}$. Όπως επίσης το διάστημα [0,1] είναι η με ένα σημείο συμπαγοποίηση των διαστημάτων (0,1] και [0,1).

5.3 Ασκήσεις

1. Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(X, \mathcal{T}_2)$, με $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Αν ο δεύτερος είναι συμπαγής, να αποδείξετε ότι και ο πρώτος είναι συμπαγής. Με ένα αντιπαράδειγμα να δείξετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

2. Αν ο X είναι χώρος Hausdorff και A, B συμπαγή υποσύνολα του X, να δείξετε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Δείξτε ότι αν παραλείψουμε την υπόθεση του Hausdorff, δεν εξάγεται απαραίτητα το ίδιο συμπέρασμα.
Υπόδειξη: Το πρώτο ερώτημα είναι εύκολο. Για το δεύτερο θεωρούμε x_1, $x_2 \notin \mathbb{N}$ και το σύνολο $M = \{x_1, x_2\} \cup \mathbb{N}$. Ορίζουμε στο M τοπολογία, η οποία αποτελείται από το $\varnothing$, το M και τα όλα τα γνήσια υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Τα σύνολα $\{x_1\} \cup \mathbb{N}$ και $\{x_2\} \cup \mathbb{N}$ είναι συμπαγή, γιατί οποιοδήποτε ανοικτό κάλυμμά τους θα περιέχει το M, άρα θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Όμως το $(\{x_1\} \cup \mathbb{N}) \cap (\{x_2\} \cup \mathbb{N}) = \mathbb{N}$ δεν είναι συμπαγές, γιατί το $\{\{n\} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{N}$, χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

3. Αν A_i, $i \in I$ είναι μια οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων ενός χώρου Hausdorff X, να δειχθεί ότι το $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.
Απόδειξη: Τα A_i είναι συμπαγή υποσύνολα του χώρου Hausdorff X, άρα τα A_i είναι κλειστά υποσύνολα του X, άρα το $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του A_1, άρα συμπαγές.

4. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και $f : X \to X$ συνεχής απεικόνιση. Να δείξετε ότι, υπάρχει μη κενό κλειστό υποσύνολο F του X, ώστε $f(F) = F$.
Υπόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{K}$ των κλειστών υποσύνολων A του X, για τα οποία $f(A) \subseteq A$. Το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό, γιατί $f(X) \subseteq X$. Στο $\mathcal{K}$ ορίζουμε σχέση $\ll$, ως εξής:

$$A \ll B \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A.$$

Το σύνολο $\mathcal{K}$ με την παραπάνω σχέση είναι μερικώς διατεταγμένο. Αποδείξτε ότι κάθε αλυσίδα στο $\mathcal{K}$ είναι άνω φραγμένη. Από το λήμμα Zorn, έπεται ότι το $\mathcal{K}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω F. Τότε

$$\begin{aligned} f(F) \subseteq F &\Rightarrow F \ll f(F) \\ &\Rightarrow f(F) = F. \end{aligned}$$

5. Αν ο χώρος $(X, \mathcal{T}_1)$ είναι συμπαγής, ο χώρος $(X, \mathcal{T}_2)$ είναι Hausdorff και $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, να δείξετε ότι $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε την ταυτοτική απεικόνιση $i : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, η οποία, σχετικά εύκολα, αποδεικνύεται ότι είναι ομοιομορφισμός, άρα τα ανοικτά υποσύνολα του X, ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_1$ είναι και ανοικτά υποσύνολα του X, ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_2$, δηλαδή $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

6. Αν ο X είναι μη συμπαγής και τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και Y η με ένα σημείο συμπαγοποίηση του X, να δειχθεί ότι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος, αν και μόνον, αν ο Y είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

7. Αν A, $B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathbb{I} \cong A \times B$, τι συμπεραίνετε για τα σύνολα A και B;
Υπόδειξη: Το $A \times B$, ως ομοιόμορφο του $\mathbb{I}$ είναι συμπαγές και συνεκτικό, επομένως συμπαγή και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα σύνολα $p_1(A \times B)$ και $p_2(A \times B)$. Συνεχίζοντας καταλήγουμε στο ότι ένα εκ των A ή B είναι μονοσύνολο και το άλλο μη τετριμμένο διάστημα της μορφής $[a, b]$.

8. (Λήμμα του σωλήνα) Αν X, Y τοπολογικοί χώροι με τον Y να είναι συμπαγής, να δειχθεί ότι για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $X \times Y$, για το οποίο $\{x\} \times Y \subseteq U$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W του X, ώστε $\{x\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq U$.
Απόδειξη: Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$, για το οποίο $\{x\} \times Y \subseteq U$. Αν $y \in Y$, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα $A_{x,y}$ και $B_{x,y}$ των X και Y, αντιστοίχως, ώστε $(x, y) \in A_{x,y} \times B_{x,y} \subseteq U$. Το $\mathcal{R} = \{B_{x,y}/y \in Y\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του Y και, επειδή ο Y είναι συμπαγής, υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in Y$, ώστε $\bigcup_{i=1}^{n} B_{x,y_i} = Y$. Το $W = \bigcap_{i=1}^{n} A_{x,y_i}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, με $x \in W$. Επιπλέον $A_{x,y_i} \times Y \subseteq U$ για κάθε $i \in \{1, \dots, .n\}$, άρα $\{x\} \times Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \big(A_{x,y_i} \times Y\big) = W \times Y \subseteq U$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

9. Αν X, Y τοπολογικοί χώροι με τον Y να είναι συμπαγής, να δειχθεί ότι η προβολή $p_1 : X \times Y \to X$ είναι κλειστή απεικόνιση.
Απόδειξη: Έστω C ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$ και $x_0 \in X \setminus p_1(C)$. Τότε το $\{x_0\} \times Y$ περιέχεται στο ανοικτό υποσύνολο $\big(X \times Y\big) \setminus C$ του $X \times Y$. Άρα, από την προηγούμενη άσκηση, υπάρχει περιοχή W του x_0, ώστε $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq \big(X \times Y\big) \setminus C$, άρα $(x, y) \notin C$ για κάθε $x \in W$ και για κάθε $y \in Y$, άρα $x_0 \in W \subseteq X \setminus p_1(C)$, άρα το $X \setminus p_1(C)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το $p_1(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα η p_1 είναι κλειστή απεικόνιση.

10. Έστω X τοπολογικός χώρος, Y χώρος συμπαγής και Hausdorff και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   α′) Η f είναι συνεχής.

   β′) Το γράφημα $C_f = \{(x, f(x))/x \in X\}$ της f είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$.

   Απόδειξη: α′) ⇒ β′): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το C_f δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Άρα $\overline{C_f} \setminus C_f \neq \varnothing$. Άρα υπάρχει $(x, y) \in \overline{C_f}$, ώστε $y \neq f(x)$. Επειδή ο Y είναι χώρος Hausdorff υπάρχουν ξένες περιοχές U, V των $y, f(x)$ αντιστοίχως. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει περιοχή W του x, ώστε $f(W) \subseteq V$. Το $W \times U$ είναι μία περιοχή του (x, y), άρα $A = \big(W \times U\big) \cap C_f \neq \varnothing$. Άρα

$$\begin{aligned}(a,b)\in A &\Rightarrow a\in W \wedge b=f(a)\in U\\ &\Rightarrow f(a)\in U\cap V\\ &\Rightarrow U\cap V\neq\varnothing,\end{aligned}$$

άτοπο.
β') ⇒ α'): Έστω $x_0 \in X$ και V περιοχή του $f(x_0)$. Το $Y\setminus V$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα το $C = C_f \cap \big(X \times (Y \setminus V)\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, άρα, από την προηγούμενη άσκηση, το $p_1(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, επομένως το $U = X \setminus p_1(C)$ είναι μια περιοχή του x_0. Θα δείξουμε ότι $f(U) \subseteq V$. αν ισχύει το αντίθετο, τότε υπάρχει $x \in U$, με $f(x) \notin V$. Τότε $(x, f(x)) \in C$, άρα $x \in p_1(C)$, άρα $U \cap p_1(C) \neq \varnothing$, άτοπο. Επομένως $f(U) \subseteq V$, άρα η f είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο x_0, άρα είναι συνεχής.

11. Να δειχθεί ότι $\mathbb{S}^1 \cong SO(\mathbb{R}, 2)$.

    Υπόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to SO(\mathbb{R}, 2)$, με $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, η οποία είναι καλώς ορισμένη, συνεχής, 1-1 και επί. Επιπλέον, ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγής και ο $SO(\mathbb{R}, 2)$, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, είναι Hausdorff, άρα η f είναι ομοιομορφισμός, επομένως $SO(\mathbb{R}, 2) \cong \mathbb{S}^1$.

12. Αν G συμπαγές υποσύνολο του X και A κλειστό υποσύνολο του X, να δειχθεί ότι το $G \cap A$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

13. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$, με την συναριθμήσιμη τοπολογία, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_c$. Να αποδείξετε ότι ο χώρος αυτός είναι τοπικά συνεκτικός, αλλά δεν είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός.

    Απόδειξη:

    - Ισχυρισμός 1: Τα μόνα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα πεπερασμένα.
      Απόδειξη του ισχυρισμού 1: Έστω B ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}_c$ και B_0 ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του B. Κάθε σύνολο της μορφής $U_b = \{b\} \cup B_0^c$, $b \in B_0$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}_c$, γιατί $U_b^c = \{b\}^c \cap B_0 = B_0 \setminus \{b\}$, το οποίο είναι αριθμήσιμο. Επιπλέον $\bigcup\limits_{b\in B_0} U_b = \Big(\bigcup\limits_{b\in B_0}\{b\}\Big) \bigcup \Big(\mathbb{R}\setminus B_0\Big) = \mathbb{R}_c$, άρα το $\mathcal{G} = \{U_b, b \in B_0\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του B. Κάθε πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$ καλύπτει μόνον ένα πεπερασμένο υποσύνολο του B_0, άρα δεν καλύπτει το B, άρα το B δεν είναι συμπαγές.
    - Ισχυρισμός 2: Αν C ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}_c$, τότε το C είναι η μονοσύνολο ή υπεραριθμήσιμο.
      Απόδειξη του ισχυρισμού 2: Έστω ότι το C είναι αριθμήσιμο με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Τότε το C γράφεται $C = C_1 \cup C_2$, όπου C_1, C_2 αριθμήσιμα, μη κενά και $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Τα C_1^c, C_2^c είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με $C_1 \subseteq C_2^c$ και $C_2 \subseteq C_1^c$.
      Άρα $C \subseteq C_1^c \cup C_2^c$ και $C_1^c \cap C \neq \varnothing$, $C_2^c \cap C \neq \varnothing$. Επομένως το C είναι μη συνεκτικό, άρα η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

- Ισχυρισμός 3: Αν U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}_c$, τότε το U είναι συνεκτικό και υπεραριθμήσιμο.
  Απόδειξη του ισχυρισμού 3: Το ότι το U είναι συνεκτικό είναι συνέπεια του ότι δεν υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}_c$. Τέλος, επειδή το U είναι ανοικτό, το U^c είναι αριθμήσιμο, άρα το U είναι υπεραριθμήσιμο.

- Ισχυρισμός 4: Ο χώρος $\mathbb{R}_c$ είναι τοπικά συνεκτικός.
  Απόδειξη του ισχυρισμού 4: Έστω $x \in \mathbb{R}_c$ και $\mathcal{B}_x$ μια βάση περιοχών του x. Από τον ισχυρισμό 3 τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}_x$, ως ανοικτά σύνολα είναι συνεκτικά, άρα ο χώρος $\mathbb{R}_c$ είναι τοπικά συνεκτικός.

- Ισχυρισμός 5: Ο χώρος $\mathbb{R}_c$ δεν είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός.
  Απόδειξη του ισχυρισμού 5: Έστω U μια περιοχή του $x \in \mathbb{R}_c$. Το U είναι υπεραριθμήσιμο, επομένως, υπάρχουν $x, y \in U$, με $x \neq y$. Αν $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}_c$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε το $\gamma(\mathbb{I})$ είναι συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}_c$, άρα μονοσύνολο, επομένως δεν υπάρχει δρόμος, ο οποίος συνδέει τα x και y. Άρα η οποιαδήποτε βάση περιοχών του x δεν περιέχει κανένα δρομοσυνεκτικό σύνολο, επομένως το ζητούμενο αποδείχθηκε.

6 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ TYCHONOFF

6.1 Καρτεσιανή τοπολογία και τοπολογία Tychonoff

Στο παρόν κεφάλαιο θα μας απασχολήσει η τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων, η οποία έχει σύνολο δεικτών, όχι απαραίτητα πεπερασμένο, όπως έχουμε δει έως τώρα.[1] Ο φυσικός τρόπος να εισαγάγουμε τοπολογία σε ένα τέτοιο γινόμενο είναι η γενίκευση της τοπολογίας που είδαμε στην πρόταση 1.5.5, η οποία περιγράφεται στην επόμενη πρόταση

Πρόταση 6.1.1. *Αν* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων, τότε το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \Big\{ \prod_{i\in I} U_i \,/\, U_i \in \mathcal{T}_i \Big\}$$

είναι βάση για μια τοπολογία στο $X = \prod_{i\in I} X_i$.

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\bigcup_{C\in\mathcal{B}} C &= \bigcup \Big\{ \prod_{i\in I} U_i \,/\, U_i \in \mathcal{T}_i \Big\} \\ &= \prod_{i\in I} \big(\bigcup_{U_i\in\mathcal{T}_i} U_i \big) = \prod_{i\in I} X_i = X,\end{aligned}$$

[1] Ο αναγνώστης πρέπει να ανατρέξει στον ορισμό 20.1.8., για να δει πως ορίζουμε το $\prod_{i\in I} X_i$ και την πρόταση 20.1.18., για τις ιδιότητες του $\prod_{i\in I} X_i$.

επομένως ικανοποιείται η πρώτη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 για τη βάση. Επίσης έχουμε

$$a \in \big(\prod_{i\in I} U_i\big) \cap \big(\prod_{i\in I} V_i\big) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow a_i \in U_i \in \mathcal{T}_i \wedge a_i \in V_i \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow a_i \in U_i \cap V_i \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow a \in \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i) \in \mathcal{B},$$

άρα $\prod_{i\in I} U_i \cap \prod_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i) \in \mathcal{B}$, επομένως ικανοποιείται και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 για τη βάση. □

Ορισμός 6.1.1. Η τοπολογία στο σύνολο $\prod_{i\in I} X_i$, η οποία έχει ως βάση το σύνολο $\mathcal{B}$ της πρότασης 6.1.1, ονομάζεται **καρτεσιανή τοπολογία** ή **box τοπολογία**.

Η καρτεσιανή τοπολογία είναι μεν ένας φυσικός τρόπος για να εισαχθεί στον $X = \prod_{i\in I} X_i$ τοπολογία, αλλά, με τον τρόπο αυτόν, όπως θα δούμε οι βασικές τοπολογικές ιδιότητες των επιμέρους χώρων, όπως η συνεκτικότητα και η συμπάγεια, δεν μεταφέρονται στον χώρο X. Ο Tychonoff[2] είχε την ευφυή ιδέα της εισαγωγής τοπολογίας στον X, η οποία είναι πτωχότερη της καρτεσιανής τοπολογίας, αλλά μεταφέρει τις περισσότερες από τις τοπολογικές ιδιότητες των επιμέρους χώρων στον χώρο X. Η ουσία της ιδέας του Tychonoff βρίσκεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.1.2. *Αν $(X_i, \mathcal{T}_i)$ είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων, τότε το σύνολο $\mathcal{B}$, το οποίο έχει ως στοιχεία τα γινόμενα $\prod_{i\in I} U_i$, με $U_i \in \mathcal{T}_i$ και $U_i \neq X_i$ μόνον για ένα πεπερασμένο πλήθος δεικτών είναι βάση για μια τοπολογία στο X.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση έχουμε $X = \prod_{i\in I} X_i \in \mathcal{B}$. Επιπλέον, $C \subseteq \prod_{i\in I} X_i = X$ για κάθε $C \in \mathcal{B}$, άρα $X \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{B}} C \subseteq X$, δηλαδή $\bigcup_{C\in\mathcal{B}} C = X$, επομένως ικανοποιείται η πρώτη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 για τη βάση.
Έστω ότι $\prod_{i\in I} U_i, \prod_{i\in I} V_i \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα J, K του I, ώστε

$$U_i \neq X_i \Leftrightarrow i \in J \text{ και } V_i \neq X_i \Leftrightarrow i \in K.$$

Είναι

$$\prod_{i\in I} U_i \cap \prod_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i)$$

και

$$U_i \cap V_i \neq X_i \quad \Leftrightarrow \quad i \in J \cup K,$$

άρα, επειδή το $J \cup K$ είναι πεπερασμένο, έχουμε

[2] Andrei Nikolaevich Tychonoff (1906-1993): Ρώσος μαθηματικός.

$$\prod_{i\in I} U_i \cap \prod_{i\in I} V_i \in \mathcal{B}.$$

Συνεπώς ικανοποιείται και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 1.5.3 για τη βάση. □

Ορισμός 6.1.2. Η τοπολογία στο σύνολο $\prod\limits_{i\in I} X_i$, η οποία έχει ως βάση το σύνολο $\mathcal{B}$ της πρότασης 6.1.2 ονομάζεται **τοπολογία Tychonoff** ή **τοπολογία γινόμενο** και το σύνολο $\mathcal{B}$ λέγεται, συνήθης βάση της τοπολογίας Tychonoff.

Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι η πρόταση

Πρόταση 6.1.3. *Αν $\mathcal{T}_c, \mathcal{T}_p$ είναι η καρτεσιανή και η τοπολογία Tychonoff, αντιστοίχως στο σύνολο $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, τότε*

α΄) $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_c$ και

β΄) $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_p$, αν, και μόνον αν, το I είναι πεπερασμένο.

Παρατήρηση: Δηλαδή η τοπολογία Tychonoff είναι πτωχότερη της καρτεσιανής τοπολογίας και ταυτίζονται μόνον στην περίπτωση που έχουμε καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους παραγόντων.

Πρόταση 6.1.4. *Το σύνολο*

$$\mathcal{W} = \Big\{ U \times \prod_{i\in I\setminus\{j\}} X_i \,/\, j \in I, U \in \mathcal{T}_j \Big\}$$

είναι μια υποβάση της τοπολογίας Tychonoff στον χώρο $\prod\limits_{i\in I} X_i$.

Απόδειξη: Έστω $U_{j_1} \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j_1\}} X_i, \ldots, U_{j_n} \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j_n\}} X_i \in \mathcal{W}$, τότε $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Big(U_{j_k} \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j_k\}} X_i \Big) = \prod\limits_{i\in I} U_i$, με $U_i \in \mathcal{T}_i$ και $U_i \neq X_i$, αν και μόνον, αν $i = j_1, \ldots, j_n$. Άρα $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (U_{j_k} \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j_k\}} X_i) \in \mathcal{B}$.

Αντιστρόφως. Αν $V \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του I και $U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I$, ώστε $V = \prod\limits_{i\in I} U_i$ με $U_i \neq X_i$, αν και μόνον, αν $i \in J$. Άρα $V = \bigcap\limits_{i\in J} (U_i \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j)$ και $U_i \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \in \mathcal{W}$ για κάθε $i \in J$. Επομένως το $\mathcal{W}$ είναι μια υποβάση της τοπολογίας Tychonoff στον χώρο $\prod\limits_{i\in I} X_i$. □

Ορισμός 6.1.3. Αν $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, τότε ονομάζουμε i-**προβολή του** X την απεικόνιση

$$p_i : X \to X_i, \text{ με } p_i(a) = a(i).$$

Λήμμα 6.1.5.

α΄) $A \subseteq X_j \quad \Rightarrow \quad p_j^{-1}(A) = A \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i\,.$

β΄) $A_j \subseteq X_j \quad \forall j \in J \subseteq I \quad \Rightarrow \quad \bigcap\limits_{j\in J} p_j^{-1}(A_j) = \big(\prod\limits_{j\in J} A_j \big) \times \big(\prod\limits_{i\in I\setminus J} X_i \big).$

Απόδειξη:

α′)
$$a \in p_j^{-1}(A) \Leftrightarrow p_j(a) \in A$$
$$\Leftrightarrow a \in \big(A \times \prod_{i \in I\setminus\{j\}} X_i\big),$$

επομένως ισχύει το ζητούμενο.

β′)
$$a \in \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(A_j) \Leftrightarrow a \in p_j(A_j) \quad \forall j \in J$$
$$\Leftrightarrow p_j(a) \in A_j \quad \forall j \in J$$
$$\Leftrightarrow a \in \big(\prod_{j\in J} A_j\big) \times \big(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\big),$$

επομένως ισχύει το ζητούμενο.

□

Πρόταση 6.1.6. *Η τοπολογία Tychonoff ($\mathcal{T}_c$) στον $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι η πτωχότερη τοπολογία, ως προς την οποία όλες οι i-προβολές του X είναι συνεχείς απεικονίσεις.*

Απόδειξη: Έστω η $i-$ προβολή, $p_i : X \to X_i$. Αν $U \in \mathcal{T}_i$, τότε $p_i^{-1}(U) = U \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \in \mathcal{T}_c$, άρα η p_i είναι συνεχής.
Αν $\mathcal{T}'$ είναι μια τοπολογία στο X, ως προς την οποία όλες οι i-προβολές είναι συνεχείς, τότε για κάθε $i \in I$ και για κάθε $U \in \mathcal{T}_i$ είναι $p_i^{-1}(U) = U \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$, άρα $U \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \in \mathcal{T}'$, άρα η $\mathcal{T}'$ περιέχει μια υποβάση της $\mathcal{T}$ (πρόταση 6.1.4), συνεπώς $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ (πρόταση 1.5.8). □

Άμεση συνέπεια της πρότασης 6.1.6 είναι ο εξής ισοδύναμος ορισμός της τοπολογίας Tychonoff

Ορισμός 6.1.4. Τοπολογία Tychonoff στον χώρο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι η τοπολογία, η οποία έχει ως υποβάση το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα $p_i^{-1}(U_i)$, όπου U_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$.

Πρόταση 6.1.7. *Όλες οι κανονικές προβολές του $\prod_{i\in I} X_i$ και ως προς τις δύο τοπολογίες (καρτεσιανή και Tychonoff) είναι ανοικτές απεικονίσεις.*

Απόδειξη: Θα κάνουμε τη απόδειξη για την τοπολογία Tychonoff, Παρόμοια, ίσως πιο εύκολη, είναι και η απόδειξη για την καρτεσιανή τοπολογία.
Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$. Άρα υπάρχει οικογένεια $U_k, k \in K$ στοιχείων της συνήθους βάσης του $\prod_{i\in I} X_i$, ώστε $U = \bigcup_{k\in K} U_k$. Έχουμε $p_i(U) = \bigcup_{k\in K} p_i(U_k)$. Για να αποδείξουμε ότι το $p_i(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ένα από τα $p_i(U_k)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i. Έχουμε $U_k = \big(\prod_{j\in J} V_j\big) \times \big(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\big)$, όπου J ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I και V_j ένα ανοικτό υποσύνολο του X_j.

- Αν $i \in J$, τότε $p_i(U_k) = V_i$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X_I.

- Αν $i \notin J$, τότε $p_i(U_k) = X_i$, το οποίο είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του X_i.

Άρα σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο αληθεύει. □

Παρατήρηση: Οι i-προβολές, όπως είδαμε και στην παρατήρηση της πρότασης 2.2.1 δεν είναι απαραίτητα κλειστές απεικονίσεις.

Πρόταση 6.1.8. *Έστωσαν ο τοπολογικός χώρος $X = \prod_{i \in I} X_i$, με την τοπολογία Tychonoff, Y τοπολογικός χώρος και απεικόνιση $f : Y \to X$. Τότε η f είναι συνεχής, αν και μόνον, αν οι $p_i \circ f$ είναι συνεχείς για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι προφανές.

Το ικανό: Έστω V ένα υποβασικό σύνολο του X, τότε $V = U \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$, όπου $j \in I$ και U ανοικτό υποσύνολο του X_j. Είναι

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(p_j^{-1}(U)) = (p_j \circ f)^{-1}(U),$$

το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, αφού η $p_j \circ f$ είναι συνεχής. Συνεπώς η f είναι συνεχής. □

Παρατήρηση: Αν ο χώρος X είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία, δεν ισχύει απαραίτητα η ικανή συνθήκη της ανωτέρω πρότασης. Εδώ για πρώτη φορά βλέπουμε την περίπτωση που η καρτεσιανή τοπολογία δεν συμπεριφέρεται "καλά", όταν το πλήθος των παραγόντων είναι άπειρο. Παράδειγμα, στον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία, θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με $f(x) = (x, \ldots, x, \ldots)$. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $p_n \circ f$ είναι συνεχής. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0, τότε για την περιοχή $U = \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ του $(0, \ldots, 0, \ldots)$, υπάρχει περιοχή V του 0 στον $\mathbb{R}$, ώστε $f(V) \subseteq U$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f((-\delta, \delta)) \subseteq U$, άρα $(-\delta, \delta) \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο.

Πρόταση 6.1.9. *Έστωσαν $(X_n, d_n), n \in \mathbb{N}$ μετρικοί χώροι, τότε*

α΄) Η απεικόνιση $d : X = \prod_{i \in I} X_i \to \mathbb{R}$, με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ είναι μια μετρική στον X.

β΄) Η τοπολογία που εισάγει στον X η μετρική d ταυτίζεται με την τοπολογία Tychonoff στον X, αν η τοπολογία σε κάθε χώρο X_n είναι η $\mathcal{T}_{d_n}$.

Απόδειξη:

α΄) Η απόδειξη όπως στην περίπτωση 7 των παραδειγμάτων 1.1.1. □

β΄) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία Tychonoff και $\mathcal{T}_d$ η τοπολογία που εισάγει η μετρική d. Αν $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} d(x,y) < \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_x,y_n)} < \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ &\Rightarrow \quad \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_x,y_n)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ &\Rightarrow \quad d_n(x_n,y_n) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad d_n(p_n(x),p_n(y)) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η κανονική προβολή p_n είναι συνεχής, άρα

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d, \tag{6.1}$$

(πρόταση 6.1.6).

Για το αντίστροφο, έστω $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος, ώστε $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Αν $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{n}$ και $U = \prod\limits_{k=1}^{n} S(x_k,\varepsilon_1) \times \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} X_k \in \mathcal{T}$, τότε

$$\begin{aligned} y \in U \Rightarrow \quad d(x,y) &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_k,y_k)}{1+d_k(x_k,y_k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_k,y_k)}{1+d_k(x_k,y_k)} \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varepsilon_1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \\ &\Rightarrow y \in S(x,\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

άρα $x \in U \subseteq S(x,\varepsilon)$, άρα $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}$, επομένως

$$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}. \tag{6.2}$$

Από τις (6.1) και (6.2), έπεται το ζητούμενο. □

6.2 Τα αναλλοίωτα των χώρων $\prod\limits_{i\in I} X_i$

Πρόταση 6.2.1. *Αν οι χώροι X_i, $i \in I$ είναι T_1, τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία και την τοπολογία Tychonoff είναι επίσης T_1.*

Απόδειξη: Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$. Άρα υπάρχει $j \in I$, ώστε $x(j) \neq y(j)$. Επειδή ο χώρος X_j είναι T_1 υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X_j, ώστε $x(j) \notin U$ και $y(j) \in U$. Το $V = U \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και ως προς τις δύο τοπολογίες που αναφέραμε, με $x \notin V$ και $y \in V$. Επομένως ο X είναι χώρος T_1. □

Πρόταση 6.2.2. *Αν οι χώροι X_i, $i \in I$ είναι Hausdorff, τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, με την καρτεσιανή τοπολογία και την τοπολογία Tychonoff είναι επίσης Hausdorff.*

Απόδειξη: Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$. Άρα υπάρχει $j \in I$, ώστε $x(j) \neq y(j)$. Επειδή ο χώρος X_j είναι Hausdorff υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U_1 και U_2 του X_j, ώστε $x(j) \in U_1$ και $y(j) \in U_2$. Τα $V_1 = U_1 \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$ και $V_2 = U_2 \times \prod\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$ είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X και ως προς τις δύο τοπολογίες που αναφέραμε, με $x \in V_1$ και $y \in V_2$. Επομένως ο X είναι Hausdorff. □

Λήμμα 6.2.3. *Αν X_i, $i \in I$ είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\varnothing \neq A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$, τότε*

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

και ως προς την καρτεσιανή τοπολογία και ως προς την τοπολογία Tychonoff.

Απόδειξη: Αρχικά θα αποδείξουμε το λήμμα για την καρτεσιανή τοπολογία.
Έστω $y \in \overline{\prod\limits_{i\in I} A_i}$ και U ένα στοιχείο της συνήθους βάσης του $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία, με $y \in U$, τότε $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$, όπου U_i είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$, με $y_i \in U_i$. Είναι $U \cap \prod\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, άρα $U_i \cap A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$. Το U_i είναι περιοχή του $p_i(y) = y_i$ στον X_i για κάθε $i \in I$, επομένως $y_i \in \overline{A_i}$ για κάθε $i \in I$, άρα $y \in \prod\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, δηλαδή

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i} \tag{6.3}$$

Για την απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού έχουμε: Έστω $y \in \prod\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, άρα $p_i(y) = y_i \in \overline{A_i}$ για κάθε $i \in I$. Επομένως, αν $i \in I$ και U_i είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X_i, με $y_i \in U_i$, τότε $U_i \cap A_i \neq \varnothing$. Το $\prod\limits_{i\in I} U_i$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\prod\limits_{i\in I} X_i$, με $y \in \prod\limits_{i\in I} U_i$ και $\prod\limits_{i\in I} U_i \cap \prod\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, άρα $y \in \overline{\prod\limits_{i\in I} A_i}$, δηλαδή

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} A_i} \tag{6.4}$$

Από τις (6.3) και (6.4) έπεται το ζητούμενο.
Η απόδειξη για την τοπολογία Tychonoff είναι η εξής:
Έστω $y \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$ και U_i ένα ανοικτό σύνολο του X_i, με $y_i \in U_i$. Το $V = p_i^{-1}(U_i)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, με $y \in V$, επομένως

$$\begin{aligned} V \cap \big(\prod_{i\in I} A_i\big) \neq \varnothing &\Rightarrow p_i\Big(V \cap \big(\prod_{i\in I} A_i\big)\Big) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow p_i\Big((U_i \cap A_i) \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} A_j\Big) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow U_i \cap A_i \neq \varnothing \\ &\Rightarrow y_i \in \overline{A_i} \\ &\Rightarrow y \in \big(\prod_{i\in I} \overline{A_i}\big), \end{aligned}$$

άρα

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i} \tag{6.5}$$

Έστω $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, άρα $x_i \in \overline{A_i}$ για κάθε $i \in I$. Αν V είναι ένα στοιχείο της συνήθους βάσης του X, με $x \in V$, τότε $V = \big(\prod_{i\in J} U_i\big) \times \big(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\big)$, όπου J ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I. Άρα $x_i \in U_i$ για κάθε $i \in J$ και , επειδή $x_i \in \overline{A_i}$ έχουμε $U_i \cap A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in J$. Το $U_i \cap X_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I \setminus J$ είναι προφανές, επομένως $V \cap \big(\prod_{i\in I} A_i\big) \neq \varnothing$, άρα $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$, επομένως

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} A_i} \tag{6.6}$$

Από τις (6.5) και (6.6) έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.2.4. *Αν οι χώροι X_i είναι T_3 για κάθε $i \in I$, τότε ο χώρος $X = \prod_{i\in I} X_i$, με την καρτεσιανή και την τοπολογία Tychonoff είναι T_3.*

Απόδειξη: Αν αποδείξουμε την πρόταση για την τοπολογία Tychonoff θα ισχύει και για την καρτεσιανή τοπολογία, γιατί κάθε ανοικτό υποσύνολο ως προς την πρώτη είναι και ανοικτό ως προς την δεύτερη.
Έστω $x \in X$ και U μια περιοχή του x. Τότε, αν $i \in I$ έχουμε $p_i(x) = x_i$ και το $p_i(U) = U_i$ είναι μία περιοχή του x_i στον X_i. Επειδή ο χώρος X_i είναι T_3, (πρόταση 3.4.1), υπάρχει περιοχή V_i του x_i, ώστε $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$. Επομένως το $V = V_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} V_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in V_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} V_i \subseteq \overline{V_i} \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \subseteq U_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} U_j = U$. Από

το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι $\overline{V_i \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_i} = \overline{V_i} \times \overline{\prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_i} = \overline{V_i} \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$, άρα $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U_i \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_i = U$, επομένως ο X είναι T_3. □

Πόρισμα. *Αν οι χώροι X_i είναι κανονικοί για κάθε $i \in I$, τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ είναι κανονικός.*

Παρατηρήσεις:

1. Επειδή οι προβολές p_i είναι ανοικτές απεικονίσεις, ισχύει το: Αν ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ είναι T_1 ή Hausdorff ή T_3 ή κανονικός, τότε και οι χώροι X_i είναι T_1 ή Hausdorff ή T_3 ή κανονικοί, αντιστοίχως.

2. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 3.5.1, η ιδιότητα T_4 και η φυσιολογικότητα δεν διατηρούνται στο καρτεσιανό γινόμενο.

Πρόταση 6.2.5. *Αν οι χώροι X_i, $i \in I$ είναι συνεκτικοί, τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, με την τοπολογία Tychonoff είναι επίσης συνεκτικός.*

Απόδειξη: Θεωρούμε $c \in X$ και για κάθε μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο J του I το υποσύνολο $E_J = \prod\limits_{i\in J} X_i \times \{c(i)/i \in I \setminus J\}$ του X. Η απεικόνιση $f : \prod\limits_{i\in J} X_i \to E_J$, με

$$f(a) = \begin{cases} a(i)\,, & i \in J \\ c(i)\,, & i \in I \setminus J \end{cases}$$

είναι συνεχής και επί (η απόδειξη-εύκολη-αφήνεται ως άσκηση), συνεπώς το E_J είναι συνεκτικό, επειδή (πρόταση 4.1.10), το $\prod\limits_{i\in J} X_i$ είναι συνεκτικό και $E_J = f(\prod\limits_{i\in J} X_i)$.
Αν ονομάσουμε $\mathcal{P}'$ το σύνολο των μη κενών και πεπερασμένων υποσυνόλων του I, τότε το $E = \bigcup\limits_{J\in\mathcal{P}'} E_J$ είναι συνεκτικό, γιατί $c \in \bigcap\limits_{J\in\mathcal{P}'} E_J$, άρα $\bigcap\limits_{J\in\mathcal{P}'} E_J \neq \varnothing$. Αν U είναι ένα σύνηθες βασικό ανοικτό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $K \in \mathcal{P}'$, ώστε $U = \prod\limits_{i\in K} U_i \times \prod\limits_{i\in I\setminus K} X_i$ όπου U_i μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in K$. Έχουμε

$$\prod_{i\in K} U_i \times \{c(i)/i \in I \setminus K\} \subseteq U \cap E_K \subseteq U \cap E,$$

άρα $U \cap E \neq \varnothing$, άρα $\overline{E} = X$. Συνεπώς ο X είναι συνεκτικός, γιατί (πρόταση 4.1.7), το $\overline{E}$ είναι συνεκτικό. □

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο της πρότασης 6.2.5 ισχύει προφανώς, γιατί οι κανονικές προβολές είναι συνεχείς απεικονίσεις.

2. Αν ο χώρος X είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία, τότε το συμπέρασμα της πρότασης 6.2.5 δεν ισχύει απαραίτητα.

   Για την απόδειξη του ανωτέρω ισχυρισμού, θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου $X_n = \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία. Έστω A, B τα σύνολα των φραγμένων και μη φραγμένων ακολουθιών του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, αντιστοίχως. Προφανώς $A, B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Αν $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in A$, τότε $a \in \prod_{i=1}^{\infty}(a_i - 1, a_i + 1) \subseteq A$, άρα το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία. Επιπλέον αν $b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in B$, τότε $b \in \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - 1, b_i + 1) \subseteq B$, άρα το B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ως προς την καρτεσιανή τοπολογία, επομένως ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι συνεκτικός, παρότι όλοι οι παράγοντες του γινομένου $X_n = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικοί.

Πρόταση 6.2.6. *(**Θεώρημα Tychonoff**) Αν οι χώροι X_i, $i \in I$ είναι συμπαγείς, τότε ο χώρος $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την τοπολογία Tychonoff είναι επίσης συμπαγής.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Άρα το σύνολο $\mathcal{M}$ των ανοικτών καλυμμάτων του X που δεν έχουν πεπερασμένο υποκάλυμμα είναι μη κενό. Στο $\mathcal{M}$ η σχέση $\subset$ του γνησίως περιέχεσθαι είναι μια σχέση μερικής διάταξης. Αν $\mathcal{G}_i, i \in I$ είναι μία αλυσίδα στο $\mathcal{M}$, τότε $\bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i \in \mathcal{M}$, άρα η αλυσίδα $\mathcal{G}_i$ έχει άνω φράγμα, το $\bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i$. Συνεπώς, από το λήμμα Zorn το $\mathcal{M}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, ας πούμε το $\mathcal{G}$. Στο πρώτο βήμα αποδεικνύουμε τον εξής ισχυρισμό:
• Αν U ανοικτό υποσύνολο του X και $U \notin \mathcal{G}$, τότε υπάρχουν $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{G}$, ώστε

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{n} V_k\Big) \cup U = X.$$

Πράγματι, αν ισχύει το αντίθετο, τότε το $\mathcal{G} \cup \{U\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, άτοπο, γιατί το $\mathcal{G}$ είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{M}$. Στο δεύτερο βήμα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό:
• Για κάθε $i \in I$, αν $A_i = \bigcup\{U \in \mathcal{T}_i / p_i^{-1}(U) \in \mathcal{G}\}$, τότε $A_i \neq X_i$.
Πράγματι, αν για κάποιο $i \in I$ έχουμε $A_i = X_i$, τότε το $\{U \in \mathcal{T}_i / p_i^{-1}(U) \in \mathcal{G}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X_i. Επειδή ο X_i είναι συμπαγής το $\{U \in \mathcal{T}_i \,/\, p_i^{-1}(U) \in \mathcal{G}\}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, ας πούμε το $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Άρα $\bigcup_{k=1}^{n} p_i^{-1}(U_k) = p_i^{-1}\big(\bigcup_{k=1}^{n} U_k\big) = p_i^{-1}(X_i) = X$. Επομένως το $\{p_i^{-1}(U_1), \ldots, p_i^{-1}(U_n)\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$, άτοπο.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θεωρούμε $y \in X$, με $y(i) \in X_i \setminus A_i$ για κάθε $i \in I$. Επειδή το $\mathcal{G}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X υπάρχει $U \in \mathcal{G}$, με $y \in U$. Συνεπώς υπάρχουν $V_k \in \mathcal{T}_k$, $k = 1, \ldots, m$, ώστε $y \in \bigcap_{k=1}^{m} p_k^{-1}(V_k) \subseteq U$. Είναι $\bigcap_{k=1}^{m} p_k^{-1}(V_k) \notin \mathcal{G}$, γιατί διαφορετικά $y(k) \in A_k$, το οποίο είναι αδύνατο εξαιτίας του τρόπου επιλογής του y. Άρα, από τον ισχυρισμό του πρώτου βήματος υπάρχουν $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{G}$, ώστε $\big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\big) \cup$

$\big(\bigcap_{k=1}^{m} p_k^{-1}(V_k)\big) = X$, άρα και $\big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\big) \cup U = X$, επομένως το $\{U_1, \ldots, U_n, U\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$, άτοπο. □

Παρατηρήσεις:

1. Το αντίστροφο ισχύει προφανώς, γιατί οι κανονικές προβολές είναι συνεχείς απεικονίσεις.

2. Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος, έγινε χρήση του αξιώματος επιλογής, αφού χρησιμοποιήσαμε μια ισοδύναμη με αυτό πρόταση, το λήμμα Zorn. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν το θεώρημα Tychonoff μπορεί να αποδειχθεί χωρίς την χρήση του αξιώματος επιλογής. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι αρνητική. Το 1950 ο Kelley,[3] έδωσε μία πολύ κομψή απόδειξη για το ότι το θεώρημα Tychonoff, συνεπάγεται το αξίωμα επιλογής[4]. Έτσι αποδείχθηκε ότι δεν υπάρχει απόδειξη του θεωρήματος, χωρίς χρήση του αξιώματος επιλογής.

Πρόταση 6.2.7. *Αν $X_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια συμπαγών και Hausdorff χώρων, με $|I| \geq \aleph_0$, τότε ο χώρος $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την καρτεσιανή τοπολογία δεν είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Με $(X, \mathcal{T}_p)$ συμβολίζουμε τον χώρο X, όταν αυτός εφοδιάζεται με την καρτεσιανή τοπολογία και με $\mathcal{T}_c$, όταν αυτός εφοδιάζεται με την τοπολογία Tychonoff.
Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι ο χώρος $(X, \mathcal{T}_p)$ είναι συμπαγής. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $i_X : (X, \mathcal{T}_p) \to (X, \mathcal{T}_c)$. Αν $U \in \mathcal{T}_c$, τότε $i^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}_p$, άρα η i είναι συνεχής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_p$ και $\mathcal{F}_c$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του X, ως προς την καρτεσιανή και την τοπολογία Tychonoff, αντιστοίχως. Έχουμε, αν $U \in \mathcal{T}_p$, τότε $U^c \in \mathcal{F}_p$, άρα το U^c είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $(X, \mathcal{T}_p)$, άρα, επειδή η i_X είναι συνεχής το $U^c = i_X(U^c)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $(X, \mathcal{T}_c)$, άρα $U^c \in \mathcal{F}_c$, επειδή ο χώρος $(X, \mathcal{T}_c)$ είναι Hausdorff, άρα $U \in \mathcal{T}_c$, επομένως $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_c$ και, επειδή $\mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{T}_p$ θα έχουμε $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_p$, άτοπο, γιατί το $\mathcal{T}_c$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{T}_p$, αφού το I είναι απειροσύνολο. □

Σχόλιο: Η πιο πάνω πρόταση σημαίνει ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος Tychonoff δεν ισχύει απαραίτητα, όταν έχουμε καρτεσιανό γινόμενο απείρων παραγόντων και ο χώρος έχει την καρτεσιανή τοπολογία.

[3] John Kelley (1916-1999): Αμερικανός μαθηματικός.

[4] Η απόδειξη δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Fundamenta Mathematicae, Vol 37, Issue 1, pages 75-76.

6.3 Ασκήσεις

1. Έστω $X_i, i \in I$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\varnothing \neq A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$, τότε ως προς την τοπολογία Tychonoff του $X = \prod_{i\in I} X_i$, να δειχθεί ότι $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0 \subseteq \prod_{i\in I} A_i^0$. Το = ισχύει πάντα;
Απόδειξη: Έστω $x = (x_i)_{i\in I} \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0$, άρα υπάρχει στοιχείο U της συνήθους βάσης του $X = \prod_{i\in I} X_i$, ώστε
$$x \in U \subseteq \prod_{i\in I} A_i \tag{6.7}$$
Από τον ορισμό της συνήθους βάσης της τοπολογίας Tychonoff έχουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένο υποσύνολο J του I και ανοικτά υποσύνολα U_j των X_j για κάθε $j \in J$, ώστε $U = \left(\prod_{j\in J} U_i\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\right)$. Από την (6.7), συμπεραίνουμε ότι $x_j \in U_j \subseteq A_j$ για κάθε $j \in J$ και $x_i \in A_i = X_i$ για κάθε $i \in I \setminus J$, άρα $x_i \in A_i^0$ για κάθε $i \in I$, άρα $x \in \prod_{i\in I} A_i^0$, επομένως $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0 \subseteq \prod_{i\in I} A_i^0$.
Το = δεν ισχύει πάντα. Αντιπαράδειγμα: Αν $X_n = \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_n = [0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i^0 = (0,1)^{\mathbb{N}}$, αλλά $\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^0 = \varnothing$, γιατί για το οποιοδήποτε βασικό σύνολο $U = \left(\prod_{i\in J} U_i\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} \mathbb{R}\right)$, όπου J πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και U_i μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για κάθε $i \in J$, έχουμε ότι $X_i = \mathbb{R} \nsubseteq [0,1] = A_i$ για κάθε $i \in I \setminus J$. Άρα δεν υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε $U \subseteq \prod_{i\in I} A_i$, άρα $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0 = \varnothing$, επομένως $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0 \neq \prod_{i\in I} A_i^0$.

2. Έστω $X_i, i \in I$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και Αν $\varnothing \neq A_i \subseteq X_i$ για κάθε $i \in I$, τότε ως προς την καρτεσιανή τοπολογία του $X = \prod_{i\in I} X_i$, να δειχθεί ότι
$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^0 = \prod_{i\in I} A_i^0.$$

3. Αν $\mathbb{R}^\infty$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, το οποίο αποτελείται από τις ακολουθίες που έχουν πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων, να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{R}^\infty$ είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, όταν αυτός είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία Tychonoff.
Απόδειξη: Έστω U ένα οποιοδήποτε στοιχείο της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του $\mathbb{N}$ και U_j ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ για κάθε $j \in J$, ώστε $U = \left(\prod_{j\in J} U_j\right) \times \left(\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus J} \mathbb{R}\right)$. Επειδή το σύνολο $\mathbb{N} \setminus J$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, το $\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus J} \mathbb{R}$ περιέχει την ακολουθία, της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι με 0, άρα $U \cap \mathbb{R}^\infty \neq \varnothing$, επομένως το $\mathbb{R}^\infty$ είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Αν $x_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία στον χώρο $X = \prod_{i\in I} X_i$, όταν αυτός είναι εφοδιασμένος με την την τοπολογία Tychonoff, να δειχθεί ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες

   α΄) $x_n \to x \in X$

   β΄) $x_n(i) \to x(i) \in X_i$ για κάθε $i \in I$.

   Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έστω U_i ένα ανοικτό υποσύνολο του X_i, με $x(i) \in U$. Τότε το σύνολο $U = U_i \times \big(\prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j\big)$ είναι μία περιοχή του x, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $x_n(i) \in U_i$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $x_n(i) \to x(i)$. β') ⇒ α'): Κάθε βασικό υποσύνολο U του X που περιέχει το x είναι της μορφής $U = \big(\prod_{j\in J} U_j\big) \times \big(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\big)$, όπου J ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I και τα U_j είναι ανοικτά υποσύνολα των X_j για κάθε $j \in J$, τα οποία περιέχουν τα $x(j)$. Έχουμε $x_n(j) \to x(j)$ για κάθε $j \in J$, άρα υπάρχουν $n_j \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n(j) \in U_j$ για κάθε $n \geq n_j$. Αν $n \geq n_0 = \max\big\{n_j/j \in J\big\}$, τότε $x(j) \in U_j$, άρα $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_j$. Επομένως $x_n \to x$.

   Σχόλιο: Αν ο X είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία, τότε ισχύει η συνεπαγωγή α') ⇒ β'), αλλά δεν ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή. Αντιπαράδειγμα: Στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχουμε $\frac{1}{n^k} \to 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά $\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^k}, \ldots\big) \nrightarrow \big(0, 0, \ldots, 0, \ldots\big)$.

5. Να δειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με την καρτεσιανή τοπολογία δεν είναι 1ος αριθμήσιμος. Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/x_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}\big\}$. Έχουμε ότι $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \overline{A}$, γιατί, αν $a_n < 0 < b_n$, τότε το $U = \prod_{i\in\mathbb{N}} (a_i, b_i)$ είναι ένα βασικό ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με $\mathbf{0} \in U$. Επιπλέον $U \cap A \neq \varnothing$, γιατί $\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \ldots, \frac{b_n}{2}, \ldots) \in U \cap A$. Έστω η ακολουθία $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{in}, \ldots) \in A$. Το $V = \prod_{i\in\mathbb{N}} (-a_{in}, a_{in})$ είναι μια περιοχή του $\mathbf{0}$, για την οποία έχουμε $a_{in} \notin (-a_{in}, a_{in})$, άρα $\mathbf{a}_n \notin V$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η $\mathbf{a}_n$ δεν συγκλίνει στο $\mathbf{0}$. Άρα δεν αληθεύει η αναγκαία συνθήκη για τους 1ους αριθμήσιμους χώρους, η οποία περιγράφεται στην πρόταση 1.6.3. Επομένως ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος.

6. Να δειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$ με την τοπολογία Tychonoff δεν είναι 1ος αριθμήσιμος. Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$ το στοιχείο $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}}$ του $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$, για το οποίο ισχύει $a_i = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{I}$. Έστω A το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$, για το οποίο $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{I}} \in A$, αν και μόνον, αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του $\mathbb{I}$, ώστε $x_i = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{I} \setminus J$. Υποθέτουμε ότι U είναι ένα στοιχείο της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$, ως προς την τοπολογία Tychonoff, με $\mathbf{0} \in U$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένο υποσύνολο J του $\mathbb{I}$ και περιοχές $U_j, j \in J$ του 0 στον $\mathbb{R}$, ώστε $U = \big(\prod_{j\in J} U_j\big) \times \big(\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus J} \mathbb{R}\big)$. Αν πάρουμε το στοιχείο $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}}$ του $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$, με $a_i = 0$ για κάθε $i \in J$ και $a_i = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{I}\setminus J$ έχουμε $\mathbf{a} \in U \cap A$, άρα $\mathbf{0} \in \overline{A}$.
   Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία $\mathbf{b}_n = (b_n^i), i \in \mathbb{I}$ στοιχείων του A, με $\mathbf{b}_n \to \mathbf{0}$. Έστω $\mathbf{b}_n$ μια οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του A. Με I_n συμβολίζουμε το σύνολο των δεικτών $i \in \mathbb{I}$, για τους οποίους ισχύει $b_n^i \neq 1$. Από τον ορισμό του A τα σύνολα I_n είναι πεπερασμένα, άρα το σύνολο $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι αριθμήσιμο.

Επομένως υπάρχει $i \in \mathbb{I} \setminus I$. Θεωρούμε το σύνολο $U = (-1,1) \times \prod_{j \in \mathbb{I} \setminus \{i\}} \mathbb{R}$, το οποίο είναι μια περιοχή του $\mathbf{0}$, για την οποία ισχύει $\mathbf{b}_n \notin U$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbf{b}_n \nrightarrow \mathbf{0}$. Για τον λόγο που αναφέραμε στην προηγούμενη άσκηση ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος.

Σχόλιο: Επειδή όλοι οι μετρικοί χώροι είναι 1οι αριθμήσιμοι, οι χώροι των δύο προηγουμένων ασκήσεων δεν μπορεί να "προέρχονται" από κάποια μετρική, επομένως δεν είναι μετρικοποιήσιμοι.

7 ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

7.1 Πλήρεις μετρικοί χώροι

Η πληρότητα είναι ιδιότητα κάποιων μετρικών χώρων, η οποία παρότι δεν είναι τοπολογικό αναλλοίωτο, είναι μεγάλης σημασίας για δύο κυρίως λόγους. Ο πρώτος είναι ότι, μέσω αυτής παίρνουμε ένα κριτήριο συμπάγειας για τους μετρικούς χώρους, το οποίο είναι πολύ πιο αποτελεσματικό από την εφαρμογή του ορισμού. Ο δεύτερος είναι ότι στους πλήρεις μετρικούς χώρους ισχύει το περίφημο θεώρημα κατηγορίας του Baire, το οποίο είναι ένα σημαντικό εργαλείο, τόσο της τοπολογίας όσο και της ανάλυσης. Μαζί με το θεώρημα Baire θα δούμε και άλλα τρία σημαντικότατα θεωρήματα, τα οποία έχουν πλήθος εφαρμογών. Το θεώρημα κιβωτισμού του Cantor, το θεώρημα επέκτασης του Tietze και τέλος το λήμμα Lebesque.
Πρότυπο πλήρους μετρικού χώρου είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$, στον οποίο, όπως γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Η έννοια της βασικής ακολουθίας στους πραγματικούς αριθμούς μπορεί να γενικευθεί εύκολα και σε έναν οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

Ορισμός 7.1.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και x_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία στοιχείων του. Η x_n ονομάζεται **βασική ακολουθία** ή **ακολουθία Cauchy**, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, ώστε

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon\,, \quad \forall\, n, m \geq n_0.$$

Πρόταση 7.1.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, x_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία στοιχείων του X και $x \in X$. Αν $x_n \to x$, τότε η x_n είναι βασική ακολουθία.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε

$n \geq n_0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

άρα η x_n είναι βασική. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα στον χώρο (0,1) εύκολα επαληθεύεται το ότι η ακολουθία $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι βασική. Όμως η $\frac{1}{n}$ δεν έχει όριο κάποιο σημείο του (0,1), γιατί $\frac{1}{n} \to 0 \notin (0,1)$.

Ορισμός 7.1.2. Ένας μετρικός χώρος X ονομάζεται **πλήρης**, αν και μόνον, αν κάθε βασική ακολουθία στοιχείων του X έχει όριο ένα στοιχείο του X.

Παραδείγματα 7.1.1.

1. Στον απειροστικό λογισμό έχουμε αποδείξει ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

2. Αν k φυσικός αριθμός ≥ 2, τότε ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^k$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

   Απόδειξη: Έστω $x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k))$; $n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ και $\varepsilon > 0$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, άρα

   $$\sqrt{(x_n(1) - x_m(1))^2 + \ldots + (x_n(k) - x_m(k))^2} < \varepsilon,$$

   άρα $|x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Επομένως η ακολουθία $x_n(i)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}$, η οποία συγκλίνει στον αριθμό $x(i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Θεωρούμε το
   $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k)) \in \mathbb{R}^k$. Επειδή $x_n(i) \to x(i)$, υπάρχει $n(i) \in \mathbb{N}$, ώστε $|x_n(i) - x(i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ για κάθε $n \geq n(i)$. Άρα για $n \geq \max\{n(1), n(2), \ldots, n(k)\}$ έχουμε

   $$(x_n(1) - x(1))^2 + (x_n(2) - x(2))^2 + \cdots + (x_n(k) - x(k))^2 < \varepsilon^2,$$

   άρα $d(x_n, x) < \varepsilon$, άρα $x_n \to x$. □

3. Ο χώρος $C_{[a,b]}$ με τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι πλήρης μετρικός χώρος.

   Απόδειξη: Έστω μια βασική ακολουθία f_n στον $C_{[a,b]}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, άρα $\max\{|f_n(x) - f_m(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon$, άρα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. Για ένα σταθερό $x \in [a,b]$ η ακολουθία $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ είναι μια βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών, άρα έχει όριο τον πραγματικό αριθμό $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   Αρχικά θα δείξουμε ότι $f \in C_{[a,b]}$. Έστωσαν $x, y \in [a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, αν $n \geq n_1$, τότε

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Ομοίως έχουμε ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε, αν $n \geq n_2$, τότε

$$|f_n(y) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Αν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, επειδή $f_{n_0} \in C_{[a,b]}$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| & \\ &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

άρα $f \in C_{[a,b]}$.
Για την ολοκλήρωση της απόδειξης πρέπει να δείξουμε ότι με τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι $f_n \to f$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$n \geq n_x \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Επιπλέον για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

άρα για κάθε $x \in [a, b]$ είναι

$$\begin{aligned} n, m \geq \max\{n_0, n_x\} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

άρα $\max\{|f_n(x) - f(x)|,\, x \in [a, b]\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, άρα $d(f_n, f) < \varepsilon$, άρα $f_n \to f$. □

4. Ο χώρος l_∞ των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών με την supremmum μετρική είναι πλήρης.

   Απόδειξη: Έστω x_n, $n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία στον l_∞ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, άρα $\sup\{|x_n(k) - x_m(k)|,\, k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$, άρα $|x_n(k) - x_m(k)| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Συνεπώς η ακολουθία $x_n(k), n \in \mathbb{N}$ είναι μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα υπάρχει $x(k) \in \mathbb{R}$, ώστε $x_n(k) \to x(k)$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots) \in l_\infty$. Πράγματι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|x_{n_0}(k) - x(k)| < 1$, άρα $|x(k)| < 1 + |x_{n_0}(k)|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή η ακολουθία $x_n(k), k \in \mathbb{N}$, ως συγκλίνουσα είναι φραγμένη υπάρχει θετικός αριθμός a, τέτοιος ώστε $|x_n(k)| \leq a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $x(k) < 1 + a$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, επομένως $x \in l_\infty$.
Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, πρέπει να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ με την supremum μετρική. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n(k) \to x(k)$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|x_{n_2}(k) - x(k)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Αφ' ετέρου υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, ώστε $d(x_n, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{4}$, άρα $|x_n - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $n > n_1$. Επομένως

$$\begin{aligned} n > n_1 \Rightarrow |x_n(k) - x(k)| & \\ &= |x_n(k) - x_{n_2}(k) + x_{n_2}(k) - x(k)| \\ &\leq |x_n(k) - x_{n_2}(k)| + |x_{n_2}(k) - x(k)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

άρα $d(x_n, x) = \sup\{|x_n(k) - x(k)|, k \in \mathbb{N}\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, συνεπώς $x_n \to x$. □

5. Ο χώρος $\mathbb{Q}$ με την Ευκλείδεια μετρική δεν είναι πλήρης, γιατί η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}$$

είναι βασική ακολουθία του χώρου, αλλά το όριο της, ο αριθμός e δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$.

6. Ο χώρος $\mathbb{A}$ με την Ευκλείδεια μετρική δεν είναι πλήρης, γιατί η ακολουθία

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

είναι βασική ακολουθία του χώρου, αλλά το όριο της, το 0 δεν ανήκει στο $\mathbb{A}$.

7. Ο χώρος $(0, 1]$ με την Ευκλείδεια μετρική δεν είναι πλήρης, γιατί η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

είναι βασική ακολουθία του χώρου, αλλά το όριο της, το 0 δεν ανήκει στο $(0, 1]$.

Παρατήρηση: Είναι $(0, 1) \cong \mathbb{R}$. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, ενώ ο χώρος (0,1) δεν είναι πλήρης. Συνεπώς η πληρότητα δεν είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

Για την εξέταση των ιδιοτήτων της πληρότητας χρειάζεται να ορίσουμε κάποιες έννοιες, οι οποίες αφορούν τους μετρικούς χώρους και να δούμε ορισμένες προτάσεις σχετικές με τις έννοιες αυτές.

Ορισμός 7.1.3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Θα ονομάζουμε το A **φραγμένο**, αν και μόνον, αν υπάρχει θετικός πραγματικός M, ώστε $d(x, y) \leq M$ για κάθε $(x, y) \in A \times A$.

Ένας ορισμός ισοδύναμος [1]με τον παραπάνω είναι ο εξής:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Θα ονομάζουμε το A φραγμένο, αν και μόνον, αν υπάρχει $a \in X$ και θετικός πραγματικός M, ώστε $d(a, x) \leq M$ για κάθε $x \in A$. Μάλιστα ο δεύτερος ορισμός είναι πιο εύχρηστος, ειδικά στις περιπτώσεις των Ευκλείδειων χώρων, όπου παίρνουμε $a = \mathbf{0}$ και αντί του $d(x, y)$ έχουμε να δείξουμε ότι φράσσεται η Ευκλείδεια *norm*. Δηλαδή, αν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, πρέπει

$$d(\mathbf{0}, x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq M.$$

Παραδείγματα 7.1.2.

1. Ο $\mathbb{D}^2$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$, γιατί, αν $x \in \mathbb{D}^2$, τότε $\|x\| \leq 1$.
2. Το $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 x_2 \geq 1\}$ είναι μη φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, γιατί, αν $x = (n, \frac{1}{n}) \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\|x\| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} > n \to \infty$.

Ορισμός 7.1.4. Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d). Ονομάζουμε **διάμετρο** του A τον μη αρνητικό αριθμό $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$.

Παραδείγματα 7.1.3.

1. Η διάμετρος των μονοσυνόλων ενός οποιουδήποτε μετρικού χώρου είναι 0.
2. Αν $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\operatorname{diam}(A) = 1$. Πράγματι, $\operatorname{diam}(A) = \sup\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \,/\, n, m \in \mathbb{N}\}$, αλλά $1 - \frac{1}{\max\{m,n\}} > |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, επομένως
$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{1 - \tfrac{1}{m} / m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m \to \infty}(1 - \frac{1}{m}) = 1.$$
3. $\operatorname{diam}(\mathbb{D}^2) = \operatorname{diam}(\mathbb{S}^1) = 2$. Πράγματι,
$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{D}^2 \Rightarrow d(x, y) &= \|x - y\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \leq 2 \\ &\Rightarrow \operatorname{diam}(\mathbb{D}^2) \leq 2. \end{aligned}$$
Αφ' ετέρου $a = (1, 0) \in \mathbb{D}^2$ και $b = (-1, 0) \in \mathbb{D}^2$, επομένως $\operatorname{diam}(\mathbb{D}^2) \geq d(a, b) = 2$, άρα $\operatorname{diam}(\mathbb{D}^2) = 2$. Ομοίως αποδεικνύεται και το $\operatorname{diam}(\mathbb{S}^1) = 2$.

Λήμμα 7.1.2. *Αν A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, d), τότε*

$$A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B).$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} x, y \in A &\Rightarrow x, y \in B \\ &\Rightarrow \{d(x, y) / x, y \in A\} \subseteq \{d(x, y) / x, y \in B\} \\ &\Rightarrow \sup\{d(x, y) / x, y \in A\} \leq \sup\{d(x, y) / x, y \in B\} \\ &\Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B). \end{aligned}$$

□

[1]Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών είναι πολύ εύκολη.

Λήμμα 7.1.3. *Αν A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,d), τότε* $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, πρέπει να αποδείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι φραγμένο. Το A είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $M>0$, ώστε $d(x,y) \leq M$ για κάθε $x,y \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x,y \in \overline{A} \Rightarrow \exists \quad & x_0, y_0 \in A; x_0 \in S(x, \tfrac{1}{2n}) \wedge y_0 \in S(y, \tfrac{1}{2n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) \leq M + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow d(x,y) \leq M\,. \end{aligned}$$

Επομένως το $\overline{A}$ είναι φραγμένο. Από τη σχέση $A \subseteq \overline{A}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\text{diam}(A) \leq \text{diam}\left(\overline{A}\right) \tag{7.1}$$

Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισοισότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x,y \in \overline{A} \Rightarrow \exists \quad & x_0, y_0 \in A; x_0 \in S(x, \tfrac{1}{2n}) \wedge y_0 \in S(y, \tfrac{1}{2n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow d(x,x_0) < \frac{1}{2n} \wedge d(y,y_0) < \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) < d(x_0,y_0) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow \sup\{d(x,y)/x,y \in \overline{A}\} \leq d(x_0,y_0) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow \text{diam}(\overline{A}) \leq \text{diam}(A) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

άρα

$$\text{diam}(\overline{A}) \leq \text{diam}(A). \tag{7.2}$$

Από τις (7.1) και (7.2) προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.1.4. *Αν ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α΄) Το μη κενό υποσύνολο A του X, ως υπόχωρος του X είναι πλήρης μετρικός χώρος.

β΄) Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Έστω $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία x_n, $n \in \mathbb{N}$ στοιχείων του A, με $x_n \to x \in A$. [2]Η ακολουθία x_n, ως συγκλίνουσα είναι βασική στον X, άρα είναι βασική και στον A. Επειδή ο A είναι πλήρης η x_n έχει όριο, το οποίο ανήκει στον A, δηλαδή $x \in A$. Άρα $\overline{A} \subseteq A$ και, επειδή ισχύει $A \subseteq \overline{A}$ έχουμε $A = \overline{A}$, άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.
β') $\Rightarrow$ α'): Έστω x_n, $n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία στοιχείων του A. Η ίδια ακολουθία είναι βασική ακολουθία στον X και, επειδή ο X είναι πλήρης συγκλίνει. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$. Επειδή το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, συνεπάγεται ότι $x \in A$. Άρα η x_n έχει όριο ένα στοιχείο του A. Επομένως ο A είναι πλήρης χώρος, ως υπόχωρος του X. □

[2]Η πιο πάνω συνεπαγωγή, σύμφωνα με την πρόταση 1.6.3 ισχύει σε όλους τους 1ους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους, άρα και στους μετρικούς χώρους, οι οποίοι είναι 1οι αριθμήσιμοι.

Πρόταση 7.1.5. ***(Θεώρημα κιβωτισμού του* Cantor*)*** *Για τον μετρικό χώρο (X, d) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α΄) Ο X είναι πλήρης.

β΄) Για οποιαδήποτε ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων E_n, $n \in \mathbb{N}$ του X, με $E_{n+1} \subseteq E_n$ (κιβωτισμένα σύνολα) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$ υπάρχει $x \in X$, ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}.$$

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Έστω E_n, $n \in \mathbb{N}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του X, με $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$. Θεωρούμε ακολουθία x_n, ώστε $x_n \in E_n$ για κάθε $n \in E_n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\operatorname{diam}(E_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, γιατί $E_n \subseteq E_{n_0}$ και $E_m \subseteq E_{n_0}$, επομένως $x_n, x_m \in E_{n_0}$. Συνεπώς η ακολουθία x_n είναι βασική και, επειδή ο χώρος X είναι πλήρης, συγκλίνει. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$, άρα $x_{n+k} \to x$. Επειδή $x_{n+k} \in E_{n+k} \subseteq E_n$ και το E_n είναι κλειστό υποσύνολο του X έχουμε $x \in E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, άρα $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \varnothing$. Έστω $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $0 \leq d(x, y) \leq \operatorname{diam}(E_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$ είναι $d(x, y) = 0$, άρα $x = y$. Συνεπώς υπάρχει $x \in X$, ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$.
β') $\Rightarrow$ α'): Έστω x_n, $n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία στον X. Θεωρούμε τα σύνολα

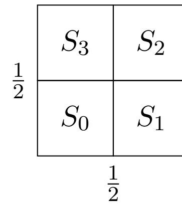
$$E_n = \{x_k / k \geq n\} \text{ και τα } F_n = \overline{E_n}.$$

Επειδή η x_n είναι βασική ακολουθία, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $||x_n| - |x_{n_0}|| < |x_n - x_{n_0}| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $|x_n| < 1 + |x_{n_0}|$. Θεωρούμε $M = max\{1 + |x_1|, \dots, 1 + |x_{n_0}|\}$ και έχουμε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το E_1 είναι φραγμένο και, επειδή εκ του τρόπου κατασκευής των E_i έχουμε $E_n \subseteq E_1$ θα είναι φραγμένα όλα τα E_n. Το ίδιο ισχύει και για τα F_n. Επιπλέον, η F_n είναι μία φθίνουσα ακολουθία, γιατί $E_{n+k} \subseteq E_n \Rightarrow \overline{E_{n+k}} \subseteq \overline{E_n} \Rightarrow F_{n+k} \subseteq F_n$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε, επειδή $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} E_n \subseteq E_{n_0} &\Rightarrow \operatorname{diam}(E_n) \leq \operatorname{diam}(E_{n_0}) \\ &= \sup\{d(x_n, x_m)/n, m \geq n_0\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \operatorname{diam}(E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα $\operatorname{diam}(F_n) = \operatorname{diam}(E_n) \to 0$, γιατί $\operatorname{diam}(F_n) = \operatorname{diam}(\overline{E_n}) = \operatorname{diam}(E_n)$. Επιπλέον, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $0 \leq \operatorname{diam}\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n\big) \leq \operatorname{diam}(F_n) \to 0$, άρα $\operatorname{diam}\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n\big) = 0$. Επομένως $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Η σχέση $0 \leq d(x, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ συνεπάγεται την $d(x_n, x) \to 0$, άρα $x_n \to x$, συνεπώς ο X είναι πλήρης. □

Στο θεώρημα κιβωτισμού του Cantor στηρίζεται η κατασκευή ενός δρόμου $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, ο οποίος έχει την "παράδοξη" ιδιότητα να "γεμίζει" ολόκληρο το τετράγωνο, δηλαδή να είναι επί του $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Ο δρόμος αυτός είναι γνωστός με το όνομα **χωροπληρωτική καμπύλη του Peano** [3] Η κατασκευή της καμπύλης Peano στηρίζεται στην υποδιαίρεση με βήματα του διαστήματος $\mathbb{I}$ σε ισομήκη διαστήματα πλήθους 2^k και την αντίστοιχη ομοιόμορφη υποδιαίρεση του τετραγώνου $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ σε ισεμβαδικά τετράγωνα πλήθους 2^k.
Στο πρώτο βήμα διαιρούμε το $\mathbb{I}$ σε τέσσερα διαστήματα, με μήκη τα $I_0 = [0, \frac{1}{4}], I_1 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ και $[\frac{3}{4}, 1]$, που το καθένα από αυτά έχει μήκος $\frac{1}{2^2}$. Επιπλέον διαιρούμε το $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ σε τέσσερα τετράγωνα S_0, S_1, S_2 και S_3, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 7.1

Στο δεύτερο βήμα διαιρούμε κάθε ένα από τα διαστήματα I_i, $i = 0, 1, 2, 3$ σε τέσσερα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{2^3}$, τα I_{i0}, I_{i1}, I_{i2} και I_{i3} και, αντίστοιχα τα τετράγωνα S_i, $i = 0, 1, 2, 3$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

S_{33}	S_{32}	S_{23}	S_{22}
S_{30}	S_{31}	S_{20}	S_{21}
S_{03}	S_{02}	S_{13}	S_{12}
S_{00}	S_{01}	S_{10}	S_{11}

Σχήμα 7.2

Έχουμε $I_{ij} \subset I_i$ και $S_{ij} \subset S_i$ για κάθε $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο στο n-οστό βήμα έχουμε 4^n υποδιαστήματα του $\mathbb{I}$ και 4^n υποτετράγωνα του $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Κάθε ένα από τα 4^n διαστήματα, όπως και κάθε ένα από τα 4^n τετράγωνα "σημαίνεται" με μία ακολουθία n όρων $i_1 i_2 ... i_n$, όπου $i_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Έχουμε

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \cdots,$$

και

$$S_{i_1} \supset S_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset S_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \cdots.$$

[3]Giuseppe Peano (1876-1932): Ιταλός μαθηματικός.

Δύο διαστήματα $I_{i_1 i_2,\ldots,i_n}$ και $I_{j_1 j_2\ldots j_n}$ καθώς και τα αντίστοιχα τετράγωνα $S_{i_1 i_2,\ldots,i_n}$ και $S_{j_1 j_2\ldots j_n}$ ονομάζονται γειτονικά, αν $I_{i_1 i_2,\ldots,i_n} \cap I_{j_1 j_2\ldots j_n} \neq \varnothing$. Τα γειτονικά διαστήματα έχουν κοινό το ένα τους άκρο μόνον και τα αντίστοιχα γειτονικά τετράγωνα $S_{i_1 i_2,\ldots,i_n}$ και $S_{j_1 j_2\ldots j_n}$ έχουν κοινή μία πλευρά τους μόνον. Η διάμετρος της ένωσης δύο γειτονικών διαστημάτων του n-οστού βήματος είναι ίση με $\frac{1}{2^n}$ και διάμετρος της ένωσης δύο γειτονικών τετραγώνων του n-οστού βήματος είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$. Για κάθε $x \in \mathbb{I}$ υπάρχει ακολουθία i_n, $n \in \mathbb{N}$, με $i_n \in \{0,1,2,3\}$, ώστε $x \in I_{i_1 i_2,\ldots,i_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $I_{i_1} \supset I_{i_1 i_1} \supset \cdots \supset I_{i_1 i_2\ldots i_n} \supset \cdots$ και $\mathrm{diam}(I_{i_1 i_2\ldots i_n}) = \frac{1}{2^n} \to 0$, άρα από το θεώρημα κιβωτισμού στον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ έχουμε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{i_1 i_2\ldots i_n} = \{x\}$. Τα αντίστοιχα τετράγωνα $S_{i_1 i_2,\ldots i_n}$ αποτελούν μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$, με $S_{i_1} \supset S_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset S_{i_1 i_2,\ldots,i_n} \supset \cdots$ και $\mathrm{diam}\left(S_{i_1 i_2\ldots i_n}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2^n} \to 0$, άρα, από το θεώρημα κιβωτισμού στον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έχουμε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_{i_1 i_2\ldots i_n} = \{a\}$, με $a \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, με $\mathbb{I} \ni x \mapsto a \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.
Έστω $x_0 \in \mathbb{I}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε $\frac{\sqrt{5}}{2^n} < \varepsilon$. Επιπλέον, υπάρχουν γειτονικά διαστήματα K, L της n-οστής υποδιαίρεσης, ώστε $x_0 \in K \cup L$. Αν $|x - x_0| < \frac{1}{2^n}$, τότε $x \in K \cup L$. Επομένως

$$|x - x_0| < \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(x) - \gamma(x_0)\| \leq \frac{\sqrt{5}}{2^n} < \varepsilon,$$

άρα η γ είναι συνεχής, άρα είναι ένας δρόμος στο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$.
Επιπλέον, αν $a \in S_{i_1 i_2\ldots i_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τα υποδιαστήματα $I_{i_1}, I_{i_1 i_2}, \ldots, I_{i_1 i_2\ldots i_n}, \ldots$ έχουν τις ιδιότητες: $I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1 i_2\ldots i_n} \supset \ldots$ και $\mathrm{diam}\, I_{i_1 i_2\ldots i_n} = \frac{1}{2^n} \to 0$, επομένως $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{i_1 i_2\ldots i_n} = \{x\}$. Εκ του τρόπου κατασκευής της γ έχουμε $\gamma(x) = a$. Άρα η γ είναι επί. Επομένως $\gamma(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, δηλαδή η γ "γεμίζει" ολόκληρο το τετράγωνο. Όπως θα δούμε στην άσκηση 7.7.7., η συνεχής απεικόνιση γ δεν είναι 1-1.

7.2 Πληρότητα και συμπάγεια

Πρόταση 7.2.1. *Αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής, τότε είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω E_n, $n \in \mathbb{N}$ μια φθίνουσα ακολουθία ($E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_n \cdots$) μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$. Επειδή το σύνολο $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και ο X είναι συμπαγής, έπεται ότι $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \varnothing$. Τότε

$$x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow 0 \leq d(x,y) \leq \mathrm{diam}(E_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = 0\,,$$

γιατί $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$, άρα $x = y$, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$, άρα ο X είναι πλήρης, όπως προκύπτει από το θεώρημα κιβωτισμού του Cantor. □

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Αντιπαράδειγμα: ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, αλλά δεν είναι συμπαγής. Το ερώτημα που τίθεται και που θα απαντήσουμε ακολούθως είναι το ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχει ένας πλήρης μετρικός χώρος, προκειμένου να είναι συμπαγής.

Ορισμός 7.2.1. Έστω X μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Το A ονομάζεται **ολικώς φραγμένο**, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του A, ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon)$. Στην περίπτωση που $A = X$ στην πιο πάνω σχέση ισχύει το = και λέμε ότι ο X είναι **ολικώς φραγμένος μετρικός χώρος**.

Πρόταση 7.2.2. *Αν το A είναι ολικώς φραγμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d), τότε το A είναι φραγμένο.*

Απόδειξη: Επειδή το A είναι ολικώς φραγμένο υπάρχει $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, 1)$. Αν $x, y \in A$, τότε υπάρχουν $k, m \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε $x \in S(x_k, 1)$ και $y \in S(x_m, 1)$, άρα $d(x, x_k) < 1$ και $d(x, x_m) < 1$, άρα

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, x_m) + d(x_m, y) < 2 + M,$$

όπου $M = \max\{d(x_k, x_m)/k, m \in \{1, \ldots, n\}\}$, επομένως το A είναι φραγμένο. □

Ακολουθούν δύο αντιπαραδείγματα, το καθένα εκ των οποίων αποδεικνύει ότι το αντίστροφο της πιο πάνω πρότασης δεν ισχύει.

Παραδείγματα 7.2.1.

1. Ο χώρος $\mathbb{R}$, με τη διακριτή μετρική d είναι φραγμένος, γιατί για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x, y) \leq 1$. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ n διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί, όπου n ένας θετικός ακέραιος. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{1}{2})$, γιατί $d(x, x_i) = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επομένως ο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική δεν είναι ολικώς φραγμένος.

2. Μοναδιαίο κύκλο στο χώρο Hilbert (l_2) ονομάζουμε το σύνολο

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2 \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1 \right\}$$

Αν $x, y \in S$ και $x \neq y$, τότε

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2(x_n^2 + y_n^2)} = 2.$$

Επομένως το S είναι φραγμένο υποσύνολο του l_2. Με απαγωγή σε άτοπο θα αποδείξουμε ότι το S δεν είναι ολικώς φραγμένο. Παίρνουμε τα σημεία e_n του S, τα οποία είναι ακολουθίες που έχουν σε όλες τις θέσεις τους το 0 εκτός της n-οστής θέσης, όπου έχουν το 1. Αν υποθέσουμε ότι ο S είναι ολικώς φραγμένο υποσύνολο του χώρου l_2, τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, \ldots, x_n$ του l_2, ώστε $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} S\big(x_k, \frac{\sqrt{2}}{4}\big)$. Επειδή τα σημεία e_n είναι άπειρα υπάρχει $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, ώστε η $S(x_i, \frac{\sqrt{2}}{4})$ να περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά από αυτά, ας πούμε τα e_n, e_m. Τότε

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= d(e_n, e_m)\\ &\leq d(x_i, e_n) + d(x_i, e_m) < \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

άτοπο.

Πρόταση 7.2.3. *Αν (X, d) είναι ένας ολικώς φραγμένος μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε το A είναι ολικώς φραγμένο.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι ολικώς φραγμένος, υπάρχει $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, ώστε $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S\big(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Το σύνολο $C = \{x \in B / S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \varnothing\}$ είναι προφανώς μη κενό υποσύνολο του B. Έχουμε

$$y \in A \Rightarrow \exists x \in C; y \in S(x, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Για κάθε $x \in C$ επιλέγουμε ένα $a_x \in A$, ώστε $d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως

$$\begin{aligned}y \in A \quad &\Rightarrow d(y, a_x) \leq d(x, y) + d(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\\ &\Rightarrow y \in \bigcup_{x \in C} S(a_x, \varepsilon)\\ &\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in C} S(a_x, \varepsilon)\end{aligned}$$

και, επειδή το σύνολο $\{a_x, x \in C\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A το A είναι ολικώς φραγμένο. □

Πρόταση 7.2.4. *Κάθε φραγμένο διάστημα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$ είναι ολικώς φραγμένο.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το ζητούμενο για το διάστημα (a, b) με $a < b$. Ομοίως αποδεικνύεται για κάθε διάστημα με άκρα τα a, b. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $x_k = a + k\frac{b-a}{n}, k = 1, \ldots, n-1$, τότε

$$(a, b) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \Big(x_k - \frac{b-a}{n}, x_k + \frac{b-a}{n}\Big) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_n - \varepsilon, x_k + \varepsilon),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.2.5. *Αν* $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ *είναι μετρικοί χώροι, τότε ο* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, *με την καρτεσιανή μετρική είναι ολικώς φραγμένος, αν και μόνον, αν ο* X_i *είναι ολικώς φραγμένος για κάθε* $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έστωσαν $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $x \in X_i$. Θεωρούμε το $z = (z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) \in X$. Επειδή ο X είναι ολικώς φραγμένος, υπάρχουν στοιχεία $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, \ldots, y_i^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}), \ldots, y^{(m)} = (y_1^{(m)}, \ldots, y_i^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)})$ του X, ώστε $d(z, y^{(k)}) < \varepsilon$ για κάποιο $k \in \{1, \ldots, n\}$. Αλλά $d_i(x, y_i^{(k)}) \leq d(z, y^{(k)}) < \varepsilon$, συνεπώς ο X_i είναι ολικώς φραγμένος.

Το ικανό: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο A_i του X_i, ώστε για κάθε $x \in X_i$, υπάρχει $y_x \in A_i$, με $d_i(y_x, x) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Συνεπώς, αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, τότε για το $y = (y_{x_1}, \ldots, y_{x_n}) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ έχουμε

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_{x_i}))^2} < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon,$$

δηλαδή το ζητούμενο, επειδή το $\prod_{i=1}^{n} A_i$ είναι πεπερασμένο. □

Πρόταση 7.2.6. *Ένα μη κενό υποσύνολο* A *του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^n$ *είναι ολικώς φραγμένο, αν και μόνον, αν είναι φραγμένο.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο έχει αποδειχθεί (πρόταση 7.2.2).
Το ικανό: Επειδή το A είναι φραγμένο υπάρχει $M > 0$, ώστε $\|x - y\| \leq M$ για κάθε $x, y \in A$. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$, τότε

$$\begin{aligned}
\|x - y\| \leq M \Rightarrow & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq M \\
& \Rightarrow |x_i - y_i| \leq M, i = 1, \ldots, n \\
& \Rightarrow p_i(A) \subseteq [-M, M] \\
& \Rightarrow A \subseteq [-M, M]^n .
\end{aligned}$$

Από την πρόταση 7.2.4 έχουμε ότι το $[-M, M]$ είναι ολικώς φραγμένο, άρα από την πρόταση 7.2.5 το $[-M, M]^n$ είναι ολικώς φραγμένο, συνεπώς από την 7.2.3 προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι στους Ευκλείδειους χώρους οι έννοιες φραγμένο και ολικώς φραγμένο ταυτίζονται.

Ακολούθως στους μετρικούς χώρους θα ορίσουμε τις έννοιες της αριθμήσιμης, της σημειακής και της ακολουθιακής συμπάγειας και θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμες με την έννοια της συμπάγειας. Η εισαγωγή των εννοιών αυτών είναι αναγκαία, γιατί στην πράξη πολλές φορές η χρήση τους είναι αποτελεσματικότερη από εκείνη του ορισμού της συμπάγειας.

Ορισμός 7.2.2. Ο μετρικός χώρος X ονομάζεται **αριθμήσιμα συμπαγής**, αν και μόνον, αν κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ορισμός 7.2.3. Ο μετρικός χώρος X ονομάζεται **σημειακά συμπαγής**, αν και μόνον, αν κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο.

Ορισμός 7.2.4. Ο μετρικός χώρος X ονομάζεται **ακολουθιακά συμπαγής**, αν, και μόνον αν, κάθε ακολουθία στοιχείων του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λήμμα 7.2.7. *Έστωσαν (X, d) μετρικός χώρος και $x_n, n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία σ' αυτόν. Αν η x_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η x_n συγκλίνει.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η x_n είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε,. αν $n, m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} της x_n, ώστε $x_{k_n} \to x$, άρα υπάρχει $k_{n_1} \in \mathbb{N}$, ώστε, αν $k_n \geq k_{n_1}$, τότε $d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $k_n, n \geq \max\{k_{n_1}, n_0\}$ έχουμε $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$, άρα $x_n \to x$. □

Λήμμα 7.2.8. *Έστω (X, d) ολικώς φραγμένος μετρικός χώρος. Αν υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{U_i,\, i \in I\}$ του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, τότε υπάρχει ακολουθία $x_n, n \in \mathbb{N}$ του X, ώστε*

α΄) $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β΄) $S(x_n, \frac{1}{2^n}) \nsubseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο J του I.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε την ακολουθία x_n επαγωγικά, ως εξής: Ο X είναι ολικώς φραγμένος, άρα, υπάρχουν $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in X$, ώστε $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S(x_i^1, \frac{1}{2})$. Επειδή ο X δεν είναι συμπαγής υπάρχει $t \in \{1, \ldots, m\}$, ώστε $S(x_t^1, \frac{1}{2}) \nsubseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο J του I. Θέτουμε $x_1 = x_t^1$ και υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τους όρους $x_1, \ldots, x_n$ της ακολουθίας, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις α και β του λήμματος. Το σύνολο $S(x_n, \frac{1}{2^n})$, ως υποσύνολο του X είναι ολικώς φραγμένο (πρόταση 7.2.3), επομένως, υπάρχουν $x_1^{n+1}, \ldots, x_k^{n+1} \in S(x_n, \frac{1}{2^n})$, ώστε $S(x_n, \frac{1}{2^n}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} S(x_i^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$. Επειδή για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο J του I ισχύει $S(x_n, \frac{1}{2^n}) \nsubseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j$, υπάρχει $l \in \{1, \ldots, k\}$, ώστε $S(x_l^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \nsubseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο J του I. Θέτουμε $x_{n+1} = x_l^{n+1}$ και έτσι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα. Με την ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος έχουμε κατασκευάσει ακολουθία x_n, η οποία ικανοποιεί τις απαιτήσεις του λήμματος. □

Πρόταση 7.2.9. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α΄) Ο X είναι συμπαγής.

β΄) Ο X είναι αριθμήσιμα συμπαγής.

γ΄) Ο X είναι σημειακά συμπαγής.

δ΄) Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.

ε΄) Ο X είναι πλήρης και ολικώς φραγμένος.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Προφανές.

β') $\Rightarrow$ γ'): Έστω ότι ο X είναι αριθμήσιμα συμπαγής. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το A είναι ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του X και εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $A' = \varnothing$, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X και όλα τα σημεία του είναι μεμονωμένα. Συνεπώς για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon_x) \cap A = \{x\}$. Επομένως το $\{S(x, \varepsilon_x), x \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ είναι ένα ανοικτό, αριθμήσιμο κάλυμμα του X, άρα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έστω το $\{S(x_1, \varepsilon_{x_1}), \dots, S(x_n, \varepsilon_{x_n}), X \setminus A\}$. Άρα $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})$, άρα $A = A \cap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})\Big) = \{x_1, \dots, x_n\}$, άτοπο.

γ') $\Rightarrow$ δ'): Έστω $x_n, n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία στον X. Αν το σύνολο $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο, τότε η x_n είναι τελικά σταθερή, άρα έχει προφανώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Αν το A είναι απειροσύνολο, τότε, επειδή ο X είναι σημειακώς συμπαγής, το A έχει οριακό σημείο, έστω το x. Από την πρόταση 1.6.4, συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει ακολουθία x_{k_n} διακεκριμένων σημείων του A, με $x_{k_n} \to x$. Άρα η x_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία την x_{k_n}. Άρα ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.

δ') $\Rightarrow$ ε'): Έστω $x_n, n \in \mathbb{N}$ μια βασική ακολουθία στον X. Η x_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα (λήμμα 7.2.7), η x_n συγκλίνει. Επομένως ο X είναι πλήρης. Για την απόδειξη του ολικώς φραγμένου, χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε ο X να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος $S(x_i, \varepsilon)$, με $x_i \in X$. Έστω $x_1 \in X$, επειδή $S(x_1, \varepsilon) \subset X$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_2 \in X$, ώστε $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, ώστε $d(x_k, x_m) \geq \varepsilon$ για κάθε $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Επειδή $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon) \subset X$, υπάρχει $x_{n+1} \in X$, ώστε $d(x_{n+1}, x_m) \geq \varepsilon$ για κάθε $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο επαγωγικά έχουμε κατασκευάσει ακολουθία x_n, ώστε $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία αυτή, προφανώς, δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση.

ε') $\Rightarrow$ α'): Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο X είναι πλήρης, ολικώς φραγμένος, αλλά δεν είναι συμπαγής. Επομένως υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{U_i, i \in I\}$ του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς στον X υπάρχει ακολουθία x_n, όπως αυτή του λήμματος 7.2.8. Η x_n είναι βασική,[4] άρα συγκλίνει. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$. Υπάρχει $i \in I$, ώστε $x \in U_i$. Επειδή το U_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, με $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ και $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
& y \in S\big(x_n, \tfrac{1}{2^n}\big) \\
& \Rightarrow d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, x_n) < \varepsilon \\
& \Rightarrow y \in S(x, \varepsilon) \\
& \Rightarrow y \in U_i,
\end{aligned}
$$

[4] Μιχάλης Παπαδημητράκης: Ανάλυση- Ηλεκτρονικό αποθετήριο Κάλλιπος σελ. 66 άσκηση 2.6.4.[a]: Αν για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών x_n υπάρχει n_0, ώστε $|x_n - x_{n+1}| < cM^n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $0 < M < 1$, τότε η x_n είναι βασική ακολουθία.

άρα $S\big(x_n, \frac{1}{2^n}\big) \subseteq U_i$, το οποίο είναι άτοπο, από το λήμμα 7.2.8. □

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι η πρόταση

Πρόταση 7.2.10. *Αν (X, d) μετρικός χώρος, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X είναι συμπαγής.

β΄) Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

Πόρισμα. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε, το A είναι συμπαγές, αν και μόνον, αν είναι κλειστό και ολικώς φραγμένο.*

Πρόταση 7.2.11. ***(Θεώρημα Heine- Borel)*** *Ένα μη κενό υποσύνολο A του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, αν και μόνον, αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια των προτάσεων 7.2.6 και 7.2.10. □

Τα επόμενα παραδείγματα αναφέρονται σε υποσύνολα των Ευκλείδειων χώρων, τα οποία είναι συμπαγή και δεν μπορούσαμε να αποδείξουμε τη συμπάγειά τους στην παράγραφο 5.1, γιατί μας έλειπε το θεώρημα Heine-Borel.

Παραδείγματα 7.2.2.

1. Ο $\mathbb{D}^n = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| \leq 1\}$ είναι προφανώς φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \|x\|$ είναι συνεχής και $\mathbb{D}^n = f^{-1}([0, 1])$, άρα ο $\mathbb{D}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως ο $\mathbb{D}^n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

2. Η $\mathbb{S}^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| = 1\}$ είναι προφανώς φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \|x\|$ είναι συνεχής και $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$, άρα η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ακολουθούν δύο σημαντικές εφαρμογές των ιδιοτήτων της συμπάγειας στους Ευκλείδειους χώρους.

Πρόταση 7.2.12. *Ο χώρος $\mathbb{Q}$ με την Ευκλείδεια τοπολογία δεν έχει συμπαγές υποσύνολο, με μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με μη κενό εσωτερικό. Άρα υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Q}$, με $a < b$ και $B = (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq A$. Μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία ρητών q_n, $n \in \mathbb{N}$ του B, ώστε $q_n \to c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Επειδή το A είναι συμπαγές η q_n έχει υπακολουθία με όριο ένα σημείο του A (πρόταση 7.2.9), άτοπο, γιατί κάθε υπακολουθία της q_n, $n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $c \notin A$.

Πόρισμα. *Το $\mathbb{Q}$ με την Ευκλείδεια τοπολογία δεν είναι τοπικά συμπαγής χώρος.*

Η επόμενη πρόταση είναι ένα σημαντικό και χρησιμότατο θεώρημα που αναφέρεται στα συμπαγή και κυρτά υποσύνολα των Ευκλείδειων χώρων, με πολλές χρήσεις στην αλγεβρική τοπολογία.

Πρόταση 7.2.13. *Αν X ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, τότε*

$$X \cong \mathbb{D}^n \text{ και } \mathrm{Bd}(X) \cong \mathbb{S}^{n-1}.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\mathbf{0} \in X^0$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, αν $x_0 \in X^0$ αντικαθιστούμε το X με το ομοιόμορφό του $X' = \{x - x_0/x \in X\}$. Η ημιευθεία, η οποία έχει ως αρχή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $y \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι το σύνολο $V_y = \{ty/t \geq 0\}$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε τέτοια ημιευθεία, τέμνει το σύνορο του X σε ένα μόνον σημείο x και τον $\mathbb{S}^{n-1}$ στο σημείο $\frac{x}{\|x\|}$. Έχουμε ότι $\mathbf{0} \in X^\circ \neq \varnothing$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(\mathbf{0}, \varepsilon) \subseteq X$. Επίσης

$$\begin{aligned} t < \frac{\varepsilon}{\|y\|} &\Rightarrow \|yt\| = \|y\|t < \varepsilon \\ &\Rightarrow yt \in S(\mathbf{0}, \varepsilon) \\ &\Rightarrow V_y \cap X \neq \varnothing\,. \end{aligned}$$

Επιπλέον, το $V_y \cap X$, ως υποσύνολο του X είναι φραγμένο, άρα το

$$W_y = \{\|x\|/x \in V_y \cap X\}$$

είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως το W_y έχει supremum, έστω το $a(y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Είναι προφανές ότι, αν για κάποιο $t \in (0, 1]$ ισχύει $z = ty$, τότε $V_y = V_z$, άρα $W_z = W_y$ και $a(z) = a(y)$. Αν b πραγματικός αριθμός, με $0 < b < a(y)$, τότε, από τον ορισμό του supremum, υπάρχει $ty \in V_y \cap X$, με $b < \|ty\| = t\|y\|$, άρα $0 < \frac{b}{\|y\|} < t$, επομένως το σημείο $\frac{b}{\|y\|}y$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, ty]$, άρα, λόγω της κυρτότητας του X έχουμε $\frac{b}{\|y\|}y \in X$. Έστω ακολουθία $t_n \in (0, a(y))$, με $t_n \to a(y)$, άρα $t_n \frac{y}{\|y\|} \in X$ και $t_n \frac{y}{\|y\|} \to a(y)\frac{y}{\|y\|}$. Συνεπώς το $x = a(y)\frac{y}{\|y\|}$ είναι ένα οριακό σημείο του X, άρα $x \in X$, επειδή το X είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από τον τρόπο ορισμού του x, προκύπτει ότι σε κάθε ημιευθεία V_y αντιστοιχεί ένα και μόνον ένα x. Υποθέτουμε ότι $x \in X^0$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq X$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left\|(a(y) + \frac{\varepsilon}{2})\frac{y}{\|y\|} - x\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon &\Rightarrow (a(y) + \frac{\varepsilon}{2})\frac{y}{\|y\|} \in S(x, \varepsilon) \subseteq X \\ &\Rightarrow (a(y) + \frac{\varepsilon}{2})\frac{y}{\|y\|} \in V_y \cap X \\ &\Rightarrow a(y) + \frac{\varepsilon}{2} = \|(a(y) + \frac{\varepsilon}{2})\frac{y}{\|y\|}\| \in W_y\,, \end{aligned}$$

άτοπο, γιατί $a(y) = \sup W_y$. Επομένως η ημιευθεία V_y τέμνει το X σε ένα ακριβώς σημείο x, το οποίο ανήκει στο $\mathrm{Bd}(X)$, άρα $V_y = \{\lambda x/\lambda \geq 0\} = V_x$. [5]Αν $z = \lambda x$ είναι το κοινό

[5]Εφεξής τις ημιευθείες που διέρχονται από το $\mathbf{0}$ θα τις σημειώνουμε με V_x, με $x \in \mathrm{Bd}\,X$. Επομένως, αν $V_x = V_{x'}$, τότε $x = x'$, λόγω της μοναδικότητας του x.

σημείο της V_y και της $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| = 1 &\Rightarrow \lambda\|x\| = 1 \\ &\Rightarrow \lambda\|x\| = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|x\|} \\ &\Rightarrow z = \frac{x}{\|x\|}\,.\end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι η ημιευθεία V_x τέμνει το $\mathrm{Bd}(X)$ σε ένα ακριβώς σημείο x και τον $\mathbb{S}^1$ στο σημείο το $\frac{x}{\|x\|}$.
Έστω $x = a(y)\frac{y}{\|y\|} \in \mathrm{Bd}(X)$ και $t > 1$, τότε

$$\begin{aligned} &tx \in X \Rightarrow \|tx\| \leq a(y) \\ &\Rightarrow \|ta(y)\frac{x}{\|x\|}\| \leq a(y) \\ &\Rightarrow ta(y) \leq a(y) \\ &\Rightarrow t \leq 1,\end{aligned}$$

αντίφαση. Επομένως

$$X = \{tx/x \in \mathrm{Bd}(X) \wedge t \in [0,1]\},$$

και

$$X^0 = \{tx/x \in \mathrm{Bd}(X) \wedge t \in [0,1)\}.$$

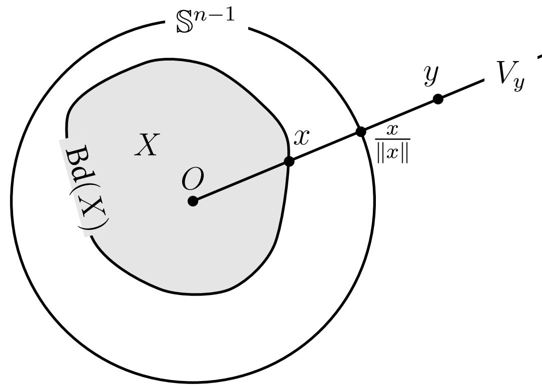
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : X \to \mathbb{D}^n$, με

$$f(tx) = \begin{cases} t\frac{x}{\|x\|} & x \in \mathrm{Bd}(X), 0 < t \leq 1 \\ \mathbf{0} & x = \mathbf{0} \end{cases}.$$

- Η f είναι συνεχής: Αν y_n είναι μια ακολουθία στον X, με $y_n \to \mathbf{0}$, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε πως όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι διαφορετικοί του $\mathbf{0}$, άρα $y_n = t_n x_n$, με $0 < t_n \leq 1$ και $x_n \in \mathrm{Bd}\, X$. Επειδή $\mathbf{0} \in X^0$, υπάρχει $M > 0$, ώστε $S(\mathbf{0}, M) \subseteq X^0$, άρα $\|x_n\| > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επειδή $x_n \in \mathrm{Bd}(X)$.
  Έχουμε $y_n \to \mathbf{0}$, άρα $t_n x_n \to 0$, άρα $t_n\|x_n\| \to 0$. Αν πάρουμε ένα $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\begin{aligned} &t_n\|x_n\| < \varepsilon M \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow t_n\|x_n\|M < \varepsilon M\|x_n\| \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow 0 < t_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow t_n \to 0 \\ &\Rightarrow f(y_n) = f(t_n x_n) = t_n\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \mathbf{0} = f(\mathbf{0})\,,\end{aligned}$$

  γιατί η $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ είναι φραγμένη. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$.



Σχήμα 7.3

Έστω $y \in X$, με $y \neq \mathbf{0}$. Τότε $y = tx$, με $0 < t \leq 1$ και $x \in \mathrm{Bd}(X)$. Υποθέτουμε ότι $y_n = t_n x_n \to tx$, με $0 < t_n \leq 1$ και $x_n \in \mathrm{Bd}(X)$. Αν t_m είναι μια υπακολουθία της t_n, τότε, επειδή η t_m είναι φραγμένη θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω t_{k_n}, με $t_{k_n} \to t'$. Είναι $x_{k_n} = \frac{t_{k_n} x_{k_n}}{t_{k_n}} \to \frac{tx}{t'} = x'$. Δηλαδή $t_{k_n} x_{k_n} \to t'x'$ και $t_{k_n} x_{k_n} \to tx$, άρα $t'x' = tx$, άρα οι ημιευθείες V_x και $V_{x'}$ έχουν και άλλο κοινό σημείο εκτός της αρχής, επομένως $V_x = V_{x'}$, άρα $x = x'$ και συνακόλουθα $t = t'$.
Επομένως κάθε υπακολουθία της t_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο το t, άρα $t_n \to t$.[6] Άρα $x_n = \frac{t_n x_n}{t_n} \to \frac{tx}{t} = x$. Τελικά, $f(y_n) = f(t_n x_n) = t_n \frac{x_n}{\|x_n\|} \to t\frac{x}{\|x\|} = f(tx) = f(y)$, άρα η f είναι συνεχής στο y, επομένως η f είναι συνεχής.

- Η f είναι 1-1: Επειδή $f(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$, αρκεί να δείξουμε ότι $f(t_1 x_1) = f(t_2 x_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \wedge x_1 = x_2$, αν $t_1, t_2 \in (0, 1]$ και $x_1, x_2 \in \mathrm{Bd}(X)$. Έχουμε $f(t_1 x_1) = f(t_2 x_2)$, άρα $t_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} = t_2 \frac{x_2}{\|x_2\|}$, άρα $\|t_1 \frac{x_1}{\|x_1\|}\| = \|t_2 \frac{x_2}{\|x_2\|}\|$, άρα $t_1 = t_2$.
Επομένως από την $t_1 \frac{x_1}{\|x_1\|} = t_2 \frac{x_2}{\|x_2\|}$, συμπεραίνουμε ότι $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|}$, άρα $V_{x_1} = V_{x_2}$, άρα $x_1 = x_2$. Συνεπώς η f είναι 1-1.

- Η f είναι επί: Έχουμε $\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$. Αν $y \in \mathbb{D}^n$, με $y \neq \mathbf{0}$, τότε υπάρχει μοναδικό $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ και μοναδικό $t \in (0, 1]$, ώστε $y = tz$. Η ημιευθεία V_z τέμνει το $\mathrm{Bd}(X)$ σε μοναδικό σημείο x, ώστε $z = \frac{x}{\|x\|}$, άρα $y = tz = t\frac{x}{\|x\|} = f(x)$, $x \in \mathrm{Bd}(X)$, άρα η f είναι επί.

- Τέλος, επειδή ο X είναι συμπαγής και ο $\mathbb{D}^n$ Hausdorff, η f είναι ομοιομορφισμός, συνεπώς $X \cong \mathbb{D}^n$.

  Προφανώς $f\big(\mathrm{Bd}(X)\big) = \mathbb{S}^{n-1}$.

□

Παράδειγμα 7.2.1. Ας δούμε δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα από τους χώρους της εποπτείας μας. Στο Ευκλείδειο επίπεδο, υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ του οποιουδήποτε κυρτού πολυγώνου με το εσωτερικό του και του δίσκου $\mathbb{D}^2$, ο οποίος στέλνει την περιμετρική

[6] βλ. Μιχάλης Παπαδημητράκης: Ανάλυση- Ηλεκτρονικό αποθετήριο Κάλλιπος σελ. 64 άσκηση 2.5.12.: Αποδείξτε ότι η ακολουθία x_n έχει όριο το $x \in \mathbb{R}$, αν, και μόνον, αν κάθε υπακολουθία της έχει υπακολουθία με όριο το x.

γραμμή του πολυγώνου στο σύνορο $(\mathbb{S}^1)$ του δίσκου. Στον Ευκλείδειο χώρο, υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ του οποιουδήποτε κυρτού πολυέδρου με το εσωτερικό του και της κλειστής μπάλας $\mathbb{D}^3$, ο οποίος στέλνει το σύνολο των εδρών του πολυέδρου στο σύνορο $(\mathbb{S}^2)$ της μπάλας.

Πόρισμα. *Για τον μοναδιαίο κύβο $\mathbb{I}^n$ ισχύουν τα:*

α΄) $\mathbb{I}^n \cong \mathbb{D}^n$.

β΄) $\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n) = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n,\ \exists i \in \{1, \dots, n\},\ x_i(1 - x_i) = 0\big\}$.

γ΄) $\mathbb{B}^n \cong \big(\mathbb{I}^n\big)^0 = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n / \, x_i(1 - x_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\big\}$.

7.3 Θεώρημα κατηγορίας Baire

Το θεώρημα Baire είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα των μαθηματικών. Είναι "υπεύθυνο" για πολλά και εντυπωσιακά αποτελέσματα κυρίως στην ανάλυση. Εδώ θα δούμε τις τοπολογικές συνέπειες του θεωρήματος κατηγορίας του Baire, το οποίο είναι συνέπεια του θεωρήματος πυκνότητας του Baire.

Ως μια εισαγωγή στη λογική του θεωρήματος πυκνότητας αναφέρουμε το εξής: αν $q_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών, τότε τα σύνολα $A_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$ είναι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, με $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Ο Baire ισχυρίζεται ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, αν στη θέση του $\mathbb{Q}$ έχουμε έναν πλήρη μετρικό χώρο.

Πρόταση 7.3.1. ***(Θεώρημα πυκνότητας* Baire *)***[7] *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και G_n, $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Το $G_1 \cap S(x_0, \varepsilon)$ είναι μη κενό και ανοικτό, γιατί το G_1 είναι πυκνό. Άρα υπάρχουν $x_1 \in X$ και $\varepsilon_1 \in (0, 1]$, ώστε

$$S(x_1, \varepsilon_1) \subseteq \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq S(x_0, \varepsilon) \cap G_1.$$

Το $S(x_1, \varepsilon_1) \cap G_2$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, άρα υπάρχουν $x_2 \in X$ και $0 < \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}$, ώστε

$$S(x_2, \varepsilon_2) \subseteq \overline{S}(x_2, \varepsilon_2) \subseteq S(x_1, \varepsilon_1) \cap G_2.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει $x_n \in X$ και $\varepsilon_n \in (0, \frac{1}{2^{n-1}}]$, ώστε

[7] Rene-Louis Baire (1874-1932): Γάλλος μαθηματικός

$$S(x_n, \varepsilon_n) \subseteq \overline{S}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq S(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap G_n.$$

Με την ίδια λογική συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $x_{n+1} \in X$ και $\varepsilon_{n+1} \in (0, \frac{1}{2^n}]$, ώστε

$$S(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{S}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq S(x_n, \varepsilon_n) \cap G_{n+1}.$$

Επομένως με την ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία x_n, στοιχείων του X, ώστε

$$S(x_0, \varepsilon) \supseteq \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) \supseteq \cdots \supseteq \overline{S}(x_n, \varepsilon_n) \supseteq \cdots \tag{7.3}$$

$$\text{diam}(\overline{S}(x_n, \varepsilon_n)) \leq \frac{1}{2^n} \tag{7.4}$$

και

$$\overline{S}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.5}$$

Συνέπεια της (7.4) είναι το ότι $\text{diam}(\overline{S}(x_n, \varepsilon_n)) \to 0$. Επειδή ο χώρος είναι πλήρης, από το Θεώρημα κιβωτισμού του Cantor έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, \varepsilon_n) = \{x\} .$$

Λόγω της (7.3) έχουμε $x \in S(x_0, \varepsilon)$ και από την (7.5) έχουμε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, άρα $S(x_0, \varepsilon) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$, επομένως το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό. □

Ορισμός 7.3.1. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται **πρώτης κατηγορίας Baire**, αν και μόνον, αν είναι ένωση μιας ακολουθίας αραιών υποσυνόλων του. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **δεύτερης κατηγορίας Baire**.

Πρόταση 7.3.2. ***(Θεώρημα κατηγορίας Baire)*** *Κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι δεύτερης κατηγορίας Baire.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο πλήρης μετρικός χώρος X είναι πρώτης κατηγορίας Baire. Άρα υπάρχει ακολουθία A_n υποσυνόλων του X, με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, και $\overline{A_n}^0 = \varnothing$. Τα σύνολα $G_n = X \setminus \overline{A_n}$ είναι προφανώς ανοικτά. Επιπλέον, (πρόταση 1.3.8) $\overline{G_n} = \overline{X \setminus \overline{A_n}} = X \setminus \left(\overline{A_n}\right)^0 = X$, άρα τα G_n είναι πυκνά υποσύνολα του X, επομένως

(πρόταση 7.3.1) το $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X άρα

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing &\Rightarrow \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big)^c \neq X \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c \neq X \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq X \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq X \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X\,,\end{aligned}$$

άτοπο. □

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του θεωρήματος κατηγορίας Baire είναι το ότι οι χώροι πρώτης κατηγορίας Baire δεν είναι πλήρεις. Μάλιστα οι χώροι αυτοί έχουν ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: δεν υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος, ο οποίος να είναι ομοιόμορφος με έναν χώρο πρώτης κατηγορίας Baire, ενώ ένας μη πλήρης μετρικός χώρος μπορεί να είναι ομοιόμορφος με έναν πλήρη μετρικό χώρο π.χ $(0,1) \cong \mathbb{R}$. Πράγματι:
Αν υποθέσουμε ότι ο X είναι πρώτης κατηγορίας Baire, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου τα A_n, είναι αραιά υποσύνολα του X. Επομένως $Y = f\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$, άρα και ο Y είναι πρώτης κατηγορίας Baire, επειδή τα $f(A_n)$ είναι αραιά υποσύνολα του Y (άσκηση 2.5.12).

Ορισμός 7.3.2. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται $\mathbf{G}_\delta$ (αντ.$\mathbf{F}_\sigma$), αν και μόνον, αν είναι τομή (αντ. ένωση) μιας ακολουθίας ανοικτών (αντ. κλειστών) υποσυνόλων του X.

Άμεσα, από τον ορισμό προκύπτει ότι ισχύει η πρόταση

Πρόταση 7.3.3. *Το A είναι G_δ, αν και μόνον, αν το A^c είναι F_σ.*

Παραδείγματα 7.3.1.

1. Αν $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, τότε τα σύνολα $Q_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}, n \in \mathbb{N}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\} = \mathbb{A},$$

άρα το $\mathbb{A}$ είναι ένα G_δ σύνολο.

2. Αν $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, τότε τα σύνολα $\{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$, άρα το $\mathbb{Q}$ είναι ένα F_σ σύνολο.

Πρόταση 7.3.4. *Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το $\mathbb{Q}$ είναι G_δ, άρα υπάρχει ακολουθία U_n, $n \in \mathbb{N}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Τότε $\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c$. Είναι $(\overline{U_n^c})^0 = (U_n^c)^0 = \varnothing$, γιατί, επειδή $U_n^c \subseteq \mathbb{A}$ το U_n^c δεν περιέχει διάστημα. Συνεπώς $\mathbb{R} = \big(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}\big) \cup \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c\big)$. Το σύνολο $\big\{\{x\}/x \in \mathbb{Q}\big\} \cup \{U_n^c/n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο με στοιχεία αραιά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα μπορούμε να το γράψουμε ως μια ακολουθία B_n, $n \in \mathbb{N}$, με όρους αραιά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επομένως, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, άρα το $\mathbb{R}$ είναι πρώτης κατηγορίας Baire, άτοπο, γιατί ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Πρόταση 7.3.5. *Το $\mathbb{A}$ δεν είναι F_σ.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Αν το $\mathbb{A}$ είναι F_σ, τότε το $\mathbb{Q} = \mathbb{A}^c$ είναι G_δ, άτοπο, από την προηγούμενη πρόταση. □

Ακολούθως, με την βοήθεια του θεωρήματος κατηγορίας Baire θα δώσουμε μια απόδειξη, που οφείλαμε από την παράγραφο 3.5 για το ότι το επίπεδο Songrenfrey δεν είναι χώρος T_4.

Πρόταση 7.3.6. *Το επίπεδο Songrenfrey δεν είναι T_4 χώρος.*

Απόδειξη: Η αντιδιαγώνιος ευθεία

$$L = \{(x, -x)/x \in \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $X = \mathbb{R}_r \times \mathbb{R}_r$. (γιατί;) Επιπλέον, ο περιορισμός της τοπολογίας του X στην L είναι η διακριτή τοπολογία (γιατί;). Συνεπώς κάθε υποσύνολο της L είναι κλειστό στην L, άρα και κλειστό στον X. Θεωρούμε τα κλειστά και ξένα υποσύνολα

$$K = \{(x, -x)/x \in \mathbb{Q}\} \text{ και } L \setminus K = \{(x, -x)/x \in \mathbb{A}\}$$

της L, άρα και του X. Αν U, V ανοικτά υποσύνολα του X, με $K \subseteq U$ και $L \setminus K \subseteq V$, τότε, αν $x \in \mathbb{A}$ έχουμε $(x, -x) \in V$, άρα υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$, ώστε $[x, x + \frac{1}{n_x}) \times [-x, -x + \frac{1}{n_x}) \subseteq V$. Θέτουμε $A_n = \{x \in \mathbb{A} \,/\, n_x = n\}$ και έχουμε

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ και } \mathbb{R} = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\Big).$$

Από το θεώρημα κατηγορίας Baire για τον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{R}$, έπεται ότι $(\overline{A_n})^\circ \neq \varnothing$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει ανοικτό διάστημα (a, b), με $(a, b) \subseteq \overline{A_n}$. Αν $y \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, τότε $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap A_n \neq \varnothing$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επιπλέον, $(y, -y) \in K \subseteq U$ και, επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X είναι $[y, y + \delta) \times [-y, -y + \delta) \subseteq U$ για κάποιο $\delta > 0$. Παίρνουμε $\varepsilon < \min\{\delta, \frac{1}{n}\}$ και $z \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap A_n$. Παρατηρούμε ότι $(z, -z) \in [y, y + \delta) \times [-y, -y + \delta) \subseteq U$ και $(z, -z) \in [z, z + \delta) \times [-z, -z + \delta) \subseteq V$, άρα $U \cap V \neq \varnothing$. Δηλαδή τα οποιαδήποτε ανοικτά υποσύνολα U, V του X, τα οποία περιέχουν τα K και $L \setminus K$, αντιστοίχως, έχουν μη κενή τομή. Συνεπώς ο X δεν είναι T_4. □

7.4 Λήμμα Lebesque-Ομοιόμορφη σύγκλιση

Το λήμμα Lebesque[8] που ακολουθεί είναι μια πολύ σημαντική πρόταση των μαθηματικών, με πολλές εφαρμογές στην αλγεβρική τοπολογία. Στα επόμενα θα δούμε τη χρησιμότητά του στον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου, της θεμελιώδους ομάδας των σφαιρών ($\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$), στην απόδειξη των θεωρημάτων των καλυπτικών χώρων και στην απόδειξη του θεωρήματος εκτομής.

Πρόταση 7.4.1. ***(Λήμμα Lebesque)*** *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{G} = \{U_i, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε να αληθεύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*

Αν A είναι υποσύνολο του X, με $\mathrm{diam}(A) < \varepsilon$, τότε υπάρχει $i \in I$ με $A \subseteq U_i$.

Απόδειξη: Αν για κάποιο $i \in I$ ισχύει $U_i = X$, τότε το ε είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, συνεπώς το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Για αυτόν τον λόγο υποθέτουμε ότι $U_i \neq X$ για κάθε $i \in I$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το $\{U_1, \ldots, U_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{G}$ και θεωρούμε τα σύνολα $F_i = U_i^c, i = 1, \ldots, n$, τα οποία είναι κλειστά υποσύνολα του X. Ακολούθως θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d(x, F_i)}{n}.$$

Αν για κάποιο $x \in X$ είναι $f(x) = 0$, τότε $d(x, F_i) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $x \in F_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$, άρα $x \notin \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right)^c$, άρα $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i = X$, άτοπο, επομένως

$$f(x) > 0 \tag{7.6}$$

για κάθε $x \in X$. Έστω $\varepsilon = \min\{f(x)/x \in X\}$, το οποίο υπάρχει (πρόταση (5.1.11)). Η (7.6), συνεπάγεται ότι $\varepsilon > 0$. Έστω $A \subseteq X$, με $\mathrm{diam}(A) < \varepsilon$ και $x_0 \in A$. Είναι $\varepsilon \leq f(x_0) \leq d(x_0, F_m) = \max\{d(x_0, F_i), i = 1, \ldots, n\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} y \in A &\Rightarrow d(x_0, y) \leq \mathrm{diam}(A) < \varepsilon \\ &\Rightarrow y \notin F_m\,, \end{aligned}$$

γιατί, αν $y \in F_m$, τότε $d(x_0, y) \geq d(x_0, F_m) \geq \varepsilon$, άτοπο.
Επομένως $y \in U_m$, άρα $A \subseteq U_m$, συνεπώς ο ε είναι ο ζητούμενος θετικός αριθμός. □

Ορισμός 7.4.1. Ο αριθμός ε της ανωτέρω πρότασης ονομάζεται **αριθμός Lebesque** του καλύμματος $\mathcal{G}$.

Οι γνωστές από τον απειροστικό λογισμό έννοιες της ομοιόμορφης συνέχειας και της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούν με φυσικό τρόπο να επεκταθούν στον οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

[8]Henri Lebesque (1875-1941): Γάλλος μαθηματικός

Ορισμός 7.4.2. Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και απεικόνιση $f : X \to Y$. Η f ονομάζεται **ομοιόμορφα συνεχής**, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $U \in \mathcal{T}$, ώστε

$$x, y \in U \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Παρατήρηση: Αν ο X είναι μετρικός χώρος με μετρική την d_1, τότε ο προηγούμενος ορισμός γίνεται:
Η f ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ειδικά δε στην περίπτωση που και οι δύο χώροι είναι υπόχωροι Ευκλείδειων χώρων ο ορισμός γίνεται:
Η f ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής, αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Ορισμός 7.4.3. Έστωσαν X μη κενό σύνολο, (Y, d) μετρικός χώρος και ακολουθία απεικονίσεων $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η f_n **συγκλίνει σημειακά** στην απεικόνιση $f : X \to Y$ (το συμβολίζουμε με $f_n \overset{p}{\to} f$), αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Ορισμός 7.4.4. Έστωσαν X μη κενό σύνολο, (Y, d) μετρικός χώρος και ακολουθία απεικονίσεων $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η f_n **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην απεικόνιση $f : X \to Y$ (το συμβολίζουμε με $f_n \overset{u}{\to} f$), αν και μόνον, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

για κάθε $x \in X$.

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι το n_0 του ορισμού της σημειακής σύγκλισης εξαρτάται και από το x και από το ε, ενώ το n_0 της ομοιόμορφης σύγκλισης μόνον από το ε.

Άμεση συνέπεια του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας είναι η πρόταση

Πρόταση 7.4.2. *Έστωσαν X, Y μετρικοί χώροι. Αν η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι συνεχής.*

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Αντιπαράδειγμα είναι η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2$, η οποία είναι συνεχής. Θα εξετάσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της, επιλέγοντας αυθαίρετα ένα $\delta > 0$. Για $y > \frac{1}{\delta}$, θεωρούμε $x = y + \frac{\delta}{2}$ και έχουμε $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, ενώ

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y| = \frac{\delta}{2}\Big(2y + \frac{\delta}{2}\Big) > 1.$$

Άρα ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας δεν ικανοποιείται για $\varepsilon = 1$, επομένως η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Όμως

Πρόταση 7.4.3. *Έστωσαν* (X, d_1), (Y, d_2) *μετρικοί χώροι. Αν ο* X *είναι συμπαγής και η απεικόνιση* $f : X \to Y$ *είναι συνεχής, τότε η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Το σύνολο $\{f^{-1}(S(z, \frac{\varepsilon}{2})),\ z \in Y\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Αν δ είναι ο αριθμός Lebesque του καλύμματος και $d_1(x, y) < \frac{\delta}{2}$, τότε $\mathrm{diam}(\{x, y\}) < \delta$, άρα υπάρχει $z \in Y$, ώστε $\{x, y\} \subseteq f^{-1}(S(z, \frac{\varepsilon}{2}))$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\{x, y\} \subseteq f^{-1}(S(z, \tfrac{\varepsilon}{2})) &\Rightarrow f(\{x, y\}) \subseteq f(f^{-1}(S(x, \tfrac{\varepsilon}{2}))) \subseteq S(z, \tfrac{\varepsilon}{2}) \\
&\Rightarrow f(x), f(y) \in S(z, \tfrac{\varepsilon}{2}) \\
&\Rightarrow d_2(z, f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d_2(z, f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), z) + d_2(z, f(y)) < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

δηλαδή , αν $d_1(x, y) < \frac{\delta}{2}$, τότε $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πρόταση 7.4.4. *Έστωσαν* X *τοπολογικός χώρος,* (Y, d) *μετρικός χώρος και ακολουθία συνεχών απεικονίσεων* $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$. *Αν η* f_n *συγκλίνει ομοιόμορφα στην απεικόνιση* f, *τότε η* f *είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $x_0 \in X$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση της f_n στην f, συνεπάγεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x \in X \Rightarrow d(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.7}$$

Έστω $x_0 \in X$. Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει περιοχή U του x_0, ώστε

$$x \in U \Rightarrow d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.8}$$

Η (7.7) για $x = x_0$ γίνεται

$$d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.9}$$

Από τις (7.7), (7.8) και (7.9), συμπεραίνουμε ότι, αν $x \in U$, τότε $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$, άρα $d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Άμεση συνέπεια των ορισμών της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι η πρόταση:

Πρόταση 7.4.5. *Αν* $f_n \xrightarrow{u} f$, *τότε* $f_n \xrightarrow{p} f$.

Παρατήρηση: Η αντίστροφη συνεπαγωγή στην ανωτέρω πρόταση δεν ισχύει πάντα. Ένα αντιπαράδειγμα είναι η ακολουθία απεικονίσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = x^n$, η οποία συγκλίνει σημειακά στην απεικόνιση $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. Αν η πιο πάνω σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη, τότε η f πρέπει να είναι συνεχής, επειδή οι f_n είναι συνεχείς, το οποίο όμως δεν ισχύει. Επομένως η σημειακή σύγκλιση δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά την ομοιόμορφη.

7.5 Το σύνολο Cantor

Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσουμε ένα από τα διασημότερα σύνολα των μαθηματικών, το οποίο έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές και θα αποδείξουμε μια βασική τοπολογική ιδιότητά του.

Ορισμός 7.5.1. Το σύνολο Cantor κατασκευάζεται με βήματα ως εξής:

Στο πρώτο βήμα χωρίζουμε το διάστημα $\mathbb{I}$ σε τρία διαστήματα μήκους $\frac{1}{3}$, ήτοι τα

$$[0, \tfrac{1}{3}],\ (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}),\ [\tfrac{2}{3}, 0]$$

και "πετάμε" το ενδιάμεσο ανοικτό. Μας μένουν δύο κλειστά ξένα διαστήματα. Το "αριστερό" ονομάζουμε I_0 και το "δεξιό" ονομάζουμε I_1. Θέτουμε $C_0 = I_0 \cup I_1$. Στο δεύτερο βήμα κάνουμε το ίδιο για καθένα από τα I_0 και I_1, δηλαδή τα χωρίζουμε στα τρία και "πετάμε" το μεσαίο ανοικτό. Έτσι προκύπτουν τέσσερα διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^2}$. Δύο "αριστερά", τα $I_{00} = [0, \frac{1}{3^2}]$ και $I_{01} = [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}]$ και δύο "δεξιά", τα $I_{10} = [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}]$ και $I_{11} = [\frac{8}{3^2}, 1]$. Θέτουμε $C_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο στο $n-$ οστό βήμα έχουμε κατασκευάσει το σύνολο C_n, το οποίο είναι ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$, τα οποία προκύπτουν από την παράλειψη 2^{n-1} ξένων ανοικτών διαστημάτων ίσου μήκους. Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε από τα 2^n διαστήματα I_n του n-οστού βήματος θα παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης του a_n είναι ένα στοιχείο του συνόλου $\{0,1\}^n$. Το διάστημα αυτό προκύπτει από την υποδιαίρεση σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα του διαστήματος $I_{a_{n-1}}$, το δε a_n προκύπτει από το a_{n-1}, αν επισυνάψουμε στο τέλος της ακολουθίας a_{n-1} το 0 ή το 1. Έχουμε κατ' αυτόν τον τρόπο μία ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $I_{a_1} \supset I_{a_2} \supset \cdots \supset I_{a_n} \supset \cdots$, με $\operatorname{diam}(I_{a_n}) = \frac{1}{3^n} \to 0$, επομένως από το θεώρημα του κιβωτισμού έχουμε ότι $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{a_n} = \{x_{a_n}\}$. Τα σύνολα C_n είναι κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του πλήρους μετρικού χώρου $\mathbb{R}$, με $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \ldots$, άρα έχουμε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup\limits_{a_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \{x_{a_n}\}$. Το σύνολο

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

ονομάζεται **σύνολο Cantor**.

Τα άκρα των ανοικτών διαστημάτων που "πετάμε" για την κατασκευή του συνόλου Cantor ονομάζονται **τελικά σημεία** του $\mathbf{C}$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν $a_n, b_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, με $a_n \neq b_n$, τότε $\{x_{a_n}\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{a_n} \neq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{b_n} = \{x_{b_n}\}$, άρα το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Cantor είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.

2. Το $\mathbf{C}$ είναι κλειστό, ως τομή μιας ακολουθίας κλειστών συνόλων, των C_n. Επίσης είναι και φραγμένο, γιατί $\mathbf{C} \subseteq [0,1]$, άρα το $\mathbf{C}$ είναι συμπαγές.

3. Το σύνολο Cantor έχει πολλές και περίεργες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα την

$$\mathbf{C}+\mathbf{C}=\{x+y/x,y\in\mathbf{C}\}=[0,2],$$

ή την

$$\mathbf{C}-\mathbf{C}=\{x-y/x,y\in\mathbf{C}\}=[-1,1],$$

οι οποίες όμως, επειδή δεν έχουν σχέση με την τοπολογία, δεν αναφέρονται εδώ. Θα μπορούσε να τις αναζητήσει ο ενδιαφερόμενος σε βιβλία ανάλυσης.

4. Επίσης, από την ανάλυση είναι γνωστό ότι το μέτρο του συνόλου Cantor είναι 0 ($m(\mathbf{C})=0$). Από την ιδιότητα αυτή του συνόλου Cantor, συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{C}$ δεν περιέχει μη τετριμμένο ανοικτό διάστημα, γιατί, αν υπάρχουν a, $b\in\mathbb{R}$, με $a<b$, ώστε $(a,b)\subseteq\mathbf{C}$, τότε $b-a=m((a,b))<m(\mathbf{C})=0$, άτοπο.
   Άμεση συνέπεια του παραπάνω συμπεράσματος είναι το ότι το σύνολο $\mathbf{C}$ είναι ένα αραιό σύνολο, γιατί $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}$ και $\mathbf{C}^0=\varnothing$.

5. Μια χρήσιμη για την απόδειξη της επόμενης πρότασης ιδιότητα είναι η εξής:
   Κάθε σημείο x του συνόλου Cantor έχει μοναδική αναπαράσταση στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης την[9]

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n},\text{ όπου } a_n=0 \text{ ή } a_n=2.$$



Σχήμα 7.4

Πρόταση 7.5.1. *Το σύνολο* $\mathbf{C}$ *είναι ομοιόμορφο με τον χώρο* $X=\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, *ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία Tychonoff, όπου κάθε ένας από τους ίσους παράγοντες* $\{0,2\}$ *στο καρτεσιανό γινόμενο έχει τη διακριτή τοπολογία.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f:X\to\mathbf{C}$, με

$$f(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}.$$

[9]Για μία αναλυτική απόδειξη του ισχυρισμού παραπέμπουμε στο βιβλίο H. Sagan, Space-Filling curves, Springer 1994, σελ. 71-72.

Συνέπεια της μοναδικής τριαδικής αναπαράστασης των στοιχείων του συνόλου **C** είναι το ότι η f είναι 1-1 και επί. Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \infty$, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος, ώστε $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon$. Θεωρούμε τη περιοχή $U = \prod\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ του x, με $U_n = \{x_n\}$, αν $n = 1, \ldots, N$ και $U_n = \{0, 2\}$, αν $n = N+1, \ldots$ και έχουμε

$$\begin{aligned} y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| &= |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}| \\ &= |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n}| \\ &\leq \sum_{n-1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

άρα η f είναι συνεχής. Ο χώρος X είναι (Θεώρημα Tychonoff) συμπαγής και το **C**, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ χώρος Hausdorff, επομένως η f είναι ένας ομοιομορφισμός. □

7.6 Το θεώρημα επέκτασης του Tietze

Άλλη μια σημαντική πρόταση που αφορά τους T_4 χώρους, μετά το λήμμα Urysohn είναι το θεώρημα επέκτασης του Tietze. Για την απόδειξη του θεωρήματος επέκτασης του Tietze είναι απαραίτητη η γνώση θεωρημάτων σύγκλισης στους χώρους $\ell_\infty(X)$.

Ορισμός 7.6.1. Αν X ένα μη κενό σύνολο, τότε $\ell_\infty(X)$ είναι το σύνολο των φραγμένων απεικονίσεων από το X στο $\mathbb{R}$. Μια απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **φραγμένη**, αν και μόνον, αν υπάρχει θετικός αριθμός M_f, ώστε $|f(x)| \leq M_f$ για κάθε $x \in X$. Στο σύνολο $\ell_\infty(X)$ η απεικόνιση $\|.\| : \ell_\infty(X) \times \ell_\infty(X) \to \mathbb{R}$, με

$$\|(f, g)\| = \sup\{|f(x) - g(x)|/x \in X\},$$

ορίζει μετρική.

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση. Η νόρμα που εισάγει η πιο πάνω μετρική είναι η

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|/x \in X\}.$$

Παρατήρηση: Ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης στον $\ell_\infty(X)$ δίνεται ισοδύναμα ως εξής:

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0; n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Ορισμός 7.6.2. Έστω $f_n \in l_\infty(X)$. Θεωρούμε την ακολουθία $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$. Η s_n ονομάζεται σειρά που ορίζεται από την f_n. Αν υπάρχει $s \in l_\infty$, ώστε $s_n \xrightarrow{p} s$, τότε λέμε ότι η σειρά s_n συγκλίνει σημειακά στην απεικόνιση s και το συμβολίζουμε, με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n = s$. Αν υπάρχει $s \in l_\infty$, ώστε $s_n \xrightarrow{u} s$, τότε λέμε ότι η s_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην απεικόνιση s.

Οι αποδείξεις των τριών προτάσεων που ακολουθούν μπορούν να αναζητηθούν σε ένα βιβλίο ανάλυσης (βλέπε [5]).

Πρόταση 7.6.1. *Αν η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $f \in \ell_\infty$, *τότε* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$.

Πρόταση 7.6.2. *Αν ο* X *είναι τοπολογικός χώρος* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *ακολουθία συνεχών απεικονίσεων, ώστε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *να συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $f \in \ell_\infty$, *τότε η* f *είναι συνεχής.*

Πρόταση 7.6.3. ***(Κριτήριο του Weirstrass).*** *Έστω* X *τοπολογικός χώρος και* $f_n \in l_\infty(X)$. *Αν* $M_n > 0$ *ώστε* $\sup\{|f_n(x)|/x \in X\} \leq M_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία* $f \in l_\infty(X)$.

Λήμμα 7.6.4. ***(Θεώρημα επέκτασης Tietze)***[10] *Έστωσαν* X *ένας* T_4 *χώρος,* F *ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του* X *και* $f : F \to [-1,1]$ *συνεχής απεικόνιση. Τότε υπάρχει* $g : X \to [-1,1]$, *με* $g/F = f$, *δηλαδή συνεχής επέκταση της* f.

Απόδειξη: Έστω συνεχής απεικόνιση $\phi : Z \to [-r, r]$, όπου Z ένα κλειστό υποσύνολο ενός T_4 χώρου X και $r > 0$. Χωρίζουμε το διάστημα $[-r, r]$ σε τρία ίσα διαστήματα

$$I_1 = [-r, -\tfrac{r}{3}],\ I_2 = [-\tfrac{r}{3}, \tfrac{r}{3}] \text{ και } I_3 = [\tfrac{r}{3}, r]$$

μήκους $\frac{2r}{3}$. Επειδή η ϕ είναι συνεχής τα $A = \phi^{-1}(I_1)$, $B = \phi^{-1}(I_3)$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Από την εφαρμογή του λήμματος Urysohn συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $h : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ τέτοια, ώστε $h(x) = -\frac{r}{3}$ για κάθε $x \in A$ και $h(x) = \frac{r}{3}$ για κάθε $x \in B$. Επιπλέον, αν $x \in A$, τότε $\phi(x), h(x) \in I_1$, άρα $|\phi(x) - h(x)| \leq \frac{2r}{3}$. Και, αν $x \in B$, τότε $\phi(x), h(x) \in I_3$, άρα $|\phi(x) - h(x)| \leq \frac{2r}{3}$.
Αν $x \notin A \cup B$, τότε $\phi(x), h(x) \in I_2$, άρα $|\phi(x) - h(x)| \leq \frac{2r}{3}$. Δηλαδή $|\phi(x) - h(x)| \leq \frac{2r}{3}$ για κάθε $x \in X$. Επομένως έχουμε κατασκευάσει συνεχή απεικόνιση $h : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, ώστε

$$|\phi(x) - h(x)| \leq \frac{2r}{3}$$

[10] Heinrich Tietze (1880-1964): Αυστριακός μαθηματικός.

για κάθε $x \in Z$. Εφαρμόζουμε την πιο πάνω κατασκευή για $Z = F$, $\phi = f$ και $r = 1$, οπότε έχουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, ώστε

$$|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$$

για κάθε $x \in F$. Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την κατασκευή για $\phi = f - g_1$ και $r = \frac{2}{3}$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g_2 : X \to [-\frac{1}{3}\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\frac{2}{3}]$, ώστε

$$\big|f(x) - g_1(x) - g_2(x)\big| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

για κάθε $x \in F$. Υποθέτοντας ότι κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει συνεχείς απεικονίσεις $g_k : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1})]$, ώστε

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$, εφαρμόζουμε την πιο πάνω κατασκευή για $\phi = f - \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ και $r = (\frac{2}{3})^n$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g_{n+1} : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$, ώστε

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} g_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

για κάθε $x \in F$. Επομένως με την ολοκλήρωση της επαγωγικής διαδικασίας, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών απεικονίσεων $g_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1})]$, ώστε

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

για κάθε $x \in F$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\sup\{|g_n(x)|/x \in X\} \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 < \infty$. Συνεπώς, από το κριτήριο Weirstrass, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $g : X \to [-1, 1]$, με $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής, ως ομοιόμορφο όριο σειράς συνεχών απεικονίσεων. Επιπλέον, για κάθε $x \in F$ έχουμε

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

άρα $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in F$, επομένως $g = f/F$. □

Μια διαφορετική εκδοχή του θεωρήματος Tietze είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.6.5. *Αν X ένας T_4 τοπολογικός χώρος, F ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f : F \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή επέκταση $g : X \to \mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Επειδή $(-1,1) \cong \mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για μια συνεχή απεικόνιση $f : F \to (-1,1)$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $h : X \to [-1,1]$, η οποία είναι επέκταση της f. Θεωρούμε το $K = h^{-1}(\{-1,1\})$ που είναι κλειστό υποσύνολο του X, επειδή η h είναι συνεχής και το $\{-1,1\}$ κλειστό υποσύνολο του $[-1,1]$. Έχουμε $F \cap K = \varnothing$, επειδή $h(F) = f(F) \subseteq (-1,1)$.
Από το λήμμα Urysohn, έπεται ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\phi : X \to [0,1]$, με

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \in K \end{cases}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $g : X \to (-1,1)$, με $g(x) = h(x)\phi(x)$, η οποία είναι συνεχής, με

$$g(x) = h(x)\phi(x) = h(x) = f(x), x \in F.$$

Συνεπώς η g είναι επέκταση της f. Επιπλέον έχουμε $g(x) = 0$, αν $x \in K$ και $|g(x)| \leq |h(x)| < 1$, αν $x \notin K$, άρα $g(x) \in (-1,1)$. Επομένως η g είναι η ζητούμενη επέκταση της f. □

Παρατήρηση: Στο θεώρημα Tietze είναι προφανές πως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διάστημα [-1,1], με το ομοιόμορφό του [0,1]. Αν A, B είναι δύο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του χώρου X, ο οποίος είναι T_4, τότε η $f : A \cup B \to [0,1]$, με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases},$$

είναι συνεχής, επομένως, από το θεώρημα Tietze έχει συνεχή επέκταση στον X. Δηλαδή, το λήμμα Urysohn, προκύπτει ως συνέπεια του θεωρήματος Tietze. Επομένως οι δύο αυτές προτάσεις είναι ισοδύναμες, επειδή το θεώρημα Tietze αποδεικνύεται με τη χρήση του λήμματος Urysohn.

7.7 Ασκήσεις

1. Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, d), τότε ορίζουμε ως απόσταση των A και B τον μη αρνητικό αριθμό $d(A, B) = \inf\{d(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$. Να δειχθεί ότι

   (α΄) Αν το A είναι συμπαγές, τότε υπάρχει $a \in A$, ώστε $d(A, B) = d(a, B)$.

   (β΄) Αν το A είναι συμπαγές, το B κλειστό υποσύνολο του X και $A \cap B = \varnothing$, τότε $d(A, B) > 0$.

   (γ΄) Αν A, B είναι συμπαγή, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$, ώστε $d(A, B) = d(a, b)$.

   Απόδειξη: α) Έχουμε $d(A, B) = \inf\{d(x, B)/x \in A\}$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $d_B : X \to [0, \infty)$, με $d_B(x) = d(x, B)$. Άρα $d(A, B) = \inf d_B(A)$. Επειδή το A είναι συμπαγές υποσύνολο του X το $d_B(A)$ έχει ελάχιστο και μέγιστο. Επομένως $d(A, B) = \inf d_B(A) = \min d_B(A) = d(a, B)$ για κάποιο $a \in A$.
   Για το β') εφαρμόζουμε απαγωγή σε άτοπο. Αν υποθέσουμε ότι $d(A, B) = 0$, τότε για κάποιο $a \in A$ είναι $d(a, B) = d(A, B) = 0$, άρα (λήμμα 3.1.2) $a \in B$, άρα $A \cap B \neq \varnothing$, άτοπο.
   Το γ') είναι άμεση συνέπεια του α').

2. Να δειχθεί ότι ο χώρος Hilbert, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

   Απόδειξη: Έστω x_n μία βασική ακολουθία στον ℓ_2 και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$
\begin{aligned}
n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big[x_n(k) - x_m(k)\big]^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow |x_n(k) - x_m(k)| < \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

   Άρα η ακολουθία $x_n(k)$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$, επομένως συγκλίνει. Ονομάζουμε $x(k)$ το όριο της και , κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι $x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) \in \ell_2$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
n, m \geq n_0 &\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big[x_n(k) - x_m(k)\big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{r} \big[x_n(k) - x_m(k)\big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall r \geq 1 \\
&\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{r} \big[x_n(k) - x_m(k)\big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall r \geq 1 \\
&\Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{r} \big[x_n(k) - x(k)\big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall r \geq 1 \\
&\Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big[x_n(k) - x(k)\big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

συνεπώς

$$
\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big[x_n(k) - x(k)\big] \Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \tag{7.10}
$$

Έχουμε (ανισότητα Minkowski [11])

$$
\big(\sum_{k=1}^{r} |x(k)|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\sum_{k=1}^{r} (x_{n_0}(k) - x(k))^2 \big)^{\frac{1}{2}} + \big(\sum_{k=1}^{r} |x_{n_0}(k)|^2 \big)^{\frac{1}{2}}
$$

Επειδή $\big(\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_0}(k) - x(k))^2\big)^{\frac{1}{2}} < \infty$ και $\big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0}(k)|^2\big)^{\frac{1}{2}} < \infty$, έχουμε

$$
\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,
$$

άρα $x \in \ell_2$. Από την (7.10) συμπεραίνουμε ότι $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, συνεπώς $x_n \to x$.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εμφύτευση του $\mathbb{S}^1$ στο $\mathbb{R}$.

[11] Ανισότητα Minkowski: Αν $1 \leq p$ και $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$
\big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \big)^{\frac{1}{p}}
$$

Απόδειξη: Έστω $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ μια εμφύτευση. Ο $\mathbb{S}^1$ είναι συνεκτικός χώρος, άρα το $f(\mathbb{S}^1)$ θα είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή μη τετριμμένο διάστημα. Επειδή ο $\mathbb{S}^1$ είναι και συμπαγής χώρος, το πιο πάνω διάστημα θα είναι συμπαγές, επομένως $f(\mathbb{S}^1) = [a, b]$, με $a < b$. Έστω $x_0 \in (a, b)$, τότε

$$\mathbb{S}^1 \setminus \{f^{-1}(x_0)\} \cong (a, x_0) \cup (x_0, b),$$

άτοπο, γιατί ο πρώτος χώρος είναι συνεκτικός και ο δεύτερος μη συνεκτικός.

4. Να δειχθεί ότι ο χώρος $GL(\mathbb{R}, n)$ δεν είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n^2}$, ενώ ο $O(\mathbb{R}, n)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n^2}$.
Απόδειξη: Για το πρώτο, με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι συμπαγές. Τότε η εικόνα του, μέσω της συμπαγούς απεικόνισης $\det$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άτοπο, γιατί $\det\big(GL(\mathbb{R}, n)\big) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Για το δεύτερο, αν $A = (a_{ij}) \in O(\mathbb{R}, n)$, τότε

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} = \|I\| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

άρα το $O(\mathbb{R}, n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$. Αν ταυτίσουμε το σύνολο $M(\mathbb{R}, n)$ των $n \times n$ πινάκων με το $\mathbb{R}^{n^2}$ και θεωρήσουμε τη συνεχή απεικόνιση $f : M(\mathbb{R}, n) \to \mathbb{R}$, με $f(A) = det(A)$, τότε $O(\mathbb{R}, n) = f^{-1}(\{-1, 1\})$. Το $\{-1, 1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα το $O(\mathbb{R}, n)$ είναι και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$. Επομένως το $O(\mathbb{R}, n)$ είναι συμπαγές.

5. Να δειχθεί ότι σε έναν μετρικό χώρο κάθε κλειστό (αντ.ανοικτό) υποσύνολό του είναι G_δ (αντ. F_σ).

Απόδειξη: Έστω A κλειστό υποσύνολο του X. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $d : X \to [0, \infty)$, με $d(x) = d(x, A)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow d(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \le d(x) \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x \in d^{-1}\big([0, \frac{1}{n})\big) = U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \\ &\Leftrightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\,. \end{aligned}$$

Τα U_n είναι ανοικτά υποσύνολα του X, γιατί τα $[0, \frac{1}{n})$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $[0, \infty)$. Επομένως το A είναι ένα σύνολο G_δ. Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε το A^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα ένα G_δ σύνολο, επομένως το $A = \left(A^c\right)^c$ είναι ένα F_σ σύνολο.

6. Να αποδειχθεί ότι η χωροπληρωτική καμπύλη γ δεν είναι 1-1.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Αν η γ είναι 1-1, τότε επειδή ο χώρος $\mathbb{I}$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$ είναι Hausdorff, η γ θα είναι ομοιομορφισμός. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to \mathbb{D}^2$ (πρόταση 7.2.13), επομένως ο $f : h\circ\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{D}^2$ είναι ομοιομορφισμός. Αν $x \in (0,1)$, τότε $\mathbb{I}\setminus\{x\} \cong \mathbb{D}^2\setminus\{f(x)\}$, άτοπο, γιατί το πρώτο σύνολο δεν είναι συνεκτικό, ενώ το δεύτερο είναι. Το $\mathbb{D}^2$ είναι συνεκτικό, γιατί $\mathbb{D}^2 = \{rx/r \in \mathbb{I} \wedge x \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{I}\times\mathbb{S}^1$.

7. Με επιχείρημα κατηγορίας, να αποδείξετε ότι το διάστημα [0,1] είναι υπεραριθμήσιμο.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το [0,1] είναι αριθμήσιμο και $x_1,\dots,$ $x_n,\dots$ είναι μια αρίθμηση των στοιχείων του. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το $\{x_n\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του [0,1], με $\{x_n\}^0 = \varnothing$. Επιπλέον, $[0,1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$, άρα ο [0,1] είναι πρώτης κατηγορίας, άτοπο, επειδή ο [0,1] είναι πλήρης χώρος, ως συμπαγής.

8. Να αποδειχθεί ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι υπεραριθμήσιμος.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Επειδή το σημείο x_n δεν είναι μεμονωμένο είναι

$$A_n = \{x_n\} \Rightarrow (\overline{A_n})^0 = A_n^0 = \varnothing.$$

Επομένως

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ με } (\overline{A_n})^0 = \varnothing \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N},$$

άρα ο X είναι 1ης κατηγορίας Baire, άτοπο, γιατί είναι πλήρης.

9. Γνωρίζουμε ότι σε έναν μετρικό χώρο κάθε συμπαγές υποσύνολό του είναι κλειστό και φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;
Υπόδειξη: Όχι απαραίτητα. Αντιπαράδειγμα:
Ας πάρουμε το σύνολο $S = \{x \in \ell_2/\|x\| = 1\}$, το οποίο είναι, προφανώς φραγμένο. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : \ell_2 \to [0,\infty)$, με $f(x) = \|x\|$ και έχουμε ότι $S = f^{-1}(1)$, άρα το S είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_2.
Το $\mathcal{C} = \{S(x, \frac{\sqrt{2}}{4})/x \in S\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του S. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_1,\dots,x_n \in S$, ώστε $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\sqrt{2}}{4})$. Θεωρούμε τα σημεία $e_1,\dots,e_n,\dots$, ώστε κάθε e_i να έχει στην i-θέση 1 και σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις 0. Επειδή τα σημεία αυτά είναι άπειρα θα υπάρχουν δύο διαφορετικά μεταξύ τους, ας πούμε τα e_n, e_m, ώστε $e_n, e_m \in S(x_i, \frac{\sqrt{2}}{4})$ για κάποιο $i \in \{1,\dots,n\}$. Τότε

$$\sqrt{2} = d(e_n, e_m) \leq d(e_n, x_i) + d(x_i, e_m) \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

άτοπο. Επομένως το $\mathcal{C}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα το S δεν είναι συμπαγές.

10. Αποδείξτε ότι το $X = \{f \in C([0,1])/f(0) = f(1)\}$ είναι πλήρης υπόχωρος του $C([0,1])$.
Απόδειξη: Έστω f ένα οριακό σημείο του X, τότε υπάρχει ακολουθία $f_n \in X$, με $f_n \to f$. Επομένως $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = f(1)$, άρα $f \in X$, άρα το X είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $C([0,1])$, άρα είναι πλήρης χώρος.

11. Να δειχθεί ότι χώρος C_a των συγκλινουσών στο $a \in \mathbb{R}$ ακολουθιών με όρους πραγματικούς είναι πλήρης.
Απόδειξη: Ο C_a είναι υπόχωρος του l_∞, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι είναι πλήρης. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο C_a είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞. Έστω $x = x_n \in A = l_\infty \setminus C_a$, άρα η ακολουθία x_n δεν συγκλίνει στο a. Επομένως, αν $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m > n$, ώστε

$$|x_m - a| \geq \varepsilon \tag{7.11}$$

Έστω $y = y_n$, με $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ είναι

$$\begin{aligned} |x_m - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} &\Rightarrow |x_m - a - (y_m - a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow ||x_m - a| - |y_m - a|| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < |y_m - a| - |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

και, λόγω της (7.11) θα έχουμε $|y_m - a| > \frac{\varepsilon}{2}$, άρα η ακολουθία $y = y_n$ δεν συγκλίνει στο a, συνεπώς $y \in A$, δηλαδή $S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq A$. Επομένως το A είναι ανοικτό υποσύνολο του ℓ_∞, άρα το C_a είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

12. Αν η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ δεν είναι επί, να δειχθεί ότι ή $f(\mathbb{S}^n) \cong \{0\}$ ή $f(\mathbb{S}^n) \cong [0,1]$.
Απόδειξη: Υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^1 \setminus f(\mathbb{S}^n)$. Θεωρούμε την

$$g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}, \text{ με } g(x) = f(x).$$

Η g είναι συνεχής, άρα, επειδή ο $\mathbb{S}^n$ είναι συμπαγής και συνεκτικός το $g(\mathbb{S}^n) = f(\mathbb{S}^n)$ είναι συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}$. Επιπλέον, $\mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}$. Αν $h : \mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ ένας ομοιομορφισμός, τότε το $(h \circ g)(\mathbb{S}^n)$ είναι συνεκτικό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως ή $h(g(\mathbb{S}^n)) \cong \{0\}$ ή $h(g(\mathbb{S}^n)) \cong [0,1]$. Άρα ή

$$f(\mathbb{S}^n) = g(\mathbb{S}^n) = h^{-1}(0) \cong \{0\}$$

ή

$$f(\mathbb{S}^n) = g(\mathbb{S}^n) = h^{-1}([0,1]) \cong [0,1]\,.$$

13. Να αποδειχθεί ότι ο $\mathbb{S}^1$ δεν είναι ομοιόμορφος με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.
Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει γνήσιο υποσύνολο A του $\mathbb{S}^1$, ώστε $\mathbb{A} \cong \mathbb{S}^1$ και επιλέγουμε $x \in \mathbb{S}^1 \setminus A$. Το σύνολο $X = \mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{R}$ (στερεογραφική προβολή) και επιπλέον $A \subseteq X$. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ ένας ομοιομορφισμός. Το $f(A)$, επειδή είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή ένα μη τετριμμένο διάστημα της μορφής $[a, b]$. Επομένως $[a, b] \cong \mathbb{S}^1$. Αν $g : [a, b] \to \mathbb{S}^1$ ένας ομοιομορφισμός και $c \in (a, b)$ τότε το $[a, b] \setminus \{c\} = [a, c) \cup (c, b]$ είναι μη συνεκτικό, άρα μη συνεκτικό θα είναι και το $\mathbb{S}^1 \setminus \{f(c)\}$, άτοπο.

14. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται **συνοριακό σύνολο** στον X, αν και μόνον, αν $\overline{X \setminus A} = X$.
Παράδειγμα το $\mathbb{N}$ είναι συνοριακό σύνολο στο $\mathbb{R}$, γιατί $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} = \mathbb{R}$. Επίσης το $\mathbb{Q}$ είναι συνοριακό σύνολο στο $\mathbb{R}$, γιατί $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Αν X ένας πλήρης μετρικός χώρος και A_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία αραιών υποσυνόλων του X, να αποδειχθεί ότι το $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνοριακό σύνολο στον X.
Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} X \setminus B &= X \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus A_n\big) \\ &\supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus \overline{A_n}\big) . \end{aligned}$$

Τα $X \setminus \overline{A_n}$ είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, γιατί

$$\begin{aligned} \overline{X \setminus \overline{A_n}} &= X \setminus \big(\overline{A_n}\big)^0 \\ &= X , \end{aligned}$$

άρα το $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus \overline{A_n}\big)$ (θεώρημα πυκνότητας Baire) είναι πυκνό, άρα

$$\begin{aligned} X &= \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus \overline{A_n}\big)} \\ &\subseteq \overline{X \setminus B} \subseteq X \\ &\Rightarrow \overline{X \setminus B} = X, \end{aligned}$$

άρα το B είναι συνοριακό σύνολο στον X.

15. Αν $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $x \neq y$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $f(y) = x$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε την εξής βοηθητική πρόταση:
Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x-y, x\rangle + \langle x-y, -y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$, με $\|A\| = 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $r_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με $r_A(x) = x - 2\langle x, A\rangle A$. Για την απεικόνιση αυτή έχουμε:

i $r_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

ii Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}
\|r_A(x) - r_A(y)\|^2 &= \|x - y - 2\big(\langle x, A\rangle - \langle y, A\rangle\big)A\|^2 \\
&= \|x - y - 2\big(\langle x-y, A\rangle\big)A\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 + 4\langle x-y, A\rangle^2\|A\|^2 - 4\langle x-y, A\rangle\langle x-y, A\rangle \\
&= \|x-y\|^2 + 4\langle x-y, A\rangle^2 - 4\langle x-y, A\rangle^2 \\
&= \|x-y\|^2,
\end{aligned}$$

άρα $\|r_A(x) - r_A(y)\| = \|x-y\|$, άρα

$$\begin{aligned}
\|r_A(x)\| &= \|r_A(x) - \mathbf{0}\| \\
&= \|r_A(x) - r_A(\mathbf{0})\| \\
&= \|x - \mathbf{0}\| \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

Επομένως η απεικόνιση $r_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $x \mapsto r_A(x)$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον, επειδή $\|r_A(x) - r_A(y)\| = \|x-y\|$ η $r_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ είναι συνεχής και 1-1.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
r_A\big(r_A(x)\big) &= r_A\big(x - 2\langle x, A\rangle A\big) \\
&= x - 2\langle x, A\rangle A - 2\langle x - 2\langle x, A\rangle A, A\rangle A \\
&= x - 2\langle x, A\rangle A - 2\langle x, A\rangle A + 2\langle 2\langle x, A\rangle A, A\rangle A \\
&= x - 4\langle x, A\rangle A + 4\langle x, A\rangle A \\
&= x,
\end{aligned}$$

άρα η r_A είναι επί. Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συμπαγής και Hausdorff η r_A είναι ομοιομορφισμός.
Αν θέσουμε $A = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, τότε

$$\begin{aligned} r_A(y) &= y - 2\langle y, \frac{x-y}{\|x-y\|}\rangle \frac{x-y}{\|x-y\|} \\ &= y - \frac{2}{\|x-y\|^2}\langle y, x-y\rangle (x-y) \\ &= y - \frac{2}{\|x-y\|^2}\big(\langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle\big)(x-y) \\ &= y - \frac{2}{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle}\big(\langle x, y\rangle - 1\big)(x-y) \\ &= y - \frac{2}{2(1-\langle x, y\rangle)}\big(\langle x, y\rangle - 1\big)(x-y) \\ &= y + (x-y) \\ &= x, \end{aligned}$$

άρα η απεικόνιση $r_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός.

16. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος Niemytski X δεν είναι χώρος T_4.
Απόδειξη: [12] Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι χώρος T_4 και μετράμε τις συνεχείς πραγματικές απεικονίσεις, οι οποίες ορίζονται στον X, υποθέτοντας ότι ο πληθάριθμός του είναι κ. Το σύνολο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X, ως προς την $\mathcal{T}$-τοπολογία, άρα και ως προς την $\mathcal{T}^*$-τοπολογία, η οποία είναι πλουσιότερη. Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι Hausdorff, το πλήθος των πραγματικών συνεχών απεικονίσεων που ορίζονται στον X είναι το ίσο με το πλήθος των πραγματικών συνεχών απεικονίσεων που ορίζονται στο πυκνό υποσύνολό του $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, επειδή δύο συνεχείς πραγματικές απεικονίσεις, οι οποίες ταυτίζονται στο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ταυτίζονται και στον X (πρόταση 3.3.5).
Επομένως το κ είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος όλων των απεικονίσεων από το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, το οποίο είναι ίσο με $c^{\aleph_0} = \big(2^{\aleph_0}\big)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$, άρα

$$\kappa \leq c \tag{7.12}$$

Αφετέρου το L είναι κλειστό υποσύνολο του X, επομένως κάθε συνεχής απεικόνιση από το L στο $\mathbb{R}$ επεκτείνεται συνεχώς σε μία απεικόνιση από το X στο $\mathbb{R}$. (Θεώρημα Tietze). Επομένως το κ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πλήθους των συνεχών απεικονίσεων από το L στο $\mathbb{R}$. Όμως η τοπολογία του L είναι η διακριτή, άρα κάθε απεικόνιση από το L στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής. Επομένως το πλήθος των συνεχών απεικονίσεων από το L στο $\mathbb{R}$ είναι όσο και το πλήθος των απεικονίσεων από το L στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $c^c = \big(2^{\aleph_0}\big)^c = 2^c$, επομένως από την (7.12) συμπεραίνουμε ότι

$$c \geq \kappa \geq 2^c,$$

άτοπο.

[12] Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς της άσκησης 3.6.5.

8 ΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Με σχετική ευκολία μπορούμε να αποφανθούμε για το ότι γνωστοί τοπολογικοί χώροι δεν είναι μετρικοποιήσιμοι, γιατί κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες των μετρικών χώρων, όπως η 1η αριθμησιμότητα και όλα τα αξιώματα διαχωρισμού, τα οποία είναι τοπολογικά αναλλοίωτα δεν ικανοποιούνται στους χώρους αυτούς. Για παράδειγμα

1. Είδαμε ότι ο $\mathbb{R}$ με τη συναριθμήσιμη τοπολογία δεν είναι 1ος αριθμήσιμος (παραδείγματα 1.6.1-2), άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

2. Αν X είναι ένα απειροσύνολο, τότε ο X, με τη συμπεπερασμένη τοπολογία δεν είναι Hausdorff (παραδείγματα 3.3.1-2), άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

3. Ο χώρος $\mathbb{R}_l$ δεν είναι 2ος αριθμήσιμος. Όμως ο $\mathbb{R}_l$ είναι διαχωρίσιμος, γιατί η τοπολογία του περιέχει την Ευκλείδεια τοπολογία και ως προς την Ευκλείδεια τοπολογία το αριθμήσιμο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό. Επομένως από την πρόταση 1.7.2, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathbb{R}_l$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος, γιατί οι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι είναι 2οι αριθμήσιμοι.

Ο Urysonh είναι ο πρώτος (1924), ο οποίος απάντησε, έστω και μερικώς στο ερώτημα της μετρικοποιησιμότητας, αποδεικνύοντας το θεώρημα που φέρει το όνομα του και που θα αποδείξουμε στην παρούσα παράγραφο. Εικοσιέξη χρόνια αργότερα οι Nagata[1] και Smirnov [2], ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον έλυσαν πλήρως το πρόβλημα της μετρικοποιησιμότητας, με τρόπο που θα δούμε αμέσως μετά το θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn.

Πρόταση 8.0.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος.

β΄) Υπάρχει μετρικός χώρος Y, ώστε $X \cong Y$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Επειδή ο X είναι μετρικοποιήσιμος υπάρχει μετρική d στον X, ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Επομένως η προς απόδειξη συνεπαγωγή είναι προφανής, επειδή η ταυτοτική απεικόνιση i_X είναι ομοιομορφισμός.

[1] Juniti Nagata (1925-2007): Ιάπωνας μαθηματικός
[2] Jurii Mikhailovich Smirnov (1921-2007): Ρώσος Μαθηματικός

β') ⇒ α'): Έστω (Y, d') ένας μετρικός χώρος και $f : Y \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Θεωρούμε την απεικόνιση $d : X \times X \to [0, \infty)$, με $d(x, y) = d'(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$, η οποία, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μια μετρική στον X. Έστω $U \in \mathcal{T}$ και $x \in U$. Τότε $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{d'}$ και $f^{-1}(x) \in f^{-1}(U)$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε

$$S\big(f^{-1}(x), \varepsilon\big) \subseteq f^{-1}(U) \tag{8.1}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} y \in S(x, \varepsilon) &\Leftrightarrow d(x, y) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow d'(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y) \in S(f^{-1}(x), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow y \in f\big(S(f^{-1}(x), \varepsilon)\big), \end{aligned}$$

επομένως $f\big(S(f^{-1}(x), \varepsilon)\big) = S(x, \varepsilon)$. Άρα από την (8.1) συμπεραίνουμε ότι $S(x, \varepsilon) \subseteq U$, άρα $U \in \mathcal{T}_d$, συνεπώς

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d \tag{8.2}$$

Έστω $U \in \mathcal{T}_d$ και $x \in U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U$, άρα $f^{-1}\big(S(x, \varepsilon)\big) \subseteq f^{-1}(U)$. Όπως πριν αποδεικνύεται ότι $f^{-1}\big(S(x, \varepsilon)\big) = S(f^{-1}(x), \varepsilon)$. Έχουμε $f^{-1}(x) \in f^{-1}(U)$ και $S\big(f^{-1}(x), \varepsilon\big) \subseteq f^{-1}(U)$, επομένως $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{d'}$, άρα $U = f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$, συνεπώς

$$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T} \tag{8.3}$$

Από τις (8.2) και (8.3) συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, επομένως ο χώρος X είναι μετρικοποιήσιμος.

Επειδή τα μη κενά υποσύνολα μετρικών χώρων είναι και αυτά μετρικοί χώροι, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε ισοδύναμα την προηγούμενη πρόταση με ένα τρόπο που είναι πιο φιλικός στις εφαρμογές:

Πρόταση 8.0.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X είναι μετρικοποιήσιμος.

β΄) Υπάρχει μετρικός χώρος Y και εμφύτευση $f : X \to Y$.

Λήμμα 8.0.3. *Αν X ένας 2ος αριθμήσιμος, φυσιολογικός χώρος και $\mathcal{B} = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ μία αριθμήσιμη βάση του X, τότε για κάθε $U_i \in \mathcal{B}$ και για κάθε $p \in U_i$ υπάρχει*

$$U_j \in \mathcal{B},\ \textit{ώστε}\ p \in \overline{U_j} \subseteq U_i.$$

Απόδειξη: Έστω $p \in U_i$, τότε το $\{p\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα, επειδή ο χώρος είναι φυσιολογικός υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του X, ώστε $p \in U \subseteq \overline{U} \subseteq U_i$ (πρόταση 3.4.6). Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $p \in U$ υπάρχει $U_j \in \mathcal{B}$, ώστε $p \in U_j \subseteq U$, άρα $\overline{U_j} \subseteq \overline{U}$, συνεπώς

$$p \in \overline{U_j} \subseteq \overline{U} \subseteq U_i.$$

□

Πρόταση 8.0.4. ***(Θεώρημα μετρικοποίησης του* Urysohn*)*** *Αν ο τοπολογικός χώρος είναι φυσιολογικός και 2ος αριθμήσιμος, τότε είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B} = \{U_1, \dots, U_n, \dots\}$ μια βάση του X. Από το προηγούμενο λήμμα για κάθε $U_i \in \mathcal{B}$ για κάθε $p \in U_i$ υπάρχει $U_j \in \mathcal{B}$, ώστε $p \in U_j \subseteq \overline{U_j} \subseteq U_i$. Θεωρούμε το σύνολο K των ζευγών (U_i, U_j), με $U_i, U_j \in \mathcal{B}$, για τα οποία $\overline{U_j} \subseteq U_i$. Είναι $K \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, άρα το K είναι αριθμήσιμο. Έστω P_n, $n \in \mathbb{N}$ μια αρίθμηση των στοιχείων του K. Για το ζεύγος $P_n = (U_i, U_j)$, ορίζουμε την απεικόνιση f_n του Urysohn για τα κλειστά και ξένα υποσύνολα $\overline{U_j}$, U_i^c του X. Δηλαδή τη συνεχή $f_n : X \to [0,1]$, με

$$f_n(\overline{U_j}) = \{0\} \text{ και } f_n(U_i^c) = \{1\}.$$

Είναι $0 \leq f_n(x) \leq 1$, άρα $0 \leq \frac{f_n(x)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, συνεπώς η ακολουθία

$$\left(\tfrac{f_1(x)}{2}, \tfrac{f_2(x)}{2^2}, \dots, \tfrac{f_n(x)}{2^n}, \dots\right)$$

είναι ένα στοιχείο του κύβου του Hilbert (**H**), ο οποίος είναι ένας μετρικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : X \to \mathbf{H}$, με

$$f(x) = \left(\tfrac{f_1(x)}{2}, \tfrac{f_2(x)}{2^2}, \dots, \tfrac{f_n(x)}{2^n}, \dots\right)$$

και έχουμε

- Αν $x, y \in X$, με $x \neq y$, τότε, επειδή ο χώρος είναι T_1 υπάρχει $U_i \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in U_i$ και $y \in U_i^c$, συνεπώς υπάρχει ζεύγος $P_n = (U_j, U_i)$, με $x \in \overline{U_j} \subseteq U_i$ και $y \in U_i^c$ (λήμμα 8.0.3), άρα έχουμε $f_n(x) = 0 \wedge f_n(y) = 1 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, γιατί οι ακολουθίες $f(x)$ και $f(y)$ διαφέρουν τουλάχιστον στον n-οστό όρο τους. Επομένως η f είναι 1-1.

- Έστωσαν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, ώστε $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$.
  Οι απεικονίσεις $\frac{f_i}{2^i}$ είναι συνεχείς για κάθε $i = 1, ..., N$, συνεπώς υπάρχουν περιοχές $U_1, \dots, U_N$ του x, ώστε, αν $x \in U_i$, τότε $\frac{|f_i(x) - f_i(x_0)|}{2^i} < \frac{\varepsilon^2}{2N}$ για κάθε $i = 1, \dots, N$. Άρα, αν $x \in U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, τότε

$$\begin{aligned}(d(f(x), f(x_0)))^2 &= \sum_{n=1}^{N} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} \\ &< N\frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

  επομένως η f είναι συνεχής.

- Θεωρούμε ακολουθία $x_n, n \in \mathbb{N}$ στον X, ώστε $x_n \nrightarrow x$. Άρα υπάρχει περιοχή U_i του x, η οποία περιέχει μόνον πεπερασμένο πλήθος όρων της x_n. Άρα υπάρχει υπακολουθία y_n, $n \in \mathbb{N}$ της x_n, ώστε $y_n \in U_i^c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, ώστε για το ζεύγος $P_m = (U_i, U_j)$ να ισχύει $x \in \overline{U_j}$ και $y_n \in U_i^c$, άρα $f_m(x) = 0$ και $f_m(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\frac{|f_m(y_n)-f_m(x)|}{2^m} = \frac{1}{2^m}$, άρα $d(f(y_n), f(x)) \geq \frac{|f_m(y_n)-f_m(x)|}{2^m} = \frac{1}{2^m}$, άρα $f(y_n) \nrightarrow f(x) \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow f(x)$.
  Δηλαδή αληθεύει η συνεπαγωγή
  $$x_n \nrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow f(x),$$
  επομένως και η αντιθετοαντίστροφη της
  $$f(x_n) \to f(x) \Rightarrow x_n \to x.$$
  Θεωρούμε την απεικόνιση $f^{-1} : f(X) \to X$ και $z = f(x) \in f(X)$. Αν $z_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία στον $f(X)$, με $z_n \to z$, τότε $x_n \to x$, άρα
  $$f^{-1}(z_n) \to f^{-1}(z).$$
  Επομένως από την πρόταση 2.1.10, έχουμε ότι η $f^{-1} : f(X) \to X$ είναι συνεχής.

Άρα η f είναι εμφύτευση, επομένως ο X είναι μετρικοποιήσιμος. □

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn δίνει μόνον μία ικανή συνθήκη μετρικοποιησιμότητας των τοπολογικών χώρων ή αλλιώς δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη μετρικοποιησιμότητας για τους 2ους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους. Επειδή, όμως όλοι οι μετρικοί χώροι δεν είναι 2οι αριθμήσιμοι, το πρόβλημα της μετρικοποιησιμότητας παρέμεινε ανοικτό μέχρις ότου οι Nagata και Smirnov έδωσαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον πλήρη λύση, με την αντικατάσταση της συνθήκης της 2ης αριθμησιμότητας από μία άλλη ασθενέστερη. Η συνθήκη αυτή περιέχει την έννοια της τοπικά πεπερασμένης οικογένειας υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 8.0.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{A}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ ονομάζεται **τοπικά πεπερασμένη**, αν και μόνον, αν κάθε $x \in X$ έχει περιοχή U, η οποία τέμνει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, δηλαδή τέμνει στοιχεία πλήθους n με $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Παρατήρηση: Αν η $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη, τότε προφανώς, είναι και τοπικά πεπερασμένη.

Παραδείγματα 8.0.1.

1. Στον $\mathbb{R}$ η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(n, n+2), n \in \mathbb{N}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Πράγματι, αν $x = n \in \mathbb{Z}$, τότε η περιοχή $(n-1, n+1)$ του x τέμνει μόνον τρία στοιχεία της $\mathcal{A}$, το εαυτό της, το $(n-2, n)$ και το $(n, n+2)$. Αν $x \notin \mathbb{Z}$, τότε υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{Z}$, ώστε $n < x < n+1$, άρα η $(n, n+1)$ είναι μια περιοχή του x, η οποία τέμνει μόνον δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$, το $(n, n+2)$ και το $(n-1, n+1)$.

2. Το διάστημα (0,1) με την Ευκλείδεια τοπολογία είναι ένας χώρος, στον οποίον η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Πράγματι, αν $\frac{1}{x} = n \in \{2, 3, \ldots\}$, τότε η περιοχή $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1})$ του x τέμνει μόνο τα στοιχεία $(0, \frac{1}{m})$, με $m = 2, \ldots, n$ της $\mathcal{A}$, συνεπώς πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$. Αν $\frac{1}{x} \notin \mathbb{N}$, τότε υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, η δε περιοχή $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ του x τέμνει μόνο τα στοιχεία $(0, \frac{1}{m})$, με $m = 2, \ldots, n$ της $\mathcal{A}$, συνεπώς πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, άρα η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.

3. Στο $\mathbb{R}$ η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι τοπικά πεπερασμένη. Πράγματι, κάθε περιοχή του 0 τέμνει άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Λήμμα 8.0.5. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X, τότε*

α΄) Κάθε μη κενό υποσύνολο της $\mathcal{A}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του X.

β΄) Η οικογένεια $\mathcal{D} = \{\overline{A}/A \in \mathcal{A}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.

γ΄) $\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$.

Απόδειξη: α΄) Άμεση συνέπεια του ορισμού.

β΄) Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η $\mathcal{D}$ δεν είναι τοπικά πεπερασμένη. Άρα υπάρχει $x \in X$, ώστε κάθε περιοχή U του x να τέμνει άπειρα $\overline{A}$, τα οποία ανήκουν στο $\mathcal{D}$. Αν $\overline{A} \cap U \neq \varnothing$, τότε, υπάρχει $y \in \overline{A} \cap U$, άρα (πρόταση 1.3.6) $U \cap A \neq \varnothing$. Συνεπώς κάθε περιοχή του x τέμνει άπειρα A που ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{A}$, άτοπο.

γ΄) Έστω $Y = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$, τότε

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\Rightarrow A \subseteq Y \\ &\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{Y}, \end{aligned}$$

άρα

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{Y} \tag{8.4}$$

Έστω $y \in \overline{Y}$, τότε για κάθε περιοχή U του y είναι $U \cap Y \neq \varnothing$, άρα $U \cap \big(\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A\big) \neq \varnothing$, άρα η U τέμνει κάποια από τα $A \in \mathcal{A}$. Αν κάθε περιοχή U του y τέμνει άπειρα $A \in \mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{A}$ δεν είναι τοπικά πεπερασμένη, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως υπάρχει περιοχή U του y, η οποία τέμνει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, ας πούμε τα $A_1, \ldots, A_n$. Αν $y \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, τότε το σύνολο $V = U \setminus \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}\big)$ είναι μια

περιοχή του y, η οποία δεν τέμνει κάποιο στοιχείο της $\mathcal{A}$, συνεπώς $V \cap Y = \varnothing$, άρα $y \notin \overline{Y}$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει. Επομένως $y \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, άρα $y \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$, δηλαδή

$$\overline{Y} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \tag{8.5}$$

Από τις (8.4) και (8.5) προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός 8.0.2. Μια οικογένεια υποσυνόλων του χώρου X ονομάζεται **σ-τοπικά πεπερασμένη**, αν και μόνον, αν γράφεται ως ένωση μιας ακολουθίας $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$ οικογενειών , ώστε κάθε ένα εκ των $\mathcal{A}_n$ να είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του X. Να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $\mathcal{A}_n$ μπορεί να είναι τελικά σταθερή, δηλαδή $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_m$ για κάθε $n \geq m$.

Παράδειγμα 8.0.1. Στον $\mathbb{R}$ η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(n, n+2),\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι σ-τοπικά πεπερασμένη, γιατί οι $\mathcal{A}_1 = \{(n, n+2),\ n \in \mathbb{N} \wedge n = 3k\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(n, n+2), n \in \mathbb{N} \wedge n = 3k+1\}$ και $\mathcal{A}_3 = \{(n, n+2),\ n \in \mathbb{N} \wedge n = 3k+2\}$ είναι τοπικά πεπερασμένες και $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

Ορισμός 8.0.3. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του χώρου X ονομάζεται **εκλέπτυνση** της οικογένειας $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X, αν και μόνον, αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$, ώστε $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 8.0.2. Στον $\mathbb{R}$ η οικογένεια $\{(n, n+\frac{1}{2}),\ n \in \mathbb{Z}\}$ είναι εκλέπτυνση της οικογένειας $\{(n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}\}$, γιατί $(n, n+\frac{1}{2}) \subseteq (n, n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 8.0.6. *Οι έννοιες πεπερασμένη και σ-πεπερασμένη είναι τοπολογικά αναλλοίωτα.*

Λήμμα 8.0.7. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_3 και έχει μία σ-τοπικά πεπερασμένη βάση, τότε κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ.*

Απόδειξη: Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $\mathcal{B}$ μία βάση του X, η οποία είναι σ-τοπικά πεπερασμένη. Έχουμε $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, όπου η οικογένεια $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{B}_n / \overline{B} \subseteq G\}$. Είναι $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{B}_n$, επομένως η $\mathcal{C}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Ακολούθως ορίζουμε $U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B$. Το U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X, με $\overline{U_n} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \overline{B}$ (λήμμα 8.0.5). Επιπλέον $\overline{B} \subseteq G$ για κάθε $B \in \mathcal{C}_n$, άρα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq G \tag{8.6}$$

Έστω $x \in G$. Το G^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, με $x \notin G^c$. Επομένως, επειδή ο χώρος είναι T_3 υπάρχει ανοικτό υποσύνολο (πρόταση 3.4.1) U του X, ώστε

$$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq G = \left(G^c\right)^c.$$

Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathcal{B}_n$, ώστε $x \in B \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$, άρα $\overline{B} \subseteq \overline{U} \subseteq G$, άρα $B \in \mathcal{C}_n$, άρα

$$
\begin{aligned}
x \in B &\subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B \\
&= U_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \\
&\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n,
\end{aligned}
$$

συνεπώς

$$
G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \tag{8.7}
$$

Από τις (8.6) και (8.7) έπεται το ζητούμενο. □

Λήμμα 8.0.8. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_3 και έχει μία σ-τοπικά πεπερασμένη βάση, τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ.*

Απόδειξη: Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε το F^c είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, άρα, από την προηγούμενη πρόταση, το F^c είναι ένα σύνολο F_σ. Επομένως το $F = \left(F^c\right)^c$ είναι σύνολο G_δ (πρόταση 7.3.3). □

Λήμμα 8.0.9. *Κάθε T_3 τοπολογικός χώρος, ο οποίος έχει μια σ-πεπερασμένη βάση είναι T_4.*

Απόδειξη: Έστω X ένας T_3 τοπολογικός χώρος, με σ-πεπερασμένη βάση $\mathcal{B}$ και A, B δύο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Το B^c είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα, από το λήμμα 8.0.7 υπάρχει ακολουθία U_n ανοικτών υποσυνόλων του X, ώστε $A \subseteq B^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$. Έχουμε $\overline{U}_n \cap B = \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γιατί, αν $y \in \overline{U_n} \cap B$, τότε $U_n \cap B \neq \varnothing$, το οποίο είναι αδύνατο, επειδή $U_n \subseteq B^c$. Ομοίως καταλήγουμε στο ότι υπάρχει ακολουθία V_n ανοικτών υποσυνόλων του X, ώστε $B \subseteq A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$ και $\overline{V}_n \cap A = \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ακολούθως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα $U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i$ και $V'_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i$, τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Αν θέσουμε $U' = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n$ και $V' = \bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n$, τότε τα U', V' είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Επιπλέον έχουμε

$$
\begin{aligned}
x \in A &\Rightarrow x \in B^c \\
&\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x \in U_n \setminus \overline{V}_i \quad \forall i = 1, ..., n \\
&\Rightarrow x \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i \\
&\Rightarrow x \in U' \\
&\Rightarrow A \subseteq U'.
\end{aligned}
$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $B \subseteq V'$. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει $x \in U' \cap V'$. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in U'_m$ και $x \in V'_n$.

- Αν $m \leq n$, τότε $x \in U_m$ και $x \notin \overline{U}_1, ..., \overline{U}_m, ..., \overline{U}_n$, άτοπο.

- Αν $n < m$, τότε $x \in V_n$ και $x \notin \overline{V}_1, ..., \overline{V}_n, ..., \overline{V}_m$, άτοπο. Άρα $U' \cap V' = \varnothing$.

Συνεπώς ο X είναι T_4. □

Λήμμα 8.0.10. *Αν X είναι ένας T_4 τοπολογικός χώρος και A ένα μη κενό υποσύνολό του, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, με $A = f^{-1}(\{0\})$.

β΄) Το A είναι κλειστό και G_δ υποσύνολο του X.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού υποσυνόλου $\{0\}$ του χώρου $[0,1]$, μέσω της συνεχούς f. Επίσης τα $U_n = f^{-1}\big([0, \frac{1}{n})\big)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X, γιατί τα $[0, \frac{1}{n})$ είναι ανοικτά υποσύνολα του χώρου $[0,1]$. Επιπλέον $A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})\big) = \bigcap\limits_{n=1}^{n} U_n$, άρα το A είναι G_δ.

β') ⇒ α'): Έστω ότι το A είναι ένα κλειστό και G_δ υποσύνολο του X. Τότε $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, όπου τα U_n είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$. Τα A, U_n^c είναι μη κενά κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, άρα, από το λήμμα Urysohn υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f_n : X \to [0,1]$, ώστε

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in A \text{ και } f(x) = 1 \quad \forall x \in U_n^c.$$

Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ η

$$f : X \to [0,1], \text{ με } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$

είναι καλώς ορισμένη.

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε, επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x \in X \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επιπλέον οι $\frac{f_i}{2^i}$ είναι συνεχείς για κάθε $n = 1, ..., N$, άρα για κάθε $n = 1, ..., N$ υπάρχει περιοχή U_n του x_0, ώστε

$$x \in U_n \Rightarrow \tfrac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} < \tfrac{\varepsilon}{2N}.$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n=1}^{N} U_i \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{2^n} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{2^n} \\
&< N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

άρα η f είναι συνεχής. Τέλος $f(x) = 0 \quad \forall x \in A$ και , αν $x \notin A$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in U_k^c$, άρα $f(x) = 1 > 0$. Επομένως $f^{-1}(\{0\}) = A$. □

Λήμμα 8.0.11. *Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε η απεικόνιση*

$$d : [0,1]^X \times [0,1]^X \to \mathbb{R}, \text{ με } d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|/x \in X\}$$

είναι μια μετρική στο σύνολο $[0,1]^X$.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $d(f,g) \geq 0$.

α΄.
$$
\begin{aligned}
d(f,g) = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x) - g(x)|/x \in X\} = 0 \\
&\Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow f = g.
\end{aligned}
$$

β΄.
$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)|/x \in X\} \\
&= \sup\{|g(x) - f(x)|/x \in X\} \\
&= d(g,f).
\end{aligned}
$$

γ΄.
$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)|/x \in X\} \\
&\leq \sup\{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|/x \in X\} \\
&\leq \sup\{|f(x) - h(x)|/x \in X\} + \sup\{|h(x) - g(x)|/x \in X\} \\
&= d(f,h) + d(h,g).
\end{aligned}
$$

□

Πρόταση 8.0.12. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι κανονικός και έχει σ-πεπερασμένη βάση, τότε είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}$ μια σ-πεπερασμένη βάση του X, με $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, όπου $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένες οικογένειες ανοικτών υποσυνόλων του X. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\mathcal{B}_n$ είναι ξένα μεταξύ τους, γιατί σε αντίθετη περίπτωση παίρνουμε αρχικά την ακολουθία $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}'_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}'_n, ...$ και έπειτα την ακολουθία $\mathcal{B}''_1 = \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}''_2 = \mathcal{B}'_2 \setminus \mathcal{B}'_1, ..., \mathcal{B}''_n = \mathcal{B}'_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}'_i, ...$, τα στοιχεία της οποίας είναι τοπικά πεπερασμένες οικογένειες και επιπλέον, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}''_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}'_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$. Κατά συνέπεια, αν $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει μοναδικό n, ώστε $B \in \mathcal{B}_n$.
Αν $B \in \mathcal{B}$, τότε το κλειστό υποσύνολο B^c του X είναι G_δ (λήμμα 8.0.8). Επιπλέον ο χώρος X είναι κανονικός με σ-πεπερασμένη βάση, άρα είναι T_4 (λήμμα 8.0.9). Επειδή ο X είναι T_4 και το B^c είναι κλειστό και G_δ υποσύνολο του X υπάρχει (λήμμα 8.0.10) συνεχής απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, με $f^{-1}\big(\{0\}\big) = B^c$. Από τις απεικονίσεις αυτές επιλέγουμε μία, την οποία ονομάζουμε f'_B και ακολούθως παίρνουμε την $f_B = \frac{1}{n} f'_B$. Δηλαδή η f_B είναι μια συνεχής απεικόνιση από τον X στο $[0, \frac{1}{n}]$, άρα $0 \leq f_B(x) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in X$.
Για να αποδείξουμε την μετρικοποιησιμότητα του X, αρκεί να αποδείξουμε ότι εμφυτεύεται στον μετρικό χώρο $[0,1]^{\mathcal{B}}$, που περιγράψαμε στο αμέσως προηγούμενο λήμμα. Προς τούτο θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \to F(X) \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}}$, ώστε

$$F(x) = g_x \quad \Leftrightarrow \quad g_x(B) = f_B(x)$$

και θα αποδείξουμε ότι η F είναι ομοιομορφισμός.

- Βήμα 1ο: Θα αποδείξουμε ότι η F είναι 1-1.
Έστωσαν $x, y \in X$, με $x \neq y$. Άρα υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, ώστε $x \in U$ και $y \in V$. Άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B \subseteq U$ και $y \in V \subseteq B^c$. Επομένως $f_B(y) = 0$ και $f_B(x) > 0$, άρα $f_B(x) \neq f_B(y)$, άρα $g_x(B) \neq g_y(B)$, άρα $F(x) \neq F(y)$. Συνεπώς η F είναι 1-1.

- Βήμα 2ο: Θα αποδείξουμε ότι η F είναι συνεχής.
Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη υπάρχει περιοχή U_n του x, η οποία τέμνει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{B}_n$. Αν το $B \in \mathcal{B}_n$ δεν τέμνει την U_n, τότε

$$\begin{aligned} x, y \in U_n \Rightarrow x, y \in B^c & \\ & \Rightarrow f_B(x) = f_B(y) = 0 \\ & \Rightarrow |f_B(x) - f_B(y)| = 0. \end{aligned}$$

Αν $B \cap U_n \neq \varnothing$, τότε, επειδή η f_B είναι συνεχής υπάρχει περιοχή $W_n(B)$ του x, ώστε

$$y \in W_n(B) \quad \Rightarrow \quad f_B(y) \in \big(f_B(x) - \tfrac{\varepsilon}{2}, f_B(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}\big) \cap \big[0, \tfrac{1}{n}\big].$$

Τα B της $\mathcal{B}_n$ που ικανοποιούν τη σχέση $B \cap U_n \neq \varnothing$ είναι πεπερασμένου πλήθους, ας πούμε τα $B_1, ..., B_m$. Επομένως το $V_n = U_n \cap \big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} W_n(B_i)\big)$ είναι μια περιοχή του

x τέτοια, ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή $y \in V_n \Rightarrow |f_{B_i}(x) - f_{B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $i = 1, ..., m$. Για τα υπόλοιπα B της $\mathcal{B}_n$ που δεν τέμνουν την U_n ισχύει η συνεπαγωγή $y \in V_n \Rightarrow |f_B(x) - f_B(y)| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως έχουμε $y \in V_n \Rightarrow |f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_n$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ και θέτουμε $V = \bigcup_{k=1}^{N} V_k$, το οποίο είναι μια περιοχή του x. Έστω $y \in V$, τότε

- Αν $n \leq N$ έχουμε $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_n$.
- Αν $n > N$ έχουμε $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_n$,

άρα

$$\begin{aligned} d\big(F(x), F(y)\big) &= \sup\{|g_x(B) - g_y(B)| \,/\, B \in \mathcal{B}\} \\ &= \sup\{|f_x(B) - f_y(B)| \,/\, B \in \mathcal{B}\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα η F είναι συνεχής.

- Βήμα 3ο: Θα αποδείξουμε ότι η F είναι ανοικτή.
  Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $g \in F(U)$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W του $F(X)$, ώστε $g \in W \subseteq F(U)$. Επειδή η F είναι 1-1 υπάρχει μοναδικό $x \in U$, ώστε $F(x) = g$. Επιπλέον, επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X υπάρχει $B_0 \in \mathcal{B}$, με $x \in B_0 \subseteq U$, επομένως $f_{B_0}(x) > 0$, αν $x \in B_0$ και $f_{B_0}(x) = 0$, αν $x \in B_0^c$. Θεωρούμε το σύνολο $L = \{h \in [0,1]^{\mathcal{B}} \,/\, h(B_0) > 0\}$, τότε

$$\begin{aligned} g \in S\big(h, h(B_0)\big) &\Rightarrow d(h, g) < h(B_0) \\ &\Rightarrow |h(B) - g(B)| < h(B_0) \quad \forall B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow |h(B_0) - g(B_0)| < h(B_0) \\ &\Rightarrow g(B_0) > 0 \\ &\Rightarrow g \in L, \end{aligned}$$

άρα $g \in S\big(h, h(B_0)\big) \subseteq L$, επομένως το L είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $[0,1]^{\mathcal{B}}$. Έστω το ανοικτό υποσύνολο $W = L \cap F(X)$ του $F(X)$. Αν $h \in W$, τότε, επειδή η F είναι 1-1 υπάρχει μοναδικό $y \in X$, ώστε $h = F(y)$, άρα

$$\begin{aligned} h \in W &\Rightarrow f_{B_0}(y) = h(B_0) > 0 \\ &\Rightarrow y \in B_0 \subseteq U \\ &\Rightarrow h = F(y) \in F(U), \end{aligned}$$

άρα $h \in W \subseteq F(U)$, άρα το $F(U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $F(X)$, επομένως η F είναι ανοικτή απεικόνιση.

Άρα η $F : X \to F(X) \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}}$ είναι ομοιομορφισμός, το οποίο σημαίνει ότι ο X εμφυτεύεται σε έναν μετρικό χώρο, άρα ο X είναι μετρικοποιήσιμος. □

Με την προηγούμενη πρόταση αποδείξαμε ότι η συνθήκη της κανονικότητας μαζί με την συνθήκη ύπαρξης σ-πεπερασμένης βάσης σε έναν χώρο είναι ικανές για την μετρικοποιησιμότητα του χώρου αυτού. Το λήμμα που έπεται είναι απαραίτητο στην απόδειξη του ότι οι συνθήκες αυτές είναι και αναγκαίες για την μετρικοποιησιμότητα του χώρου.

Λήμμα 8.0.13. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\mathcal{A}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Υπάρχει οικογένεια $\mathcal{E}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε να είναι κάλυμμα του X, εκλέπτυνση της $\mathcal{A}$ και σ-πεπερασμένη.*

Απόδειξη: Έστω $\prec$ μία καλή διάταξη στο σύνολο $\mathcal{A}$. Για κάθε $U \in \mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα $S_n(U) = \{x \in X / S\big(x, \frac{1}{n}\big) \subseteq U\}$, $R_n(U) = S_n(U) \setminus \bigcup\limits_{V \in \mathcal{A}, V \prec U} V$ και $E_n(U) = \bigcup\limits_{x \in R_n(U)} S\big(x, \frac{1}{3n}\big)$.

- Ισχυρισμός 1ος: Αν $V, W \in \mathcal{A}$, με $V \neq W$, τότε $x \in R_n(V) \wedge y \in R_n(W) \Rightarrow d(x,y) \geq \frac{1}{n}$.
  Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $V \prec W$. Έχουμε ότι $x \in S_n(V)$, επειδή $x \in R_n(V)$. Επιπλέον $y \notin V$, γιατί $y \in R_n(W)$ και $V \prec W$, άρα $y \notin S(x, \frac{1}{n})$, επομένως $d(x,y) \geq \frac{1}{n}$.

- Ισχυρισμός 2ος: Αν $V, W \in \mathcal{A}$, με $V \neq W$, τότε $x \in E_n(V) \wedge y \in E_n(W) \Rightarrow d(x,y) \geq \frac{1}{3n}$.
  Έχουμε $x \in E_n(V)$, άρα $d(x,v) < \frac{1}{3n}$ για κάποιο $v \in R_n(V)$. Επίσης $y \in E_n(W)$, άρα $d(y,w) < \frac{1}{3n}$ για κάποιο $w \in R_n(W)$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι $d(v,w) \geq \frac{1}{n}$, άρα

$$\begin{aligned} d(v,w) &\leq d(v,x) + d(x,y) + d(y,w) \quad \Rightarrow \\ d(x,y) &\geq d(v,w) - d(v,x) - d(y,w) \\ &> \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n}. \end{aligned}$$

- Ισχυρισμός 3ος: Αν $U \in \mathcal{A}$, τότε $E_n(U) \subseteq U$.
  Έστω $y \in E_n(U)$, τότε $y \in S(x, \frac{1}{3n})$ για κάποιο $x \in R_n(U)$. Έχουμε $x \in S_n(U)$, επειδή $x \in R_n(U)$, άρα $S(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Επειδή $d(x,y) < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$ θα έχουμε $y \in S(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$, άρα $y \in U$, άρα $E_n(U) \subseteq U$.

- Ισχυρισμός 4ος: Η οικογένεια $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$, όπου $\mathcal{E}_n = \{E_n(U) / U \in \mathcal{A}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X.
  Η $\mathcal{E}$ έχει ως στοιχεία τα σύνολα $E_n(U)$, τα οποία, εξ' ορισμού είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Έστω $x \in X$. Το σύνολο $\{U \in \mathcal{A} / x \in U\}$ είναι μη κενό, γιατί το $\mathcal{A}$ είναι κάλυμμα του X, επομένως, λόγω της καλής διάταξης έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το U. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $S(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Άρα $x \in S_n(U)$ και, από την επιλογή του U έχουμε $x \notin V$ για κάθε $V \prec U$. Άρα $x \in R_n(U)$, επομένως $x \in E_n(U) \in \mathcal{E}$. Συνεπώς η $\mathcal{E}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X.

- Ισχυρισμός 5ος: Η οικογένεια $\mathcal{E}$ είναι εκλέπτυνση της οικογένειας $\mathcal{A}$.
  Κάθε στοιχείο της $\mathcal{E}$ είναι της μορφής $E_n(U)$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $U \in \mathcal{A}$. Από τον 3ο ισχυρισμό έχουμε ότι $E_n(U) \subseteq U$, επομένως το ζητούμενο αληθεύει.

- Ισχυρισμός 6ος: Η οικογένεια $\mathcal{E}$ είναι σ-πεπερασμένη.
  Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{E}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $U \in \mathcal{A}$, ώστε $S(x, \frac{1}{6n}) \cap E_n(U) \neq \varnothing$. Άρα υπάρχει $y \in E_n(U)$, ώστε $d(x,y) < \frac{1}{6n}$. Επιπλέον, έστω $V \in \mathcal{A}$, με $V \neq U$ και $z \in E_n(V)$. Από τον 2ο ισχυρισμό έχουμε ότι $d(z,y) > \frac{1}{3n}$, άρα

$$\begin{aligned} d(x,z) &\geq d(z,y) - d(x,y) \\ &> \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n} = \frac{1}{6n}, \end{aligned}$$

  άρα $z \notin S(x, \frac{1}{6n})$. Επομένως η περιοχή $S(x, \frac{1}{6n})$ τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της $\mathcal{E}_n$, άρα η $\mathcal{E}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη, επομένως η $\mathcal{E}$ είναι σ- πεπερασμένη.

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο ότι η οικογένεια $\mathcal{E}$ είναι σ- πεπερασμένη, εκλέπτυνση της $\mathcal{A}$ και ανοικτό κάλυμμα του X, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 8.0.14. *Κάθε μετρικός χώρος X έχει μια σ-πεπερασμένη βάση.*

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $\mathcal{A}_n = \{S(x, \frac{1}{n}) / x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Επομένως, από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει οικογένεια $\mathcal{B}$, με ανοικτά υποσύνολα του X που καλύπτει τον X είναι σ- πεπερασμένη και εκλέπτυνση της $\mathcal{A}$. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in U$. Επιπλέον υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B$. Επειδή το U είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{A}_n$ υπάρχει $S(z, \frac{1}{n})$ ώστε $B \subseteq S(z, \frac{1}{n})$. Άρα , αν $y \in B$, τότε $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$, άρα $y \in U$. Επομένως $x \in B \subseteq U$. Δηλαδή η $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του X. □

Πρόταση 8.0.15. *Κάθε μετρικός χώρος είναι κανονικός και έχει μια σ- πεπερασμένη βάση.*

Απόδειξη: Η κανονικότητα των μετρικών χώρων αποδείχθηκε στις προτάσεις 3.1.1 και 3.1.4. Το ότι κάθε μετρικός χώρος έχει σ-πεπερασμένη βάση αποδείχθηκε στο προηγούμενο λήμμα. □

Πρόταση 8.0.16. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι μετρικοποιήσιμος, τότε είναι κανονικός και έχει μια σ-πεπερασμένη βάση.*

Απόδειξη: Επειδή ο X είναι μετρικοποιήσιμος, υπάρχει μετρικός χώρος Y και ομοιομορφισμός $f : Y \to X$. Επειδή η κανονικότητα και το σ-πεπερασμένο των βάσεων είναι τοπολογικά αναλλοίωτα, το ζητούμενο έπεται άμεσα, από τις δύο προηγούμενες προτάσεις. □

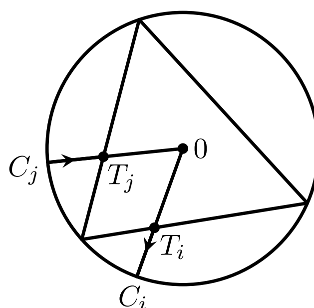
Τέλος το θεώρημα Nagata-Smirnov, το οποίο ήταν και αρχικός στόχος είναι άμεση συνέπεια των προηγουμένων προτάσεων.

Πρόταση 8.0.17. ***(Θεώρημα Nagata- Smirnov)*** *Αν ο χώρος X είναι κανονικός και έχει σ-πεπερασμένη βάση, τότε, και μόνον, τότε είναι μετρικοποιήσιμος.*

9 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΠΗΛΙΚΟ

9.1 Χώροι πηλίκα

Για να έχουμε μια εποπτεία των ομοιομορφισμών στο Ευκλείδειο επίπεδο πρέπει να θεωρήσουμε ότι τα σχήματά μας γίνονται από ένα σύρμα, το οποίο έχει απεριόριστες δυνατότητες συστολής και διαστολής. Με αυτήν την λογική, ένα τρίγωνο είναι ομοιόμορφο με τον περιγεγραμμένο του κύκλο, γιατί αν "τραβήξουμε" τα σημεία του τριγώνου προς τα έξω, όπως δείχνει το σχήμα, τότε το σημείο T_i του τριγώνου, έρχεται στη θέση του σημείου C_i του κύκλου. Αντιστρόφως, αν "μαζέψουμε" τα σημεία του κύκλου προς τα μέσα, τότε το σημείο C_j του κύκλου έρχεται στη θέση του σημείου T_j του τριγώνου. Το "τράβηγμα" και το "μάζεμα" που περιγράψαμε πιο πάνω, αποτελούν τη φυσική ερμηνεία ενός ομοιομορφισμού μεταξύ του τριγώνου και του περιγεγραμμένου σ'αυτό κύκλου.



Σχήμα 9.1

Με άλλα λόγια ομοιομορφισμοί στους Ευκλείδειους χώρους, των οποίων έχουμε εποπτεία, είναι εκείνοι οι φυσικοί μετασχηματισμοί, στους οποίους επιτρέπεται το "τράβηγμα", το "μάζεμα", αλλά όχι το "κόψιμο", γιατί τότε καταργείται η συνέχεια, ούτε η "συγκόλληση", γιατί τότε καταργείται το "1-1".

Και, αν η διατήρηση της συνέχειας είναι αίτημα "εκ των ων ουκ άνευ" της τοπολογίας η "συγκόλληση" σημείων είναι ένα θέμα που απαιτεί μια κάποια διερεύνηση. Δηλαδή, πρέπει

να απαντήσουμε στο ερώτημα:"τι γίνεται όταν συγκολλούμε κάποια σημεία ενός σχήματος; Το σχήμα που προκύπτει με ποιο γνωστό σχήμα "μοιάζει" (είναι ομοιόμορφο); Για παράδειγμα τι γίνεται, όταν συγκολλήσουμε όλα τα σημεία του συνόρου ($\mathbb{S}^1$) του δίσκου ($\mathbb{D}^2$) σε ένα; Το σχήμα που προκύπτει με ποιο σχήμα είναι ομοιόμορφο; Στα ερωτήματα αυτά απαντά με μαθηματική αυστηρότητα και ακολούθως γενίκευση για όλους τους τοπολογικούς χώρους η "τοπολογία πηλίκο", την οποία πραγματευόμαστε στο κεφάλαιο αυτό.
Αυτά θα μπορούσαμε να πούμε βλέποντας το πηλίκο από την γεωμετρική σκοπιά. Από την άλλη το "πηλίκο" είναι μία έννοια κοινή της άλγεβρας και της τοπολογίας. Η λογική του είναι να διαιρούμε (εξ'ου και η ονομασία πηλίκο) το σύνολο X σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα (κλάσεις) και να ταυτίζουμε σε ένα τα σημεία καθενός από τα υποσύνολα αυτά. Το θέμα του ορισμού της δομής, αλγεβρικής ή τοπολογικής στον νέο χώρο που προκύπτει οι μαθηματικοί επιχειρούν να το λύσουν με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να προέρχεται με "φυσικό τρόπο" από την αρχική δομή.

Ορισμός 9.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό. Συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το σημείο x και με $X/\sim$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, οι οποίες ορίζονται στο σύνολο X από τη σχέση $\sim$. Θα ονομάσουμε την απεικόνιση $pr : X \to X/\sim$, με

$$pr(x) = [x]$$

φυσική προβολή.

Παρατήρηση: Είναι προφανές το ότι η φυσική προβολή είναι επί απεικόνιση, δηλαδή

$$pr(X) = X/\sim.$$

Η ακόλουθη πρόταση δίνει έναν "φυσικό τρόπο" να ορίσουμε μια τοπολογία στο σύνολο $X/\sim$, από την τοπολογία του X.

Πρόταση 9.1.1. *Έστω ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$. Το σύνολο $\mathcal{T}_q$ με στοιχεία υποσύνολα του $X/\sim$, τέτοια ώστε*

$$A \in \mathcal{T}_q \quad \Leftrightarrow \quad pr^{-1}\big(A\big) \in \mathcal{T},$$

ορίζει μία τοπολογία στο $X/\sim$.

Απόδειξη: α′) $pr^{-1}\big(\varnothing\big) = \varnothing \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{T}_q$

β′) $pr^{-1}\big(X/\sim\big) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow \big(X/\sim\big) \in \mathcal{T}_q$

γ′)
$$\begin{aligned} U_i \in \mathcal{T}_q \quad \forall i \in I &\Rightarrow pr^{-1}\big(U_i\big) \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I \\ &\Rightarrow pr^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} pr^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_q\,. \end{aligned}$$

δ΄)
$$\begin{aligned} U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_q &\Rightarrow pr^{-1}\big(U_1\big), \dots, pr^{-1}\big(U_n\big) \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow pr^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} pr^{-1}\big(U_i\big) \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_q \,. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 9.1.2. Η τοπολογία $\mathcal{T}_q$ στον χώρο $X/\sim$, όπως ορίστηκε στην πρόταση 9.1.1 ονομάζεται **τοπολογία πηλίκο** και ο χώρος $X/\sim$, με την τοπολογία $\mathcal{T}_q$ ονομάζεται **χώρος πηλίκο**. Δηλαδή ένα υποσύνολο A του χώρου $X/\sim$ είναι ανοικτό, αν και μόνον, αν το $pr^{-1}\big(A\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παρατήρηση: Η τοπολογία πηλίκο ονομάζεται και **τοπολογία ταύτισης**. Ο λόγος είναι προφανής, αφού τα στοιχεία μιας κλάσης ισοδυναμίας του χώρου πηλίκου ταυτίζονται μεταξύ τους και θεωρούνται ως ένα. Η ταύτιση των στοιχείων μιας κλάσης σε ένα είναι η αυστηρή ερμηνεία της συγκόλλησης σημείων που αναφέραμε στον πρόλογο της παραγράφου.

Πρόταση 9.1.2. *Αν $X/\sim$ είναι ένας χώρος πηλίκο, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Το A είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $X/\sim$.

β΄) Το $pr^{-1}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: Το A είναι κλειστό υποσύνολο του $X/\sim\ \Leftrightarrow$
το $\big(X/\sim\big)\setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim\ \Leftrightarrow$
το $pr^{-1}\Big(\big(X/\sim\big)\setminus A\Big) = X \setminus pr^{-1}\big(A\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \Leftrightarrow$
το $pr^{-1}\big(A\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Άμεση συνέπεια του ορισμού του χώρου πηλίκου είναι η πρόταση

Πρόταση 9.1.3. *Η φυσική προβολή είναι συνεχής απεικόνιση*

Πρόταση 9.1.4. *Η τοπολογία πηλίκο στο σύνολο $X/\sim$ είναι η πλουσιότερη τοπολογία στο $X/\sim$, ως προς την οποία η φυσική προβολή pr είναι συνεχής απεικόνιση.*

Απόδειξη: Την συνέχεια της pr ως προς την τοπολογία πηλίκο είδαμε στην πρόταση 9.1.3. Έστω τώρα μια τοπολογία $\mathcal{T}'$ στον χώρο $X/\sim$, ως προς την οποία η pr είναι συνεχής, άρα

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T}' &\Rightarrow pr^{-1}(U) \in \mathcal{T} \\ &\Rightarrow U \in \mathcal{T}_q \,, \end{aligned}$$

άρα $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_q$, επομένως η $\mathcal{T}_q$ είναι πλουσιότερη της $\mathcal{T}$. □

Παρατήρηση: Η φυσική προβολή $pr : X \to X/\sim$ δεν είναι απαραίτητα, ούτε ανοικτή, ούτε κλειστή απεικόνιση. Αντιπαράδειγμα: στον $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη σχέση $\sim$, η οποία τον διαμερίζει σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τις $a = (-\infty, 0)$ και $b = [0, \infty)$. Συνεπώς η τοπολογία πηλίκο στον $\mathbb{R}/\sim$ που επάγεται από την Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι η $\mathcal{T}_q = \{\varnothing, \{a, b\}, \{a\}\}$. Το $(1, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $pr((1, \infty)) = \{b\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}/\sim$, άρα η pr δεν είναι ανοικτή απεικόνιση. Το $(\infty, -1]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $pr((\infty, -1]) = \{a\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}/\sim$, άρα η pr δεν είναι κλειστή απεικόνιση.

Παραδείγματα 9.1.1. Ξεκινάμε με δύο φημισμένα παραδείγματα της τοπολογίας πηλίκο, τη λωρίδα Moebius και την μποτίλια Klein.

1. Στο μοναδιαίο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ θεωρούμε την σχέση $\sim$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow (x, y) = (z, w) \vee (\{x, z\} = \{0, 1\} \wedge w + y = 1).$$

   Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}/\sim$ ονομάζεται **λωρίδα Moebius** (σχήμα 9.2α). Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η $\sim$ στο μοναδιαίο τετράγωνο είναι

   (α΄) Τα μονοσύνολα που αποτελούνται από τα σημεία του εσωτερικού του τετραγώνου.

   (β΄) Τα μονοσύνολα που αποτελούνται από τα εσωτερικά σημεία των οριζόντιων πλευρών του τετραγώνου.

   (γ΄) Τα διμελή σύνολα $\{(0, t), (1, 1 - t) \,/\, t \in \mathbb{I}\}$.

   Δηλαδή ταυτίζουμε το σημείο $(0, t)$ με το σημείο $(1, 1 - t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και τα υπόλοιπα σημεία του τετραγώνου τα αφήνουμε όπως είναι.

2. Στο μοναδιαίο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ θεωρούμε τη σχέση $\sim$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow (x, y) = (z, w) \vee (\{x, z\} = \{0, 1\} \wedge w = y) \vee (\{y, w\} = \{0, 1\} \wedge x + z = 1).$$

   Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}/\sim$ ονομάζεται **μποτίλια Klein** (σχήμα 9.2β). Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η $\sim$ στο μοναδιαίο τετράγωνο είναι

   (α΄) Τα μονοσύνολα που αποτελούνται από τα σημεία του εσωτερικού του τετραγώνου.

   (β΄) Τα διμελή σύνολα $\{(t, 0), (t, 1) \,/\, t \in \mathbb{I}\}$.

   (γ΄) Τα διμελή σύνολα $\{(0, t), (1, 1 - t) \,/\, t \in \mathbb{I}\}$.

   Δηλαδή ταυτίζουμε το σημείο $(t, 0)$ με το σημείο $(t, 1)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και το σημείο $(0, t)$ με το σημείο $(1, 1 - t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και τα υπόλοιπα σημεία του τετραγώνου τα αφήνουμε όπως είναι.

Πρόταση 9.1.5. *Αν ο χώρος X είναι συνεκτικός, δρομοσυνεκτικός, ή συμπαγής, τότε ο χώρος πηλίκο $X/\sim$ είναι συνεκτικός, δρομοσυνεκτικός, ή συμπαγής, αντιστοίχως.*

Απόδειξη: Η pr είναι συνεχής και $pr(X) = X/\sim$, άρα το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από τις προτάσεις 4.1.8, 4.2.2 και 5.1.6. □

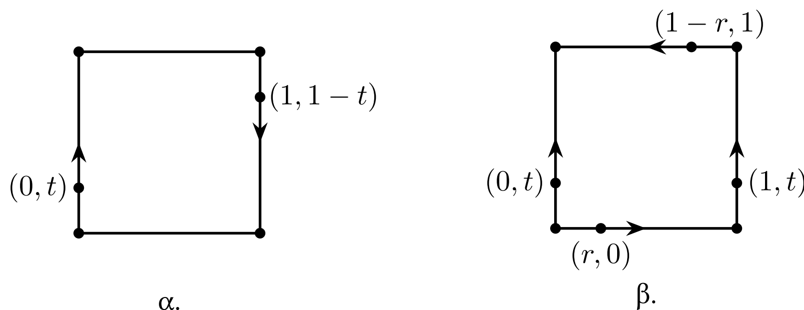
Παρατήρηση: Όπως φαίνεται, από τα αντιπαραδείγματα που ακολουθούν η ιδιότητα Hausdorff δεν "μεταφέρεται" πάντα από τον X στον $X/\sim$.

1. Στον $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη σχέση $\sim$, η οποία τον διαμερίζει σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τις $a = (-\infty, 0)$ και $[0, \infty)$. Συνεπώς η τοπολογία πηλίκο στον $\mathbb{R}/\sim$ είναι η $\mathcal{T}_q = \{\varnothing, \{a, b\}, \{a\}\}$. Το μοναδικό ανοικτό σύνολο που περιέχει το b είναι το $\{a, b\}$, άρα τα a, b δεν διαχωρίζονται με ανοικτά και ξένα σύνολα, συνεπώς ο χώρος $\mathbb{R}/\sim$ δεν είναι Hausdorff, ενώ ο $\mathbb{R}$ είναι.

2. Εύκολα αποδεικνύεται πως η σχέση $\sim$, με $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στον $\mathbb{R}$. Ας δούμε την τοπολογία του $\mathbb{R}/\sim$. Έστω U μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}/\sim$ και $x \in \mathbb{R}$. Αν ο x είναι ρητός, τότε υπάρχει ρητός y, με $y \in pr^{-1}(U)$, επειδή το $pr^{-1}(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα περιέχει μη τετριμμένο διάστημα. Έχουμε $x \sim y$, άρα $[x] = [y] \in pr\big(pr^{-1}(U)\big) \subseteq U$.
   Αν ο x είναι άρρητος, τότε, επειδή το σύνολο $\{x + q \,/\, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (γιατί;) και το $pr^{-1}(U)$ περιέχει διάστημα υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$, ώστε $x + q \in pr^{-1}(U)$, άρα $[x] = [x + q] \in pr\big(pr^{-1}(U)\big) \subseteq U$. Επομένως σε κάθε περίπτωση $[x] \in U$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\mathbb{R}/\sim \subseteq U$. Το $U \subseteq \mathbb{R}/\sim$ είναι προφανές, άρα $U = \mathbb{R}/\sim$. Συνεπώς το μοναδικό μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}/\sim$ είναι το ίδιο το $\mathbb{R}/\sim$, άρα η τοπολογία του $\mathbb{R}/\sim$ είναι η τετριμμένη, άρα ο $\mathbb{R}/\sim$ δεν είναι Hausdorff, παρότι ο $\mathbb{R}$ είναι.

Στην αλγεβρική τοπολογία μας ενδιαφέρει η περίπτωση που η σχέση $\sim$ στον χώρο Hausdorff X δίνει επίσης χώρο Hausdorff $X/\sim$. Η πρόταση 9.1.7 που ακολουθεί δίνει μία ικανή συνθήκη, ώστε η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον συμπαγή και Hausdorff χώρο X να δίνει χώρο $X/\sim$, ο οποίος να είναι επίσης Hausdorff.

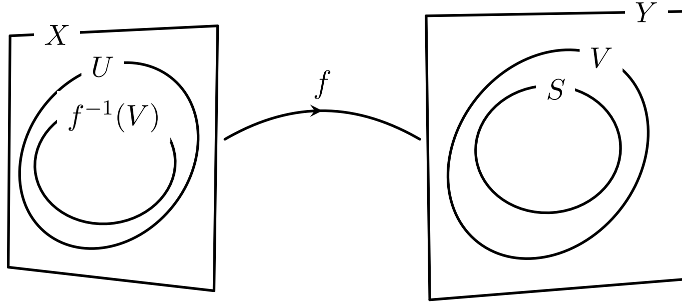
Ορισμός 9.1.3. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X. Η σχέση $\sim$ ονομάζεται **κλειστή**, αν και μόνον, αν το σύνολο $G_\sim = \{(x, y) \in X \times X / x \sim y\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, όταν το $X \times X$ είναι εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία.



Σχήμα 9.2

Λήμμα 9.1.6. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ κλειστή απεικόνιση. Αν S υποσύνολο του Y και U ανοικτό υποσύνολο του X, με $f^{-1}(S) \subseteq U$, τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του Y, με $S \subseteq V$ και $f^{-1}(V) \subseteq U$.*

Απόδειξη: Έστω $V = [f(U^c)]^c$. Το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το U^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το $f(U^c)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα το V είναι ανοικτό υποσύνολο του Y (σχήμα 9.3).



Σχήμα 9.3

Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(S) \subseteq U &\Rightarrow U^c \subseteq (f^{-1}(S))^c = f^{-1}(S^c) \\ &\Rightarrow f(U^c) \subseteq f(f^{-1}(S^c)) \subseteq S^c \\ &\Rightarrow S \subseteq (f(U^c))^c = V\,, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U^c \subseteq f^{-1}(f(U^c)) &\Rightarrow \big[f^{-1}\big(f(U^c)\big)\big]^c \subseteq U \\ &\Rightarrow f^{-1}\big(\big(f(U^c)\big)^c\big) \subseteq U \\ &\Rightarrow f^{-1}(V) \subseteq U\,. \end{aligned}$$

Επομένως το V είναι το υποσύνολο του Y, το οποίο ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πρότασης. □

Πρόταση 9.1.7. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X. Αν η $\sim$ είναι κλειστή, τότε ο $X/\sim$ είναι Hausdorff.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $p_1 : X \times X \to X$, με $p_1(x,y) = x$ και $p_2 : X \times X \to X$, με $p_2(x,y) = y$. Αν $C \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned} p_2\big(p_1^{-1}(C) \cap G_\sim\big) &= \{y \in X / \exists x \in C, y \sim x\} \\ &= pr^{-1}(pr(C)), \end{aligned}$$

όπου pr είναι η φυσική προβολή $pr : X \to X/\sim$. Έστω A κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $X \times X$, άρα το A είναι συμπαγές, άρα το $p_2(A)$ συμπαγές υποσύνολο του X και, επειδή ο X είναι Hausdorff, το $p_2(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα η p_2 είναι κλειστή απεικόνιση.
Αν C κλειστό υποσύνολο του X, τότε το $p_1^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, άρα το $p_1^{-1}(C) \cap G_\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, άρα το $p_2(p_1^{-1}(C) \cap G_\sim) = pr^{-1}(pr(C))$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα το $pr(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X/\sim$. Συνεπώς, η pr είναι κλειστή απεικόνιση.
Έστωσαν $[x], [y] \in X/\sim$, με $[x] \neq [y]$. Το $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, γιατί ο X, ως χώρος Hausdorff είναι χώρος T_1, άρα τα μονοσύνολα είναι κλειστά υποσύνολά του. Άρα, επειδή η pr είναι κλειστή, το $pr\big(\{x\}\big) = [x]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X/\sim$. Επομένως τα $pr^{-1}([x])$, $pr^{-1}([y])$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X και , επειδή ο X είναι χώρος φυσιολογικός (συμπαγής και Hausdorff) υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X, με $pr^{-1}([x]) \subseteq U$ και $pr^{-1}([y]) \subseteq V$. Από το προηγηθέν λήμμα υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U', V' του $X/\sim$, ώστε $[x] \in U'$, $[y] \in V'$, $pr^{-1}(U') \subseteq U$ και $pr^{-1}(V') \subseteq V$, άρα

$$\begin{aligned} pr^{-1}\big(U' \cap V'\big) &= pr^{-1}\big(U'\big) \cap pr^{-1}\big(V'\big) \\ &\subseteq U \cap V = \varnothing \\ &\Rightarrow pr^{-1}\big(U' \cap V'\big) = \varnothing \\ &\Rightarrow U' \cap V' = \varnothing\,, \end{aligned}$$

συνεπώς ο $X/\sim$ είναι Hausdorff.

Παρατηρήσεις:

1. Αν Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X ορίζουμε στον X μια σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \vee \quad x, y \in Y.$$

   Ο χώρος πηλίκο που ορίζεται από την $\sim$ συμβολίζεται με X/Y. Μπορούμε να τον αντιληφθούμε καλύτερα, αν θεωρήσουμε ότι όλα τα σημεία του Y ταυτίζονται σε ένα, ή αλλιώς, αν δούμε το Y ως ένα σημείο και τα σημεία του $X \setminus Y$ να παραμένουν ως έχουν.

2. Αν Y, Z είναι μη κενά και ξένα υποσύνολα του τοπολογικού χώρου X ορίζουμε στο X μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \vee \quad x, y \in Y \quad \vee \quad x, y \in Z.$$

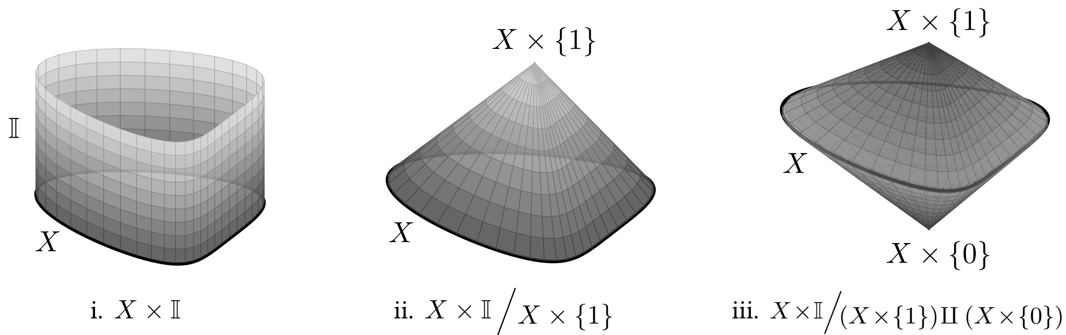
   Ο χώρος πηλίκο που ορίζεται από την $\sim$ συμβολίζεται με $X/Y \sqcup Z$. Μπορούμε να τον αντιληφθούμε καλύτερα, αν θεωρήσουμε ότι όλα τα σημεία του Y ταυτίζονται σε ένα, όλα τα σημεία του Z ταυτίζονται επίσης σε άλλο ένα, και τα σημεία του $X \setminus (Y \sqcup Z)$ παραμένουν ως έχουν.

Ορισμός 9.1.4. Αν X τοπολογικός χώρος, τότε ο χώρος $X \times \mathbb{I}$ με την καρτεσιανή τοπολογία ονομάζεται **κύλινδρος υπεράνω του** X και συμβολίζεται με $Cl(X)$. Ο χώρος πηλίκο $X \times \mathbb{I}/X \times \{1\}$ ονομάζεται **κώνος υπεράνω του** X και συμβολίζεται με $C(X)$. Για ένα οποιοδήποτε στοιχείο $[(x,t)]$ του CX έχουμε

$$[(x,t)] = \begin{cases} \{(x,t)\}, & 0 \leq t < 1 \\ \{(x,1)\,/\,x \in X\} \end{cases}.$$

Ο χώρος πηλίκο $X \times [-1,1]/(X \times \{-1\}) \sqcup (X \times \{1\})$ ονομάζεται **ανάρτηση υπεράνω του** X και συμβολίζεται με SX. Για ένα οποιοδήποτε στοιχείο $[(x,t)]$ της SX έχουμε

$$[(x,t)] = \begin{cases} \{(x,t)\}, & -1 < t < 1 \\ \{(x,1)\,/\,x \in X\} \\ \{(x,-1)\,/\,x \in X\} \end{cases}.$$



Σχήμα 9.4. Κύλινδρος-Κώνος-Ανάρτηση

Πρόταση 9.1.8. *Αν ο X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε ο X/A είναι χώρος Hausdorff.*

Απόδειξη: Αν $\sim$ είναι η σχέση από την οποία προκύπτει ο χώρος πηλίκο X/A τότε

$$\begin{aligned} G_\sim &= \{(x,y) \in X \times X \,/\, x \sim y\} \\ &= (A \times A) \cup \{(x,x)\,/\,x \in X\}. \end{aligned}$$

Το $D = \{(x,x)\,/\,x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, γιατί ο X είναι Hausdorff (πρόταση 3.3.3). Επιπλέον το $A \times A$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, γιατί το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. Άρα το $G_\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, επομένως ο $X/\sim$ είναι χώρος Hausdorff. □

9.2 Ομοιομορφισμοί με χώρους πηλίκα

Ορισμός 9.2.1. Έστωσαν τα μη κενά σύνολα X, Y, η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο X και η απεικόνιση $f : X \to Y$. Θα λέμε ότι η f **είναι συμβατή με την σχέση** $\sim$, αν και μόνον, αν ισχύει η ισοδυναμία

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

Παραδείγματα 9.2.1.

1. Αν θεωρήσουμε τον $\mathbb{S}^1$, ως υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και σ'αυτόν τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, με $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, τότε η $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $f(x) = x^2$, είναι συμβατή με την $\sim$, γιατί
$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x = \pm y \\ &\Leftrightarrow x \sim y. \end{aligned}$$

2. Αλλά η $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $g(x) = x^3$ δεν είναι συμβατή με την $\sim$, όπου $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, γιατί $g(i) = g(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$, ενώ $\pm i \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Πρόταση 9.2.1. *Έστω $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X και $f : X \to Y$ απεικόνιση συμβατή με τη σχέση $\sim$, τότε η απεικόνιση $\overline{f} : X/\sim \to Y$, με $\overline{f}([x]) = f(x)$ είναι καλώς ορισμένη και 1-1.*

Απόδειξη: Έστωσαν $[x], [y] \in X/\sim$, τότε

$$\begin{aligned} [x] = [y] &\Rightarrow x \sim y \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow \overline{f}([x]) = \overline{f}([y]), \end{aligned}$$

άρα η $\overline{f}$ είναι καλώς ορισμένη.
Έστωσαν $[x], [y] \in X/\sim$, τότε

$$\begin{aligned} \overline{f}([x]) = \overline{f}([y]) &\Rightarrow f(x) \sim f(y) \\ &\Rightarrow x \sim y \\ &\Rightarrow [x] = [y], \end{aligned}$$

άρα η $\overline{f}$ είναι 1-1.

□

Εφεξής θα μας απασχολεί μόνον η περίπτωση που τα σύνολα X, Y είναι τοπολογικοί χώροι. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.2.2. Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y, η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X και η απεικόνιση $f : X \to Y$, η οποία είναι συμβατή με την $\sim$. Η απεικόνιση $\overline{f} : (X/\sim) \to Y$, ώστε $\overline{f} \circ pr = f$ ονομάζεται **απεικόνιση μεταφοράς** του $X/\sim$ στον Y, που επάγεται από την απεικόνιση f.

Παρατήρηση: Η συμβατότητα της f με τη σχέση $\sim$ σημαίνει ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle pr} & \nearrow{\scriptstyle \overline{f}} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό

Πρόταση 9.2.2. *Έστωσαν*

- *οι τοπολογικοί χώροι* X, Y,
- *η σχέση ισοδυναμίας* $\sim$ *στον* X,
- *η απεικόνιση* $f : X \to Y$, *η οποία είναι συμβατή με την* $\sim$ *και*
- *η απεικόνιση* $\overline{f} : X/\sim \to Y$, *ώστε* $\overline{f} \circ pr = f$, *δηλαδή* $\overline{f}([x]) = f(x)$.

Τότε οι ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν

α΄) Αν η f *είναι συνεχής, τότε η* $\overline{f}$ *είναι συνεχής.*

β΄) Αν η f *είναι επί, τότε η* $\overline{f}$ *είναι επί.*

γ΄) Αν η $f : X \to Y$ *είναι ανοικτή (αντ. κλειστή), τότε η* $\overline{f} : X/\sim \to Y$ *είναι ανοικτή (αντ. κλειστή).*

Απόδειξη:

α΄) Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε, επειδή η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= (\overline{f} \circ pr)^{-1}(U) \\ &= (pr^{-1} \circ (\overline{f})^{-1})(U) \\ &= pr^{-1}((\overline{f})^{-1}(U)), \end{aligned}$$

άρα το $pr^{-1}((\overline{f})^{-1}(U))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συνεπώς το $(\overline{f})^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$, άρα η $\overline{f}$ είναι συνεχής.

β΄) Έστω $y \in Y$. Επειδή η f είναι επί υπάρχει $x \in X$, ώστε $f(x) = y$, άρα $\overline{f}([x]) = f(x) = y$, επομένως η $\overline{f}$ είναι επί.

γ΄) Έστω U ένα ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του $X/\sim$, τότε το $pr^{-1}\big(U\big) = V$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του X και, επειδή η απεικόνιση pr είναι επί έχουμε $U = pr\big(pr^{-1}(U)\big) = pr(V)$, άρα το $\overline{f}(U) = \overline{f}\big(pr(V)\big) = f(V)$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του Y.

□

Πολλές φορές ο χώρος $X/\sim$ εποπτικά φαίνεται ότι είναι ομοιόμορφος με έναν γνωστό χώρο. Για την επαλήθευση αυτής της εποπτικής αντίληψης, αρκεί να βρούμε μια απεικόνιση $f : X \to Y$, ώστε η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f}$ που επάγει να είναι ομοιομορφισμός. Στις δύο επόμενες προτάσεις θα δούμε ικανές συνθήκες για να πραγματοποιείται το ζητούμενο αυτό. Και στις δύο προτάσεις θεωρούμε ότι οι X, Y είναι τοπολογικοί χώροι, η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στον X και ότι η f είναι συνεχής, συμβατή με την $\sim$ και επί.

Πρόταση 9.2.3. *Αν ο χώρος X είναι συμπαγής και ο χώρος Y είναι Hausdorff, τότε η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : X/\sim \to Y$ είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Ο χώρος $X/\sim$ είναι συμπαγής, ως εικόνα του συμπαγούς X, μέσω της συνεχούς pr. Από τις προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι η $\overline{f} : X/\sim \to Y$ είναι συνεχής, 1-1 και επί. Επιπλέον ο χώρος Y είναι Hausdorff, άρα (πρόταση 5.1.9) η $\overline{f}$ είναι ομοιομορφισμός. □

Πρόταση 9.2.4. *Αν η $f : X \to Y$ είναι ανοικτή, τότε η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : X/\sim \to Y$ είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Από την πρόταση 9.2.2 έχουμε ότι η $\overline{f} : X/\sim \to Y$ είναι επίσης ανοικτή. Επιπλέον είναι συνεχής, 1-1 και επί, άρα (πρόταση 2.3.4) είναι ομοιομορφισμός. □

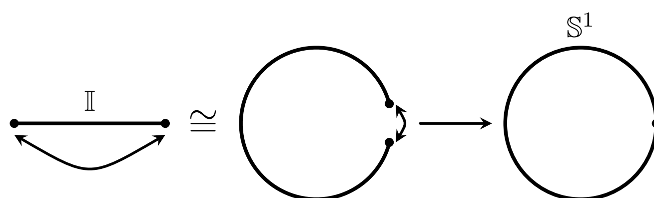
Έπονται κάποιες βασικές και χρήσιμες για τα επόμενα εφαρμογές. Μάλιστα σε αρκετές από αυτές έχουμε μερικά εντυπωσιακά γεωμετρικά αποτελέσματα.

Παραδείγματα 9.2.2.

1. **Στο $\mathbb{I}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, ως εξής:**

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \vee \quad \{x, y\} = \{0, 1\},$$

τότε ο χώρος πηλίκο $\mathbb{I}/\sim$ είναι ομοιόμορφος με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$.
Η σχέση ισοδυναμίας διαισθητικά δείχνει την ταύτιση των άκρων O=(0,0) και I=(1,0) του ευθύγραμμου τμήματος OI, ενώ τα υπόλοιπα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος παραμένουν ως έχουν.



Σχήμα 9.5

Απόδειξη: Διευκρινίζουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού στον $\mathbb{S}^1$ είναι αυτή που επάγεται από τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών, αν θεωρήσουμε ότι ο $\mathbb{S}^1$ είναι

υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$. Την μονάδα της ομάδας αυτής συμβολίζουμε με **1**. Αν $x,\, y \in [0,1]$, τότε $|x-y| \leq 1$. Για την $f : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $f(x) = e^{2\pi i x}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow e^{2\pi i(x-y)} = \mathbf{1} \\ &\Leftrightarrow 2\pi i(x-y) = 2k\pi i,\, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x - y = k,\, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (*) x-y = 0 \vee x-y = 1 \vee x-y = -1 \\ &\Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \{0,1\} \\ &\Leftrightarrow x \sim y\,, \end{aligned}$$

((*): επειδή $|x-y| \leq 1$), άρα η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$. Η f είναι συνεχής και επί. Επιπλέον ο χώρος $\mathbb{I}$ είναι συμπαγής και ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι Hausdorff, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, επομένως η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : \mathbb{I}/\sim \to \mathbb{S}^1$ είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 9.2.3), δηλαδή

$$\mathbb{I}/\sim \cong \mathbb{S}^1$$

□

2. **Στον $\mathbb{R}$ ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξής:**

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

Τότε ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}/\sim$ είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^1$.
Η πιο πάνω σχέση ισοδυναμίας δείχνει την ταύτιση στην πραγματική ευθεία εκείνων των σημείων που έχουν το ίδιο δεκαδικό μέρος.

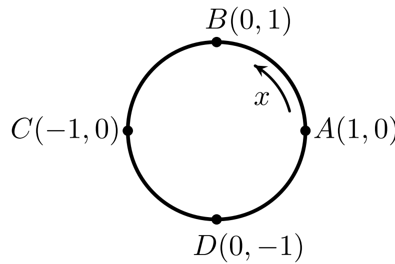
Απόδειξη: Κατ' αρχάς θεωρούμε τον $\mathbb{S}^1$, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Το $\mathbf{1} = (1,0) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{Z}$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας. Ακολούθως θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, με $f(x) = e^{2\pi i x}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow e^{2\pi i(x-y)} = \mathbf{1} \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2\pi i x}}{e^{2\pi i x}} = \mathbf{1} \\ &\Leftrightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y} \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y)\,, \end{aligned}$$

άρα η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$. Το ότι η f είναι συνεχής και επί είναι προφανές. Θα δείξουμε ότι η f είναι ανοικτή. Πράγματι

Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Στον $\mathbb{S}^1$ θεωρούμε τα ανοικτά τόξα $U_1 = ABC$, $U_2 = BCD$, $U_3 = CDA$, $U_4 = DAB$, όπου $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ και $D = (0,-1)$ (σχήμα 9.6). Αν $x_0 \in V$, τότε το $f(x_0)$ ανήκει σε ένα από τα U_1, U_2, U_3 ή U_4. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $f(x_0) \in U_1$, άρα $x_0 \in f^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k, k+\frac{1}{2}\right)$. Επειδή τα διαστήματα $(k, k+\frac{1}{2})$ είναι ξένα μεταξύ τους υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{Z}$, ώστε $x_0 \in (k, k+\frac{1}{2})$. Έστω I ανοικτό διάστημα, με $x_0 \in I \subseteq (k, k+\frac{1}{2}) \cap V$. Ο περιορισμός της f στο διάστημα I είναι 1-1, γιατί

$$\begin{aligned} x, y \in I \wedge f(x) = f(y) &\Rightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y} \\ &\Rightarrow 2\pi(x-y) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x - y = k \in \mathbb{Z} \wedge x - y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow x - y = 0 \\ &\Rightarrow x = y\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 9.6

Τέλος, λόγω της φυσιολογικότητας του χώρου $\mathbb{R}$ υπάρχει ανοικτό διάστημα J, με $x_0 \in J \subseteq \overline{J} \subseteq I$. Επειδή το $\overline{J}$ είναι συμπαγές και ο περιορισμός της f στο $\overline{J}$ είναι 1-1, η $f/\overline{J}$ είναι μια εμφύτευση, άρα απεικονίζει τα ανοικτά υποσύνολα του $\overline{J}$ σε ανοικτά υποσύνολα του U_1, άρα και του $\mathbb{S}^1$. Δηλαδή το $f(J)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^1$ και $f(x_0) \in f(J) \subseteq f(V)$, άρα το $f(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^1$, επομένως η f είναι ανοικτή απεικόνιση. Επομένως η $\overline{f} : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{S}^1$ είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 9.2.4). Δηλαδή

$$\mathbb{R}/\sim \,\cong \mathbb{S}^1.$$

□

3. **Στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}^2$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$, ως εξής:**

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y.$$

Τότε

$$\mathbb{D}^2/\sim\,\cong \mathbb{D}^2.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, με $f(z) = z^2$. Είναι

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x = \pm y \\ &\Leftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y)\,, \end{aligned}$$

άρα η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$. Η f είναι συνεχής και επί. Επιπλέον, ο $\mathbb{D}^2$ είναι συμπαγής και Hausdorff, άρα η $\overline{f} : \mathbb{D}^2/\sim \to \mathbb{D}^2$ είναι ομοιομορφισμός. Επομένως

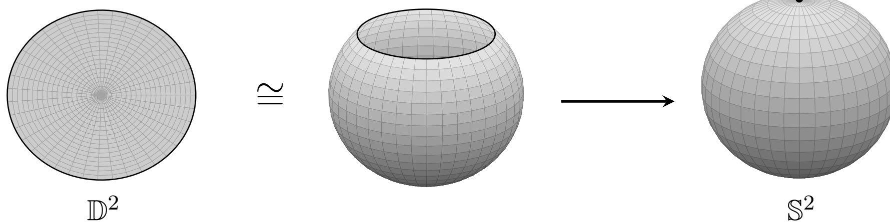
$$\mathbb{D}^2/\sim\,\cong \mathbb{D}^2$$

□

Ο πιο πάνω ομοιομορφισμός γενικεύεται για κάθε $n \geq 2$, δηλαδή

$$\mathbb{D}^n/\sim\,\cong \mathbb{D}^n.$$

4. **Ισχύει το:** $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.
Εδώ ταυτίζουμε τα σημεία του συνόρου του δίσκου $\mathbb{D}^n$ σε ένα, ενώ αφήνουμε τα υπόλοιπα σημεία του ως έχουν. Στο σχήμα 9.7. φαίνεται η περίπτωση, όπου $n = 2$.



Σχήμα 9.7

Απόδειξη: Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}^n$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$, με $f(x) = (2x_1\sqrt{1 - \|x\|^2}, \ldots, 2x_n\sqrt{1 - \|x\|^2}, 2\|x\|^2 - 1)$. Η f είναι καλώς ορισμένη, γιατί

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^{n}(2x_i\sqrt{1-\|x\|^2})^2\Big) + (2\|x\|^2-1)^2 &= 4(1-\|x\|^2)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 4\|x\|^4 - 4\|x\|^2 + 1 \\ &= 4(1-\|x\|^2)\|x\|^2 + 4\|x\|^4 - 4\|x\|^2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Με χρήση της πρότασης (2.1.10) εύκολα αποδεικνύεται η συνέχεια της f.
Η σχέση $\sim$ που εισάγει την ταύτιση των σημείων του $\mathbb{S}^{n-1}$ σε ένα είναι η

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \big(x, y \in \mathbb{B}^n \wedge x = y\big) \vee \big(x, y \in \mathbb{S}^{n-1}\big).$$

Αν $x \sim y$, τότε

- ή $x, y \in \mathbb{B}^n$ και $x = y$, άρα $f(x) = f(y)$.
- ή $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, άρα $f(x) = f(y) = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(y).$$

Αντιστρόφως

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2\|x\|^2 - 1 = 2\|y\|^2 - 1 \wedge 2x_i\sqrt{1 - \|x\|^2} = 2y_i\sqrt{1 - \|y\|^2}$$
$$\forall i = 1, \dots, n.$$

- Αν $\|x\| = \|y\| = 1$, τότε $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, άρα $x \sim y$.
- Αν $\|x\| = \|y\| \neq 1$, τότε $x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, άρα $x = y$, άρα $x \sim y$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x \sim y.$$

Συνεπώς η f είναι συμβατή με τη σχέση $\sim$.
Έστω $z \in \mathbb{S}^n$. Άν το z είναι ο βόρειος πόλος της $\mathbb{S}^n$, τότε $f(x) = z$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Αν $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \neq (0, 0, \dots, 0, 1)$, τότε $0 \leq \frac{1+z_{n+1}}{2} < 1$, άρα, αν $x_i = \frac{z_i}{\sqrt{2-2z_{n+1}}} \quad \forall i = 1, \dots, n$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{2(1 - z_{n+1})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{2(1 - z_{n+1})} = \frac{1 - z_{n+1}^2}{2(1 - z_{n+1})}$$
$$= \frac{(1 - z_{n+1})(1 + z_{n+1})}{2(1 - z_{n+1})} = \frac{1 + z_{n+1}}{2} < 1,$$

άρα $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}^n$ και , εύκολα αποδεικνύεται ότι $f(x) = z$. Επομένως η f είναι επί.
Επιπλέον ο χώρος $\mathbb{D}^n$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{S}^n$ είναι Hausdorff, συνεπώς η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή

$$\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n.$$

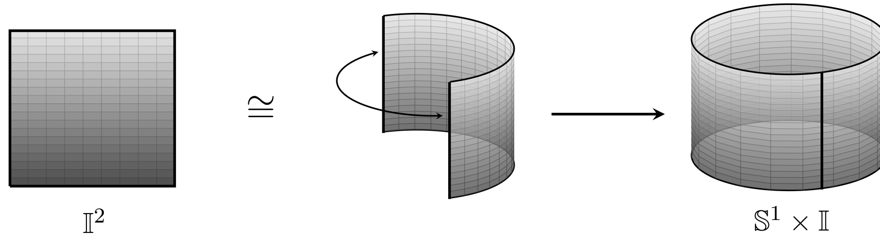
□

Να σημειώσουμε ότι ο παραπάνω ομοιομορφισμός στέλνει τα εσωτερικά σημεία του δίσκου $\mathbb{D}^n$ καλύπτοντας ολόκληρη την σφαίρα $\mathbb{S}^n$ εκτός του βορείου πόλου της και τα σημεία του συνόρου του δίσκου $\mathbb{D}^n$ στον βόρειο πόλο της σφαίρας $\mathbb{S}^n$.

5. **Στο μοναδιαίο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής:**

$$(x, y) \sim (z, w) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (z, w) \vee ((x, z) = (0, 1) \wedge y = w).$$

Τότε ο χώρος πηλίκο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}/\sim$ είναι ομοιόμορφος με τον κύλινδρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$.
Εδώ ταυτίζουμε τα σημεία των κατακόρυφων πλευρών του τετραγώνου με την ίδια τεταγμένη (σχ. 9.8).



Σχήμα 9.8

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εφαρμογή του αποτελέσματος που αποδείχθηκε στην περίπτωση 1. Η απεικόνιση, η οποία επάγει την απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f}$ είναι η $f : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, με $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$. □

6. **Στο μοναδιαίο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής:**

$$(x, y) \sim (z, w) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (z, w) \vee ((x, z) = (0, 1) \wedge y = w) \vee ((y, w) = (0, 1) \wedge x = z).$$

Τότε, ο χώρος πηλίκο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ είναι ομοιόμορφος με τη σπείρα $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
Εδώ ταυτίζουμε τα σημεία των κατακόρυφων πλευρών με την ίδια τεταγμένη και τα σημεία των οριζόντιων πλευρών με την ίδια τετμημένη.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εφαρμογή του αποτελέσματος που αποδείχθηκε στην περίπτωση 1. Η απεικόνιση, η οποία επάγει την απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f}$ είναι η $f : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, με $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. □

7. **Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει: $C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n$.**

Απόδειξη: Η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον χώρο $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I}$, η οποία ορίζει τον χώρο πηλίκο $C\mathbb{S}^{n-1}$ είναι η:

$$(x, t) \sim (y, r) \quad \Leftrightarrow \quad (x, t) = (y, r) \vee (t = r = 1).$$

Η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^n$, με $f(x, t) = (1 - t)x$ είναι συνεχής επί και

$$\begin{aligned} f(x, t) = f(y, r) &\Rightarrow (1 - t)x = (1 - r)y \\ &\Rightarrow \|(1 - t)x\| = \|(1 - r)y\| \\ &\Rightarrow 1 - t = 1 - r \\ &\Rightarrow t = r\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(x, t) = f(y, r) &\Leftrightarrow t = r \wedge (1 - t)x = (1 - r)y \\ &\Leftrightarrow (t = r = 1) \vee (x, t) = (y, r) \\ &\Leftrightarrow (x, t) \sim (y, r)\,, \end{aligned}$$

άρα η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$. Επιπλέον η f είναι συνεχής και επί. Ο χώρος $C\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συμπαγής, ως χώρος πηλίκο του συμπαγούς $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I}$ και ο χώρος $\mathbb{D}^n$ είναι Hausdorff, άρα η επαγόμενη απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : C\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή

$$C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n.$$

□

Πρόταση 9.2.5. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, με $X \cong Y$, $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε $X/A \cong Y/f(A)$.*

Απόδειξη: Στον X έχουμε ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$, της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα μονοσύνολα $\{x\}$ για $x \notin A$ και το A. Στον Y έχουμε ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim'$, της οποίας κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα μονοσύνολα $\{f(x)\}$ για $x \notin A$ και το $f(A)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x = y \vee x, y \in A \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \vee f(x), f(y) \in f(A) \\ &\Leftrightarrow f(x) \sim' f(y)\,. \end{aligned}$$

Αν $pr_2 : Y \to Y/f(A)$ η φυσική προβολή, τότε η απεικόνιση $g = pr_2 \circ f : X \to Y/f(A)$ είναι συνεχής και επί, γιατί η f είναι συνεχής και επί. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Leftrightarrow pr_2(f(x)) = pr_2(f(y)) \\ &\Leftrightarrow f(x) \sim' f(y) \\ &\Leftrightarrow x \sim y\,, \end{aligned}$$

άρα η g είναι συμβατή με τη σχέση $\sim$. Συνεπώς η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{g} : X/A \to Y/f(A)$, με $\overline{g}([x]) = g(x)$ είναι συνεχής, 1-1 και επί.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & \searrow^{g} & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ X/A & \xrightarrow{\ \overline{g}\ } & Y/f(A) \end{array}$$

Αν $pr_1 : X \to X/A$ είναι η φυσική προβολή, ομοίως συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $h = pr_1 \circ f^{-1} : Y \to X/A$ είναι συνεχής 1-1 και επί.
Επιπλέον, αν $x, y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\Leftrightarrow pr_1\big(f^{-1}(x)\big) = pr_1\big(f^{-1}(y)\big) \\ &\Leftrightarrow [f^{-1}(x)] = [f^{-1}(y)] \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x) \sim f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow f\big(f^{-1}(x)\big) \sim' f\big(f^{-1}(y)\big) \\ &\Leftrightarrow x \sim' y, \end{aligned}$$

άρα η h είναι και συμβατή με την σχέση $\sim'$. Συνεπώς η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{h} : Y/f(A) \to X/A$, με $\overline{h}([y]) = h(y)$ είναι συνεχής, 1-1 και επί.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X \\ \big\downarrow pr_2 & \searrow^{h} & \big\downarrow pr_1 \\ Y/f(A) & \xrightarrow{\overline{h}} & X/A \end{array}$$

Τέλος, αν $y = f(x)$, τότε

$$\begin{aligned} \overline{h}([y]) &= h(y) \\ &= pr_1(f^{-1}(f(x))) = pr_1(x) = [x] \\ &\Rightarrow \overline{g}(\overline{h}(([y])) = \overline{g}([x]) = pr_2(f(x)) = pr_2(y) = [y] \\ &\Rightarrow \overline{g} \circ \overline{h} = i_{Y/f(A)} \\ &\Rightarrow \overline{h} = (\overline{g})^{-1}, \end{aligned}$$

άρα και η αντίστροφη της $\overline{g}$ είναι συνεχής, επομένως η $\overline{g}$ είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή $X/A \cong Y/f(A)$. □

Σε εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης έχουμε το ακόλουθο σημαντικό ομοιομορφισμό: Από την πρόταση 7.2.13 είναι γνωστό το ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{I}^n$, ώστε

$$f(\mathrm{Bd}(\mathbb{D}^n)) = f(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n).$$

Συνεπώς

$$\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{I}^n/\mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n).$$

9.3 Ταυτισμικές απεικονίσεις

Οι ταυτισμική απεικόνιση είναι γενίκευση της φυσικής προβολής και είναι μια πού χρήσιμη έννοια, όπως θα δούμε αργότερα στην ομολογία των CW-συμπλεγμάτων.

Ορισμός 9.3.1. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια επί απεικόνιση. Η f, ονομάζεται **ταυτισμική**, αν και μόνον, αν ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία: το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, όταν και μόνον, όταν το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παρατηρήσεις:

1. Ο πιο πάνω ορισμός είναι προφανώς ισοδύναμος με τον ακόλουθο: Έστω $f : X \to Y$ μια επί απεικόνιση. Η f ονομάζεται **ταυτισμική**, αν και μόνον, αν ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία: το U είναι κλειστό υποσύνολο του Y, όταν και μόνον, όταν το $f^{-1}(U)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

2. Αν η f είναι ταυτισμική, τότε προφανώς είναι συνεχής.

Παραδείγματα 9.3.1.

1. Η φυσική προβολή $pr : X \to X/\sim$ είναι μια ταυτισμική απεικόνιση.

2. Αν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής, επί και ανοικτή ή κλειστή, τότε είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. Θα το αποδείξουμε για την περίπτωση που η f είναι ανοικτή: Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε, λόγω της συνέχειας της f το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αντιστρόφως, αν το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε, επειδή η f είναι επί θα έχουμε $U = f\big(f^{-1}(U)\big)$, άρα το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, επειδή η f είναι ανοικτή.

3. Αν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και υπάρχει συνεχής $g : Y \to X$, ώστε $f \circ g = i_Y$, τότε η f είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. Από τη σχέση $f \circ g = i_Y$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι επί. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε, λόγω της συνέχειας της f το $f^{-1}\big(U\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
Αντιστρόφως: έστω $V = f^{-1}\big(U\big)$ ανοικτό υποσύνολο του X, τότε το $g^{-1}\big(V\big)$ είναι, λόγω της συνέχειας της g ανοικτό υποσύνολο του Y, αλλά
$$\begin{aligned} g^{-1}\big(V\big) &= \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big)\big(U\big) \\ &= \big(f \circ g\big)^{-1}\big(U\big) \\ &= i_Y^{-1} = U\,, \end{aligned}$$
άρα το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

Για τις ταυτισμικές απεικονίσεις ισχύει η πρόταση

Πρόταση 9.3.1. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία ταυτισμική απεικόνιση. Ορίζουμε στον X σχέση $\sim$, ως εξής:*
$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$
Τότε

α΄) Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

β΄) $Y \cong X/\sim$.

Απόδειξη: Το α') είναι εύκολο και αφήνεται ως άσκηση.
Για το β') θεωρούμε την απεικόνιση $F : Y \to X/\sim$, ώστε
$$F(y) = [x] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y,$$
δηλαδή το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \big\downarrow{\scriptstyle pr} & \swarrow{\scriptstyle F} & \\ X/\sim & & \end{array} .$$

Έχουμε

i) Αν $y_1, y_2 \in Y$ και $y_1 = y_2$, τότε, υπάρχει $x \in X$, ώστε $f(x) = y_1 = y_2$, άρα $F(y_1) = F(y_2) = [x]$. Επομένως η F είναι καλώς ορισμένη.

ii) Προφανώς η F είναι επί.

iii) Έστωσαν $y_1, y_2 \in Y$ και $F(y_1) = F(y_2) = [x]$, τότε $f(x) = y_1 = y_2$, άρα η F είναι 1-1.

iv) Έχουμε $pr = F \circ f$, άρα $pr^{-1} = f^{-1} \circ F^{-1}$. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$, τότε το $pr^{-1}\big(U\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το $\big(f^{-1} \circ F^{-1}\big)\big(U\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το $f^{-1}\big(F^{-1}\big(U\big)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και, επειδή η f είναι ταυτισμική απεικόνιση το $F^{-1}\big(U\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Επομένως η F είναι συνεχής απεικόνιση.

v) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y. Η F είναι 1-1, άρα $F^{-1}(F(U)) = U$. Έχουμε $pr^{-1}\big(F(U)\big) = f^{-1}\Big(F^{-1}\big(F(U)\big)\Big) = f^{-1}(U)$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το $F(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$. Επομένως η F είναι ανοικτή απεικόνιση, άρα η F είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς $Y \cong X/\sim$. □

Πρόταση 9.3.2. ***(Καθολική ιδιότητα των ταυτισμικών απεικονίσεων)*** *Έστω ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και επί. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Η f είναι ταυτισμική.

β΄) Για όλους τους χώρους Z και για όλες τις απεικονίσεις $g : Y \to Z$ ισχύει η ισοδυναμία: η g είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ η $g \circ f$ είναι συνεχής.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\circ f} & Z \\ & \searrow^{f} & \uparrow g \\ & & Y \end{array}$$

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Αν η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών. Αντιστρόφως, έστω ότι η $g \circ f$ είναι συνεχής και V ένα ανοικτό υποσύνολο του Z. Τότε το $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και, επειδή η f είναι ταυτισμική το $g^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, άρα η g είναι συνεχής.
β') $\Rightarrow$ α'): Θεωρούμε ως Z τον χώρο $X/\sim$, όπως αυτός περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση. Στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είδαμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $F : Y \to X/\sim$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow pr & \swarrow_{F} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

μεταθετικό. Αν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y τότε, επειδή η f είναι συνεχής το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αντιστρόφως, έστω U υποσύνολο του Y, ώστε το $f^{-1}(U)$ να είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή η F είναι ομοιομορφισμός υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του $X/\sim$, ώστε $U = F^{-1}(V)$. Έχουμε $f^{-1}(U) = f^{-1}\big(F^{-1}(V)\big) = pr^{-1}(V)$. Άρα το $pr^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, επομένως το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$ και, επειδή ο F^{-1} είναι ομοιομορφισμός το $F^{-1}(V) = U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, άρα η f είναι ταυτισμική. □

Πρόταση 9.3.3. *Έστω $f : X \to Y$ ταυτισμική απεικόνιση, Z τοπολογικός χώρος και $h : X \to Z$ συνεχής απεικόνιση, η οποία για κάθε $y \in Y$ είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της μορφής $\{f^{-1}(y)\}$. Τότε η $h \circ f^{-1} : Y \to Z$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω ότι $y_1, y_2 \in Y$ με $y_1 = y_2$, τότε, $\{f^{-1}(y_1)\} = \{f^{-1}(y_2)\}$, άρα, από την υπόθεση έχουμε $h(f^{-1}(y_1)) = h(f^{-1}(y_2))$, άρα η $h \circ f^{-1}$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η $h = (h \circ f^{-1}) \circ f$ είναι συνεχής και, επειδή η f είναι ταυτισμική (πρόταση 9.3.2) η $h \circ f^{-1}$ είναι συνεχής. □

Για τα επόμενα είναι απαραίτητη η πρόταση

Πρόταση 9.3.4. *Αν η $f : X \to X'$ είναι ταυτισμική απεικόνιση και ο χώρος Z είναι συμπαγής και Hausdorff, τότε η $f \times 1 : X \times Z \to X' \times Z$, με $\big(f \times 1\big)(x, z) = \big(f(x), z\big)$ είναι επίσης ταυτισμική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Επειδή η $f \times 1$ είναι, προφανώς συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν U' είναι ένα υποσύνολο του $X' \times Z$ τέτοιο, ώστε το $U = \big(f \times 1\big)^{-1}(U')$ να είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$, τότε το U' είναι ανοικτό υποσύνολο του $X' \times Z$. Έστω $(x', z) \in U'$. Αν $f(x) = x'$, τότε $\big(f \times 1\big)(x, z) = (x', z)$ και $(x, z) \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$ υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα V και K των X και Z, αντιστοίχως, ώστε $(x, z) \in V \times K \subseteq U$. Επειδή ο χώρος Z είναι φυσιολογικός (συμπαγής και Hausdorff) υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W του Z, ώστε $z \in W \subseteq \overline{W} \subseteq K$. Το $\overline{W}$ είναι συμπαγές, γιατί είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς Z. Προφανώς $\{x\} \times \overline{W} \subseteq V \times K \subseteq U$. Ορίζουμε $A = \{a \in X \,/\, \{a\} \times \overline{W} \subseteq U\}$. Επειδή $x \in A$ το A είναι μη κενό. Θα αποδείξουμε ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$ για κάθε $w \in \overline{W}$ υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα L_w και N_w των X και Z, αντιστοίχως, ώστε $(a, w) \in L_w \times N_w \subseteq U$. Η οικογένεια N_w, $w \in \overline{W}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $\overline{W}$, άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\overline{W}$, ας πούμε το $\{N_{w_1}, \dots, N_{w_n}\}$. Έχουμε ότι $a \in L = \bigcap_{k=1}^{n} L_{w_k}$ και το L είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επιπλέον $L \times N_{w_k} \subseteq U$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα $L \times \overline{W} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (L \times N_{w_k}) \subseteq V$, άρα $a \in L \subseteq A$, επομένως το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επιπλέον έχουμε

$$b \in A \Rightarrow \{b\} \times \overline{W} \subseteq U = \big(f \times 1\big)^{-1}(U')$$

$$\Leftrightarrow \{f(b)\} \times \overline{W} \subseteq U'.$$

Έτσι $b \in A \Leftrightarrow \{f(b)\} \times \overline{W} \subseteq U'$. Είναι

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(A)) &\Rightarrow f(x) \in f(A) \\ &\Rightarrow \{f(x)\} \times \overline{W} \subset U' \\ &\Rightarrow x \in A, \end{aligned}$$

άρα

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A.$$

Συνεπώς $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Επειδή η f είναι ταυτισμική, έπεται ότι το $f(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X', άρα το $f(A) \times W$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X' \times Z$ και $(x', z) \in f(A) \times W \subseteq U'$, άρα το U' είναι ανοικτό υποσύνολο του $X' \times Z$. □

9.4 Χώροι επικόλλησης

Ασχολούμαστε ιδιαίτερα με τον ορισμό και την μελέτη των χώρων επικόλλησης, επειδή οι περισσότεροι γνωστοί από την γεωμετρία χώροι είναι τέτοιοι.

Πρόταση 9.4.1. *Αν X_i, $i \in I$ είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων ξένων μεταξύ τους, Y τοπολογικός χώρος και $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \to Y$ απεικόνιση, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Η f είναι συνεχής, ως προς την ασθενή τοπολογία του $\bigsqcup_{i \in I} X_i$.

β΄) Η $f/X_i : X_i \to Y$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έστωσαν $i \in I$ και F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε η συνέχεια της f, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, άρα το $f^{-1}(F) \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i. Όμως $f^{-1}(F) \cap X_i = \big(f/X_i\big)^{-1}\big(F\big)$, άρα η f/X_i είναι συνεχής.

β') ⇒ α'): Έστω F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε, από την συνέχεια της f/X_i, συμπεραίνουμε ότι το $\big(f/X_i\big)^{-1}\big(F\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$. Επιπλέον,

$$\big(f/X_i\big)^{-1}\big(F\big) = f^{-1}(F) \cap X_i,$$

άρα το $f^{-1}(F) \cap X_i$ είναι κλειστό υποσύνολο του X_i για κάθε $i \in I$, άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, επομένως η f είναι συνεχής. □

Ορισμός 9.4.1. Έστωσαν X και Y τοπολογικοί χώροι ξένοι μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι ο $X \bigsqcup Y$ εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία, $\varnothing \neq A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Στο σύνολο $X \bigsqcup Y$ ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$, ως εξής

$$\begin{aligned} x \sim y \Leftrightarrow\ & x, y \in X \sqcup Y \wedge x = y \\ & \vee\, x \in A,\, y \in f(A) \wedge f(x) = y. \end{aligned}$$

Ο χώρος πηλίκο $X \bigsqcup Y / \sim$ ονομάζεται **επικόλληση του** X **στον** Y **μέσω της** f και συμβολίζεται με $X \bigsqcup_f Y$. Η δε f ονομάζεται **απεικόνιση επικόλλησης**.

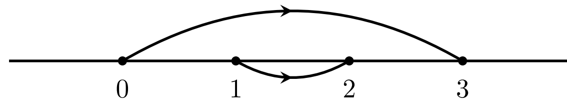
Παρατήρηση: Η φυσική προβολή $pr : X \bigsqcup Y \to X \bigsqcup_f Y$ είναι η απεικόνιση με

$$pr(x) = \begin{cases} [x] = \{x\}, & x \in (X \setminus A) \cup (Y \setminus f(A)) \\ [x] = \{x\} \cup \{f^{-1}(x)\}, & x \in f(A) \end{cases}.$$

Ιδιαίτερη αξία, λόγω των προσθέτων ιδιοτήτων της έχει η περίπτωση, όπου το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. Για τον λόγο αυτόν εφεξής, ακόμη και όταν αυτό παραλείπεται θα θεωρούμε ότι το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X.

Παραδείγματα 9.4.1.

1. Αν $X = [0,1]$, $Y = [2,3]$, $A = \{0,1\}$ και $f : A \to Y$, με $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, τότε ο χώρος $X \bigsqcup_f Y$ είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^1$.



Σχήμα 9.9

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $g : X \bigsqcup Y \to \mathbb{S}^1$, με

$$g(x) = \begin{cases} e^{\pi i x} & x \in X \\ e^{\pi i (x-1)} & x \in Y \end{cases}.$$

Η g είναι συνεχής και επί. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Leftrightarrow x = y \vee (x = 0 \wedge y = 3) \vee (x = 1 \wedge y = 2) \\ &\Leftrightarrow x \sim y\,, \end{aligned}$$

άρα η g είναι συμβατή με τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, η οποία ορίζει την επικόλληση του X στον Y, μέσω της απεικόνισης επικόλλησης f.

$$\begin{array}{ccc} X \bigsqcup Y & \xrightarrow{\;g\;} & \mathbb{S}^1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle pr} & \nearrow{\scriptstyle \overline{g}} & \\ X \bigsqcup_f Y & & \end{array}.$$

Επιπλέον, ο $X \bigsqcup Y$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{S}^1$ είναι Hausdorff, επομένως η $\overline{g}$ είναι ομοιομορφισμός, άρα

$$X \bigsqcup_f Y \cong \mathbb{S}^1.$$

□

2. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $g : \big(\mathbb{S}^{n-1}\times\{1\}\big) \to \big(\mathbb{D}^n\times\{2\}\big)$, ώστε $g(x,1) = (x,2)$, τότε $\big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup_g \big(\mathbb{D}^n \times \{2\}\big) \cong \mathbb{S}^n$.

Απόδειξη: Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας στον χώρο $\big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup \big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big)$, που δίνει τον χώρο πηλίκο $\big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup_g \big(\mathbb{D}^n \times \{2\}\big)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup \big(\mathbb{D}^n \times \{2\}\big) \to \mathbb{S}^n$, με

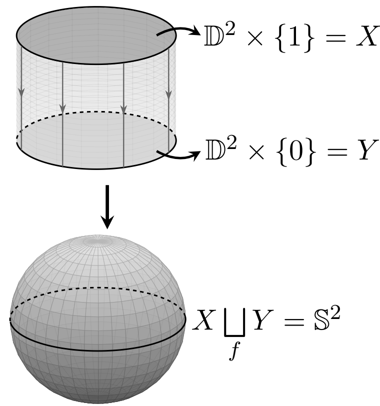
$$F(x_1,\ldots,x_n,k) = \begin{cases} \left(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\right), & k = 1 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 1 \\ (x_1,\ldots,x_n,2) & k = 1 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \\ \left(x_1,\ldots,x_n,-\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\right), & k = 2 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 1 \end{cases},$$

Για την οποία ισχύει

$$\begin{aligned} &F(x_1,\ldots,x_n,k) = F(y_1,\ldots,y_n,k') \\ &\Leftrightarrow \big(k = k' \wedge x_i = y_i \quad \forall i = 1,\ldots,n\big) \vee \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x,k),\ (y,k') \in \big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup \big(\mathbb{D}^n \times \{2\}\big) \wedge (x,k) = (y,k') \\ &\vee (x,1) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\},\ (y,1) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \{2\} \wedge g(x,1) = (y,2) \\ &\Leftrightarrow (x_1,\ldots,x_n,k) \sim (y_1,\ldots,y_n,k'), \end{aligned}$$

άρα η f είναι επί και συμβατή με τη σχέση $\sim$. Η συνέχεια της F αποδεικνύεται με την πρόταση 2.1.10. Επιπλέον ο χώρος $\big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup \big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big)$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{S}^n$ είναι Hausdorff, άρα η επαγόμενη από την F απεικόνιση μεταφοράς είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή $\big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \bigsqcup_g \big(\mathbb{D}^n \times \{1\}\big) \cong \mathbb{S}^n$.

3. Έστω X τοπολογικός χώρος. Τον χώρο πηλίκο $X \times (-\mathbb{I})/X \times \{-1\}$ συμβολίζουμε με $C'X$. Προφανώς $C'X \cong CX$.



Σχήμα 9.10

Θεωρούμε το υποσύνολο $A = \{[(x,t)] \in CX \,/\, t = 0\}$ του CX. Έχουμε $pr^{-1}(A) = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Το $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, επομένως το A είναι κλειστό υποσύνολο του CX. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : A \to C'X$, με $f\big([x,0]\big) = \big([x,0]\big)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $g : CX \bigsqcup_f C'X \to SX$ είναι ομοιομορφισμός, άρα $CX \bigsqcup_f C'X \cong SX$.

Πρόταση 9.4.2. *Αν X, Y συμπαγείς χώροι Hausdorff, με $X \cap Y = \varnothing$, A κλειστό υποσύνολο του X και $f : A \to Y$ συνεχής, τότε ο $X \bigsqcup_f Y$ είναι συμπαγής και Hausdorff.*

Απόδειξη: Χάριν ευκολίας ονομάζουμε Z τον χώρο $X \sqcup Y$. Ονομάζουμε D το διαγώνιο σύνολο του Z, δηλαδή $D = \{(x,x)/x \in Z\}$ και E το σύνολο $\{(f^{-1}(y), y)/y \in f(A)\}$. Σύμφωνα με την πρόταση 9.1.7, επειδή ο χώρος Z είναι συμπαγής και Hausdorff, για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί το σύνολο $G_\sim = \{(x,y)/x \sim y\}$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που ορίζει τον χώρο πηλίκο $X \bigsqcup_f Y$ να είναι κλειστό υποσύνολο του $Z \times Z$. Έχουμε ότι $G_\sim = D \cup E$. Επειδή ο χώρος Z είναι Hausdorff το D είναι κλειστό υποσύνολο του $Z \times Z$ (πρόταση 3.3.3). Για να δείξουμε την κλειστότητα του E θεωρούμε την απεικόνιση $f \times 1 : A \times f(A) \to f(A) \times f(A)$, με $(f \times 1)(x,y) = (f(x), y)$, η οποία προφανώς είναι συνεχής. Το $E = (f \times 1)^{-1}(f(A) \times f(A))$ είναι κλειστό υποσύνολο του $A \times f(A)$. Το $A \times f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Z \times Z$, γιατί τα A και $f(A)$ είναι κλειστά υποσύνολα του Z, άρα το E είναι κλειστό υποσύνολο του $Z \times Z$, επομένως το $G_\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Z \times Z$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 9.4.3. *Αν τα X, Y, A και f είναι όπως στην πρόταση 9.4.2. Επιπλέον, Z είναι χώρος Hausdorff και $h : X \bigsqcup Y \to Z$ συνεχής επί απεικόνιση και συμβατή με την σχέση ισοδυναμίας $\sim$, που ορίζει τον χώρο πηλίκο $X \bigsqcup_f Y$, τότε η απεικόνιση $F : X \bigsqcup_f Y \to Z$, με $F\big([x]\big) = h(x)$*

$$\begin{array}{ccc} X \bigsqcup Y & \xrightarrow{h} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle pr} & \nearrow{\scriptstyle F} & \\ X \bigsqcup_f Y & & \end{array}$$

είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη: Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την πρόταση 9.2.3, επειδή ο χώρος $X \bigsqcup_f Y$ είναι συμπαγής και ο χώρος Z είναι Hausdorff. □

Ορισμός 9.4.2. Έστω X_i, $i \in I$ οικογένεια ξένων μεταξύ τους τοπολογικών χώρων. Επιλέγουμε από κάθε έναν χώρο X_i ένα σημείο x_i και δημιουργούμε το σύνολο $A = \{x_i / i \in I\}$. Στον τοπολογικό χώρο $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, με την ασθενή τοπολογία, ο χώρος πηλίκο X/A ονομάζεται **σφηνοειδές άθροισμα** της οικογένειας X_i, $i \in I$ και συμβολίζεται με $\bigvee_{i \in I} X_i$. Το σημείο $[x_i]$ του χώρου πηλίκο ονομάζουμε βασικό σημείο του σφηνοειδούς αθροίσματος.
Με απλά λόγια το σφηνοειδές άθροισμα είναι ο χώρος πηλίκο στην ξένη ένωση X, όπου ταυτίζουμε σε ένα τα σημεία x_i και αφήνουμε τα υπόλοιπα ως έχουν. Η σχέση ισοδυναμίας που περιγράφει τον παραπάνω χώρο πηλίκο είναι η:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \vee \quad x, y \in A.$$

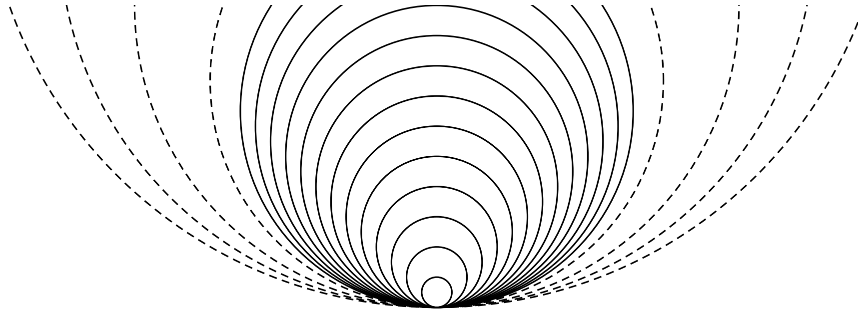
Παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση που $n = 2$ γράφουμε $X_1 \bigvee X_2$.
2. Αν $X_1 = X \times \{1\}, X_2 = X \times \{2\}, \ldots, X_n = X \times \{n\}$, τότε το σφηνοειδές άθροισμα $\bigvee_{i=1}^{n} X_i$ γράφουμε $\bigvee_{i=1}^{n} X$.

Παραδείγματα 9.4.2.

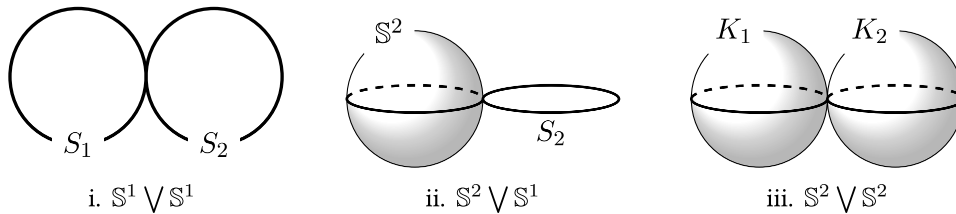
1. Είναι $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1 \cong S_1 \bigcup S_2$ (σχήμα 9.12 i), όπου $S_1 = \{-1 + \cos t + i \sin t \,/\, t \in [0, 2\pi)\}$, $S_2 = \{1 + \cos t + i \sin t \,/\, t \in [0, 2\pi)\}\}$ και το $S_1 \cup S_2$ έχει την Ευκλείδεια τοπολογία που επάγεται από τον $\mathbb{R}^2$.
   Το σφηνοειδές άθροισμα $\bigvee_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1$ είναι ομοιόμορφο με το σύνολο $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, όπου $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + (y - \frac{1}{i})^2 = \frac{1}{i^2}\}$, το οποίο έχει την επαγόμενη από τον $\mathbb{R}^2$ Ευκλείδεια τοπολογία.
   Πρέπει να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση που οι κύκλοι $\mathbb{S}^1 \cong S_k$ είναι άπειροι, τότε το σφηνοειδές άθροισμα $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^1$ δεν είναι ομοιόμορφο με τον υπόχωρο $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$, όπου C_n είναι οι κύκλοι $x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ (**χαβανέζικο σκουλαρίκι**).

   Πράγματι, αν υπήρχε ομοιομορφισμός $F : \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^1 \to \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ και x το βασικό σημείο του σφηνοειδούς αθροίσματος, τότε $F(x) = F\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{(0, 0)\}$.
   Από κάθε S_k επιλέγουμε ένα σημείο $y_k \neq x$. Τότε το σύνολο $G = \{y_k / k \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^1$, ως προς την ασθενή τοπολογία, γιατί το $G \cap S_k = \{y_k\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $S_k \cong \mathbb{S}^1$. Σε αντίθεση με το $F(G) = \{F(y_k) / k \in \mathbb{N}\}$, το οποίο δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, γιατί το $(0, 0)$ είναι οριακό σημείο του $F(G)$, αλλά δεν ανήκει στο $F(G)$.



Σχήμα 9.11. Χαβανέζικο σκουλαρίκι

2. Είναι $\mathbb{S}^2 \bigvee \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2 \bigcup S_2$ (σχήμα 9.12 ii).
3. Είναι $\mathbb{S}^2 \bigvee \mathbb{S}^2 \cong K_1 \bigcup K_2$ (σχήμα 9.12 iii).



Σχήμα 9.12

9.5 Προβολικοί χώροι

Αν $\mathbb{K}$ είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο $P\mathbb{K}^n$, τον οποίο ονομάζουμε n-οστό $\mathbb{K}$- προβολικό χώρο. Οι δακτύλιοι διαίρεσης που χρησιμοποιούνται είναι τα σώματα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ και το στρεβλό σώμα $\mathbb{H}$ των κουατερνίων. Εδώ θα εξετάσουμε μόνον τις δύο πρώτες περιπτώσεις.

Ορισμός 9.5.1. Στον χώρο $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$, ως εξής: $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{S}^n / \sim$ ονομάζεται **n-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος** και συμβολίζεται με $P\mathbb{R}^n$. Ο $P\mathbb{R}^1$ ονομάζεται **προβολική ευθεία** και ο $P\mathbb{R}^2$ **προβολικό επίπεδο**. Την εικόνα του $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n$, μέσω της pr συμβολίζουμε με $[x_1; x_2; \cdots ; x_n]$.

Παρατήρηση: Ευθεία στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ που διέρχεται από την αρχή είναι το σύνολο $\varepsilon_{x_0} = \{\lambda x_0 \,/\, \lambda \in \mathbb{R} \wedge x_0 \in \mathbb{S}^n\}$. Είναι προφανές ότι η ε_{x_0} ταυτίζεται με την ε_{-x_0}. Στο σύνολο $\mathcal{A}$ των ευθειών του $\mathbb{R}^{n+1}$ που διέρχονται από την αρχή, αποδεικνύεται εύκολα, ότι μπορούμε να ορίσουμε μια τοπολογία, της οποίας ανοικτά σύνολα είναι το κενό και κάθε υποσύνολο U του $\mathcal{A}$, για το οποίο, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{S}^n$, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία

$$\varepsilon_x \in U \quad \Leftrightarrow \quad x \in V.$$

Μία βάση της τοπολογίας αυτής έχει ως στοιχεία τα σύνολα των ευθειών που διέρχονται από την αρχή και βρίσκονται στο εσωτερικό ενός διπλού κώνου, ο οποίος εφάπτεται σε μία σφαίρα $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \|x - x_0\| = a\}$, όπου $x_0 \neq \mathbf{0}$ και $a > 0$.
Άμεση συνέπεια του ορισμού του τοπολογικού χώρου $\mathcal{A}$ είναι ότι η απεικόνιση $F : P\mathbb{R}^n \to \mathcal{A}$, με $F\big([x]\big) = \varepsilon_x$ είναι ομοιομορφισμός, επομένως

$$\mathcal{A} \cong P\mathbb{R}^n.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ο εξής ισοδύναμος ορισμός του n-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου:
Στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ορίζουμε την σχέση $\sim$, ως εξής:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\, y = \lambda x.$$

Πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Άμεση συνέπεια των ανωτέρω είναι το ότι ο χώρος $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\mathcal{A}$, με την τοπολογία που περιγράψαμε πιο πάνω, ο οποίος με τη σειρά του είναι ομοιόμορφος με τον $P\mathbb{R}^n$. Άρα ισοδύναμα ο $P\mathbb{R}^n$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$.

Πρόταση 9.5.1. *Ο χώρος $P\mathbb{R}^n$ είναι Hausdorff.*

Απόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{S}^n$ είναι συμπαγής και, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι Hausdorff. Επομένως, για το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι κλειστή (πρόταση 9.1.7), δηλαδή το σύνολο $G_\sim = \big\{(x, y) \in \mathbb{S}^n \,/\, x \sim y\big\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.
Αν (x_0, y_0) είναι ένα οριακό σημείο του $G_\sim$, τότε υπάρχει ακολουθία (x_n, y_n) σημείων του $G_\sim$, ώστε $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Επειδή το $\mathbb{S}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$. Επομένως

$$\begin{aligned}(x_n, y_n) \in G_\sim &\Rightarrow x_n = \pm y_n \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \pm \lim_{n\to\infty} y_n \\ &\Rightarrow x_0 = \pm y_0 \\ &\Rightarrow (x_0, y_0) \in G_\sim,\end{aligned}$$

άρα το $G_\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.

Πρόταση 9.5.2. *Ο χώρος $P\mathbb{R}^n$ είναι 2ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη:

- Βήμα 1ο: Αν το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, τότε το $-U = \{-x \,/\, x \in U\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $f(x) = -x$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι ομοιομορφισμός. Άρα, αν το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, τότε το $f(U) = -U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$.

- Βήμα 2ο: Η φυσική προβολή $pr : \mathbb{S}^n \to P\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτή απεικόνιση. Πράγματι, έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, τότε

$$pr^{-1}\big(pr(U)\big) = U \cup (-U).$$

Από το προηγηθέν βήμα έχουμε ότι το $U \cup (-U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, άρα το $pr(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$, επομένως η pr είναι ανοικτή απεικόνιση.

- Βήμα 3ο: Ο $\mathbb{S}^n$, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι 2ος αριθμήσιμος, άρα έχει μια αριθμήσιμη βάση, την $\mathcal{B} = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$. Έστω U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$, τότε το $pr^{-1}(U) = V$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$. Επειδή η pr είναι επί έχουμε $U = pr\big(pr^{-1}(U)\big) = pr(V)$. Επιπλέον $V = \bigcup_{k\in K} V_k$, όπου $K \subseteq \mathbb{N}$, άρα $U = \bigcup_{k\in K} pr(V_k)$, συνεπώς, επειδή τα $pr(V_k)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $P\mathbb{R}^n$, το $\mathcal{B}' = \{pr(V_1), pr(V_2), ..., pr(V_n), ...\}$ είναι μια βάση του $P\mathbb{R}^n$. Επομένως ο $P\mathbb{R}^n$ είναι 2ος αριθμήσιμος.

□

Μια άλλη περίπτωση προβολικών χώρων είναι ο n- **διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος**, ο οποίος ορίζεται ως χώρος πηλίκο στην **μιγαδική** n**-διάστατη μοναδιαία σφαίρα** $\mathsf{S}^n = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \,/\, \|z\| = 1\}$. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $z = (z_0, \ldots, z_n)$, τότε $\|z\| = \big[\sum_{k=0}^{n} (\Re z_k)^2 + \sum_{k=0}^{n} (\Im z_k)^2\big]^{\frac{1}{2}} = \big[\sum_{k=0}^{n} z_k \overline{z}_k\big]^{\frac{1}{2}}$. Αν υποθέσουμε ότι $z_i = x_i + iy_i$, όπου $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, τότε η απεικόνιση $\phi : \mathsf{S}^n \to \mathbb{S}^{2n+1}$, με $\phi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n)$ είναι ομοιομορφισμός, επομένως μπορούμε να ταυτίζουμε την σφαίρα S^n με τη σφαίρα $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Ορισμός 9.5.2. Στην μιγαδική μοναδιαία σφαίρα S^n ορίζουμε τη σχέση $\sim$, ως εξής: $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim w = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{S}^1; z_i = \lambda w_i \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n$, όπου ο πολλαπλασιασμός επί λ είναι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, θεωρώντας ότι η $\mathbb{S}^1$ είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Ο χώρος πηλίκο $\mathsf{S}^n/\sim$, ονομάζεται n**-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος** και συμβολίζεται με $P\mathbb{C}^n$. Την εικόνα του $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathsf{S}^n$, μέσω της pr συμβολίζουμε με $[z_0; z_1; \cdots; z_n]$.

Παρατήρηση: Με τρόπο ανάλογο του χώρου $P\mathbb{R}^n$, που είδαμε στην αμέσως προηγούμενη παρατήρηση, μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμα τον χώρο $P\mathbb{C}^n$, ως χώρο πηλίκο στον $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ από τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, για την οποία $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*; z_i = \lambda w_i \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n$. Και σ' αυτήν την περίπτωση την εικόνα του $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ μέσω της φυσικής προβολής θα συμβολίζουμε με $[z_0; z_1; \cdots; z_n]$. Εννοείται πως στην πράξη θα χρησιμοποιούμε όποιον από τους δύο ισοδύναμους ορισμούς μας βολεύει.

Πρόταση 9.5.3. *Ο χώρος* $P\mathbb{C}^n$ *είναι Hausdorff.*

Απόδειξη: Ο χώρος S^n είναι συμπαγής και, ως ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^{2n+1}$ είναι Hausdorff. Επομένως, για το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι κλειστή (πρόταση 9.1.7), δηλαδή το σύνολο $G_\sim = \{(x, y) \in \mathsf{S}^n \,/\, x \sim y\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{S}^n \times \mathsf{S}^n$. Αν (z_0, w_0) είναι ένα οριακό σημείο του $G_\sim$, τότε, υπάρχει ακολουθία (z_n, w_n) σημείων του $G_\sim$, ώστε

$$(z_n, w_n) \to (z_0, w_0) \tag{9.1}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Το $z_n \sim w_n$ σημαίνει ότι υπάρχει $\lambda_n \in \mathbb{S}^1$, ώστε $z_n = \lambda_n w_n$. Ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγής, άρα η ακολουθία λ_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ας πούμε την λ_{n_k}. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{n_k} = \lambda \in \mathbb{S}^1$. Τότε η (9.1) δίνει

$$
\begin{aligned}
(z_{n_k}, w_{n_k}) \in G_\sim &\Rightarrow z_{n_k} = \lambda_{n_k} w_{n_k} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{n_k} \lim_{n\to\infty} w_{n_k} \\
&\Rightarrow z_0 = \lambda w_0 \\
&\Rightarrow (z_0, w_0) \in G_\sim,
\end{aligned}
$$

άρα το $G_\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n$.

Πρόταση 9.5.4. *Ο χώρος $P\mathbb{C}^n$ είναι 2ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη:

- Βήμα 1ο: Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$. Αν $\lambda \in \mathbb{S}^1$, τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, με $f(z) = \lambda z$ είναι ομοιομορφισμός, άρα το λU είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$.

- Βήμα 2ο: Η φυσική προβολή $pr : \mathbb{S}^n \to P\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτή απεικόνιση. Πράγματι, αν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, τότε $pr^{-1}\big(pr(U)\big) = \bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{S}^1} \lambda U$. Από το προηγηθέν βήμα έχουμε ότι το $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbb{S}^1} \lambda U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$, άρα το $pr(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{C}^n$, επομένως η pr είναι ανοικτή απεικόνιση.

- Βήμα 3ο: Ο $\mathbf{S}^n$, ως υπόχωρος του $\mathbb{C}^{n+1}$ είναι 2ος αριθμήσιμος, άρα έχει μια αριθμήσιμη βάση, την $\mathcal{B} = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$. Έστω U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{C}^n$, τότε το $pr^{-1}(U) = V$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$. Επειδή η pr είναι επί έχουμε $U = pr\big(pr^{-1}(U)\big) = pr(V)$. Επιπλέον $V = \bigcup\limits_{k\in K} V_k$, όπου $K \subseteq \mathbb{N}$, άρα $U = \bigcup\limits_{k\in K} pr(V_k)$, συνεπώς, επειδή τα $pr(V_k)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $P\mathbb{C}^n$, το $\mathcal{B}' = \{pr(V_1), pr(V_2), \ldots, pr(V_n), \ldots\}$ είναι μια βάση του $P\mathbb{C}^n$. Επομένως ο $P\mathbb{C}^n$ είναι 2ος αριθμήσιμος.

□

Παρατήρηση: Οι χώροι $P\mathbb{R}^n$ και $P\mathbb{C}^n$ είναι, προφανώς συμπαγείς, ως εικόνες των συμπαγών $\mathbb{S}^n$ και $\mathbf{S}^n$, αντιστοίχως, μέσω της συνεχούς απεικόνισης της φυσικής προβολής.

9.6 Τροχιακοί χώροι

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε έναν νέο, εξαιρετικά ενδιαφέροντα τρόπο κατασκευής χώρων πηλίκου. Ο τρόπος αυτός στηρίζεται στην έννοια της δράσης μιας ομάδας επί ενός

τοπολογικού χώρου. Για τον λόγο αυτό αρχίζουμε την πραγμάτευσή μας με τον ορισμό και τα βασικά για τις τοπολογικές ομάδες. Τοπολογική ομάδα είναι η σύζευξη στο ίδιο σύνολο μιας τοπολογικής δομής με μία δομή ομάδας, όπως φαίνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.6.1. Έστω G τοπολογικός χώρος, ο οποίος είναι και ομάδα με την πράξη $\bullet$. Ο G λέγεται **τοπολογική ομάδα**, αν και μόνον, αν οι απεικονίσεις $M : G \times G \to G$, με

$$M(x, y) = x \bullet y$$

και $I : G \to G$, με

$$I(x) = x^{-1} ,$$

όπου το x^{-1} είναι το αντίστροφο του x στην G, είναι συνεχείς, θεωρώντας ότι το $G \times G$ είναι εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία.

Παραδείγματα 9.6.1.

1. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ με τη διακριτή τοπολογία και την πράξη της πρόσθεσης είναι μία τοπολογική ομάδα. Πράγματι, οι απεικονίσεις M και I είναι προφανώς συνεχείς, επειδή οι χώροι $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}$, αντιστοίχως, είναι διακριτοί. Γενικά η οποιαδήποτε ομάδα, εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία είναι τοπολογική ομάδα.

2. Ο κύκλος $\mathbb{S}^1$, με την τοπολογία που επάγεται σε αυτόν από το $\mathbb{C}$ και πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών είναι μια τοπολογική ομάδα. Πράγματι, έστω (x_n, y_n) μια οποιαδήποτε ακολουθία στον $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, με $(x_n,\, y_n) \to (x,\, y)$, τότε $M(x_n, y_n) = x_n y_n \to xy = M(x, y)$, άρα η M είναι συνεχής. Επίσης, αν $x_n \to x$, τότε $I(x_n) = x_n^{-1} \to x^{-1} = I(x)$, άρα και η I είναι συνεχής. Επομένως ο $\mathbb{S}^1$ με τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών είναι τοπολογική ομάδα.

3. Έστω $GL(\mathbb{R}, n)$ το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς με την Ευκλείδεια τοπολογία. Το $GL(\mathbb{R}, n)$, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, είναι τοπολογική ομάδα.
   Πράγματι, έστωσαν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο στοιχεία του $GL(\mathbb{R}, n)$, τότε $M(A, B)$ είναι ο πίνακας AB. Η $p_{ij} \circ M : X \times X \to \mathbb{R}$, με $p_{ij}(M(AB)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, όπου p_{ij} είναι η ij-προβολή του $GL(\mathbb{R}, n)$ στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής για όλους τους δείκτες i, j, ως πολυώνυμο. Επομένως η M είναι συνεχής. Επειδή το ij- στοιχείο c_{ij} του προσαρτημένου πίνακα $adj(A)$ του $n \times n$ πίνακα A είναι πολυώνυμο, η απεικόνιση $p_{ij} \circ I : X \to \mathbb{R}$, με $(p_{ij} \circ I)(A) = \frac{1}{\det A} c_{ij}$ είναι συνεχής για κάθε ζεύγος δεικτών ij. Επομένως η και η I είναι συνεχής. Άρα η $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι τοπολογική ομάδα.

4. Το σύνολο $O(\mathbb{R}, n)$ των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων, ως υπόχωρος του $GL(\mathbb{R}, n)$ και ως υποομάδα της $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι τοπολογική ομάδα.

5. Το σύνολο $SO(\mathbb{R}, n)$ των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων, ως υπόχωρος του $GL(\mathbb{R}, n)$ και ως υποομάδα της $GL(\mathbb{R}, n)$ είναι τοπολογική ομάδα.

Αν G μια τοπολογική ομάδα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $L_x : G \to G$, με

$$L_x(g) = x \bullet g,$$

είναι ένας ομοιομορφισμός, τον οποίον ονομάζουμε **αριστερή μεταφορά κατά** x. Τον ομοιομορφισμό $R_x : G \to G$, με

$$R_x(g) = g \bullet x,$$

ονομάζουμε **δεξιά μεταφορά κατά** x.

Ορισμός 9.6.2. Έστω G ομάδα, X ένας τοπολογικός χώρος και $Homeo(X)$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X στον εαυτό του, με την πράξη της σύνθεσης των απεικονίσεων. **Δράση της ομάδας G επί του χώρου X** ονομάζεται κάθε κάθε ομομορφισμός $F : G \to Homeo(X)$.

Παρατήρηση: Αν F είναι μια δράση της ομάδας G επί του χώρου X και $g \in G$, τότε τον ομοιομορφισμό $F(g)$, για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε με F_g. Άμεση συνέπεια του ορισμού της δράσης είναι τα

- Για κάθε δράση F και για κάθε $g_1, g_2 \in G$ ισχύει $F_{g_1 g_2} = F_{g_1} \circ F_{g_2}$
- Αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G, τότε $F_e = i_X$.

Παραδείγματα 9.6.2.

1. Ο ομομορφισμός $F : \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{R})$, όπου $F(n) = F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F_n(x) = x + n$ είναι μια δράση της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$ επί του χώρου $\mathbb{R}$.
2. Ο ομομορφισμός $F : \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{R}^2)$, όπου $F(m) = F_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $F_m(x, y) = (x + m, y)$ είναι μια δράση της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$ επί του χώρου $\mathbb{R}^2$.
3. Ο ομομορφισμός $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to Homeo(\mathbb{R}^2)$, όπου $F(m, n) = F_{mn} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $F_{mn}(x, y) = (x + m, y + n)$ είναι μια δράση της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ επί του χώρου $\mathbb{R}^2$.
4. Ο ομομορφισμός $F : \mathbb{Z}_2 \to Homeo(\mathbb{S}^n)$, όπου $F(g) = F_g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}^n$, με $f_g(x) = gx$ είναι μια δράση της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ επί του χώρου $\mathbb{S}^n$.
5. Ο ομομορφισμός $F : SO(\mathbb{R}, 2) \to Homeo(\mathbb{S}^2)$, όπου $F(\theta) = F_\theta : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ με $F_\theta(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (x, y)^t + (0, 0, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$ είναι μια δράση της ομάδας $SO(\mathbb{R}, 2)$ επί του χώρου $\mathbb{S}^2$.
6. Ο ομομορφισμός $F : O(\mathbb{R}, n) \to Homeo(\mathbb{S}^{n-1})$, όπου $F(A) = F_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $F_A(x) = Ax^t$ είναι μια δράση της ομάδας $O(\mathbb{R}, n)$ στον χώρο $\mathbb{S}^{n-1}$.

Ορισμός 9.6.3. Η δράση F της ομάδας G στον χώρο X ονομάζεται **ελεύθερη**, αν και μόνον, αν το μοναδικό στοιχείο $g \in G$, για το οποίο υπάρχει $x \in X$, ώστε $F_g(x) = x$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της G ή αλλιώς: $g \in G \setminus \{e\}, x \in X \Rightarrow F_g(x) \neq x$. Αν υπάρχει δράση της ομάδας G επί του χώρου X, η οποία είναι ελεύθερη, τότε λέμε ότι η G **δρα ελεύθερα** επί του χώρου X.

Ορισμός 9.6.4. Η δράση F της ομάδας G στον χώρο X ονομάζεται **μεταβατική**, αν και μόνον, αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $g \in G$, ώστε $y = F_g(x)$.

Παραδείγματα 9.6.3.

1. Οι δράσεις των ομάδων που περιγράφονται στα τέσσερα πρώτα από τα παραδείγματα 9.6.2 είναι ελεύθερες.

2. Η δράση F της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$ στον χώρο $\mathbb{S}^1$, με $F_a : \mathbb{R} \to Homeo(\mathbb{S}^1)$, όπου $F(a) = F_a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $F_a(x) = e^{ia}x$ δεν είναι ελεύθερη, γιατί $F_{2\pi}(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$.

3. Η δράση της ομάδας $O(\mathbb{R}, 3)$ επί του χώρου $\mathbb{R}^3$ δεν είναι μεταβατική. Αν $a = (1, 0, 0)$ και $b = (1, 1, 1)$ δεν υπάρχει $A \in O(\mathbb{R}, 3)$, ώστε $Aa^t = b^t$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα ήταν
$$\begin{aligned} 1 = \|a^t\| &= \|Aa^t\| \\ &= \|b^t\| \\ &= \sqrt{3}, \end{aligned}$$
άτοπο.

4. Σε αντίθεση με το πιο πάνω παράδειγμα να αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα γνωστό από την γραμμικά άλγεβρα. Η δράση της ομάδας $O(\mathbb{R}, n)$ επί της σφαίρας $\mathbb{S}^{n-1}$, $n > 1$ είναι μεταβατική.

Ορισμός 9.6.5. Έστω F μια δράση της ομάδας G επί του χώρου X. Το υποσύνολο $O(x) = \{F_g(x)/g \in G\}$ του X ονομάζεται **τροχιά** του x.

Έστω F μία δράση της ομάδας G επί του χώρου X. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση $\sim$, με
$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G; y = F_g(x)$$
είναι μία σχέση ισοδυναμίας στον X με κλάσεις ισοδυναμίας τις τροχιές των στοιχείων του X. Επομένως για τις τροχιές $O(x)$ και $O(y)$ θα ισχύει ένα ακριβώς εκ των $O(x) = O(y)$ ή $O(x) \cap O(y) = \varnothing$. Στην περίπτωση που η δράση της ομάδας είναι μεταβατική ο χώρος έχει μία και μόνον τροχιά.

Ορισμός 9.6.6. Έστω F μια δράση της ομάδας G επί του χώρου X. Ο χώρος πηλίκο $X/\sim$, όπου $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε πιο πάνω ονομάζεται **τροχιακός χώρος** που ορίζει στον X η ομάδα G με τη δράση F και συμβολίζεται με X/G. Κατ' ουσίαν ο τροχιακός χώρος προκύπτει από την ταύτιση όλων των στοιχείων κάθε τροχιάς σε ένα σημείο.

Παραδείγματα 9.6.4.

1. Στο πρώτο από τα παραδείγματα 9.6.2. η σχέση ισοδυναμίας, η οποία εισάγεται από την δράση της ομάδας $\mathbb{Z}$ που περιγράψαμε είναι η

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\mathbb{R}/\sim \cong \mathbb{S}^1$, άρα ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^1$.

2. Στο δεύτερο από τα παραδείγματα 9.6.2. η σχέση ισοδυναμίας, η οποία εισάγεται από την δράση της ομάδας $\mathbb{Z}$ που περιγράψαμε είναι η

$$(x, y) \sim (z, w) \quad \Leftrightarrow \quad x - z \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y = w.$$

Αφήνεται ως άσκηση η απόδειξη του ότι ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ είναι ομοιόμορφος με τον άπειρο κύλινδρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

3. Στο τρίτο από τα παραδείγματα 9.6.2. η σχέση ισοδυναμίας, η οποία εισάγεται από την δράση της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ που περιγράψαμε είναι η

$$(x, y) \sim (z, w) \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y - w \in \mathbb{Z}.$$

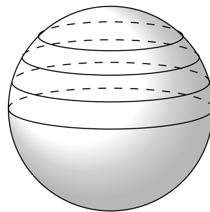
Αφήνεται ως άσκηση η απόδειξη του ότι ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι ομοιόμορφος με την σπείρα $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

4. Στο τέταρτο από τα παραδείγματα 9.6.2 η σχέση ισοδυναμίας, η οποία εισάγεται από την δράση της ομάδας $\mathbb{Z}_2$ που περιγράψαμε είναι η

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y.$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\mathbb{S}^2/\sim \cong P\mathbb{R}^2$, άρα ο τροχιακός χώρος $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ είναι ομοιόμορφος με τον $P\mathbb{R}^2$.

5. Στο πέμπτο από τα παραδείγματα 9.6.2. τροχιές είναι οι παράλληλοι κύκλοι της $\mathbb{S}^2$ (σχήμα 9.13), δηλαδή οι κύκλοι $x^2 + y^2 = 1 - z^2$.



Σχήμα 9.13

Άρα η σχέση ισοδυναμίας που εισάγεται από τη δράση της ομάδας είναι η $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$. Θεωρούμε την συνεχή και επί απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to [-1, 1]$, με $f(x, y, z) = z$, η οποία είναι συμβατή με τη σχέση $\sim$, γιατί

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) &\Leftrightarrow z_1 = z_2 \\ &\Leftrightarrow f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

Επιπλέον ο $\mathbb{S}^2$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{I}$ είναι Hausdorff, άρα η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f}$, που επάγει η f είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή $\mathbb{S}^2/SO(\mathbb{R}, 2) \cong [-1, 1] \cong \mathbb{I}$.

6. Στο έκτο από τα παραδείγματα 9.6.2 η δράση της ομάδας $O(\mathbb{R}, n)$ επί της σφαίρας $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι μεταβατική, άρα έχουμε μία μόνον τροχιά, τα σημεία της οποίας ταυτίζονται, επομένως προκύπτει μονοσημειακός χώρος. Συνεπώς

$$\mathbb{S}^{n-1}/O(\mathbb{R}, n) \cong \{x\}.$$

Ορισμός 9.6.7. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **ομογενής**, αν και μόνον, αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \to X$, ώστε $f(x) = y$.

Παραδείγματα 9.6.5.

1. Οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$ είναι χώροι ομογενείς, γιατί, $x, y \in \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με $f(z) = z - x + y$ είναι ομοιομορφισμός και $f(x) = y$.

2. Οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$ είναι χώροι ομογενείς. Βλέπε άσκηση 7-15.

3. Το ότι το μοναδιαίο διάστημα $\mathbb{I}$ δεν είναι χώρος ομογενής αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο. Αν ισχύει το αντίθετο υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, ώστε $f(0) = \frac{1}{2}$. Τότε , αν $a \in (0, 1)$ το $f([0, a))$ θα είναι ένα γνήσιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{I}$, το οποίο θα περιέχει το $\frac{1}{2}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $f([0, a)) = [\frac{1}{2}, d) \subset \mathbb{I}$, ή $f([0, a)) = (c, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{I}$ και το $[\frac{1}{2}, d)$, καθώς και το $(c, \frac{1}{2}]$ δεν είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{I}$.

Πρόταση 9.6.1. *Κάθε τοπολογική ομάδα G είναι χώρος ομογενής.*

Απόδειξη: Έστω ότι $x, y \in G$. Η απεικόνιση $L_{x^{-1}} : G \to G$, με $L_{x^{-1}}(a) = x^{-1} \bullet a$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Το ίδιο ισχύει και για την απεικόνιση $R_y : G \to G$, με $R_y(a) = a \bullet y$. Επομένως η $f = R_y \circ L_{x^{-1}} : G \to G$ είναι ένας ομοιομορφισμός, με $f(x) = R_y(L_{x^{-1}}(x)) = y$. □

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια της προηγηθείσας πρότασης είναι το ότι ένας μη ομογενής χώρος δεν μπορεί να δεχθεί αλγεβρική δομή, η οποία να τον καθιστά τοπολογική ομάδα. Το αντίστροφο, όμως δεν ισχύει πάντα. Υπάρχουν ομογενείς χώροι, οι οποίοι δεν μπορούν να εφοδιαστούν με δομή που θα τους καθιστά τοπολογικές ομάδες. Ένας τέτοιος χώρος είναι οι σφαίρες $\mathbb{S}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού απαιτεί μία πρόταση που θα αποδείξουμε στην παράγραφο 16.2, όπου θα ξανασχοληθούμε με τον ισχυρισμό.

9.7 Ασκήσεις

1. Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$, ως εξής:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2.$$

(Εδώ ταυτίζουμε σε ένα τα σημεία της παραβολής $y^2 + x = a,\ a \in \mathbb{R}$). Να δειχθεί ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι $\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Η απεικόνιση, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $f(x, y) = x + y^2$ είναι συμβατή με την σχέση $\sim$, συνεχής, επί και ανοικτή (γιατί;), άρα επάγει απεικόνιση $\overline{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$, η οποία είναι ομοιομορφισμός.

2. Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$, ως εξής:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Εδώ ταυτίζουμε σε ένα τα σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = a, a \geq 0$.
Να δειχθεί ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι $\mathbb{R}^2/\sim \cong [0, \infty)$.
Υπόδειξη: Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, με $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι συμβατή με την σχέση $\sim$, συνεχής, επί και ανοικτή (γιατί;), άρα επάγει απεικόνιση $\overline{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$, η οποία είναι ομοιομορφισμός.

3. Να δειχθεί ότι $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$.
Υπόδειξη: Εδώ ταυτίζουμε σε ένα σημείο x_0 τα σημεία του ισημερινού

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / x_{n+1} = 0\},$$

ο οποίος είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^{n-1}$. Θεωρούμε την

$$\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / x_{n+1} \geq 0\}$$

και την

$$\mathbb{S}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / x_{n+1} \leq 0\}.$$

Στο 7ο από τα παραδείγματα 2.3.1 είδαμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\Phi_1 : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{D}^n$, με $\Phi_1(S) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ και ομοιομορφισμός $\Phi_2 : \mathbb{S}^n_- \to \mathbb{D}^n$, με $\Phi_2(S) \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Επιπλέον, ισχύει $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$, άρα, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F_1 : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{S}^n$ τέτοια, ώστε $F_1(S) = \{x_0\} \subset \mathbb{S}^n$ και ο περιορισμός της F_1 στο $\mathbb{S}^n_+ \setminus S$ να είναι 1-1. Ομοίως, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F_2 : \mathbb{S}^n_- \to \mathbb{S}^n$ τέτοια, ώστε $F_2(S) = \{x_0\} \subset \mathbb{S}^n$ και ο περιορισμός της F_2 στο $\mathbb{S}^n_- \setminus S$ να είναι 1-1. Αν πάρουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$, με $F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in \mathbb{S}^n_+ \\ F_2(x), & x \in \mathbb{S}^n_- \end{cases}$, τότε η F είναι καλώς ορισμένη, συμβατή με την σχέση ισοδυναμίας που εισάγει η ταύτιση των σημείων του ισημερινού της $\mathbb{S}^n$ σε ένα σημείο x_0 της $\mathbb{S}^n$, συνεχής (λήμμα επικόλλησης) και επί. Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^n$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$ είναι Hausdorff, η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{F} : \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$ που επάγει η F είναι ομοιομορφισμός.

4. Αποδείξτε ότι $\mathbb{R}^n/\mathbb{D}^n \cong \mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 2$.
Υπόδειξη: Η ταύτιση των σημείων του $\mathbb{D}^n$ σε ένα εισάγει στον $\mathbb{R}^n$ την εξής σχέση ισοδυναμίας: $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \vee \quad x, y \in \mathbb{D}^n$. Έχουμε $\mathbb{R}^n/\sim \;\cong \mathbb{R}^n/\mathbb{D}^n$. Επιπλέον, $\mathbb{R}^n = \{kx/k \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ και $\mathbb{D}^n = \{kx/k \in [-1,1] \wedge x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με

$$f(x) = \begin{cases} (k-1)x, & x \in \mathbb{S}^{n-1} \wedge k \geq 1 \\ \mathbf{0}, & x \in \mathbb{S}^{n-1} \wedge -1 \leq k \leq 1 \\ (k+1)x, & x \in \mathbb{S}^{n-1} \wedge k \leq -1 \end{cases}.$$

Η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$, συνεχής, επί και ανοικτή. Επομένως επάγει απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : \mathbb{R}^n/\mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$, η οποία είναι ομοιομορφισμός.

5. Αποδείξτε ότι: $\mathbb{I}/[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cong \mathbb{I}$.
Υπόδειξη: Η σχέση ισοδυναμίας που εισάγει η ταύτιση των σημείων του διαστήματος $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ σε ένα είναι η: $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \vee x, y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, με $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$. Η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$, συνεχής και επί. Επιπλέον ο χώρος $\mathbb{I}$ είναι συμπαγής και Hausdorff. Επομένως η f επάγει απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : \mathbb{I}/[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \to \mathbb{I}$, η οποία είναι ομοιομορφισμός.

6. Στο τρυπημένο επίπεδο $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $x \sim y$, αν και μόνον, αν τα x, y ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim \cong (0, \infty)$.
Υπόδειξη: Είναι $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} = \{re^{i\theta}/r > 0 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to (0, \infty)$, με $f(re^{i\theta}) = r$. Η f είναι συμβατή με την σχέση $\sim$, συνεχής επί και ανοικτή. Επομένως επάγει απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to (0, \infty)$, η οποία είναι ομοιομορφισμός.

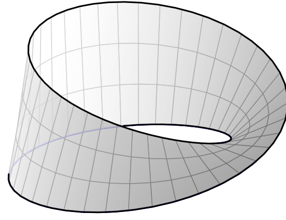
7. Θεωρούμε τον δακτύλιο A που προκύπτει από τους κύκλους

$$C_1 = \{e^{i\theta}/0 \leq \theta < 2\pi\} \text{ και } C_2 = \{2e^{i\theta}/0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Αν ταυτίσουμε κάθε σημείο $e^{i\theta}$ του C_1 με το σημείο $2e^{i\theta}$ του C_2, να δειχθεί ότι ο χώρος πηλίκο που προκύπτει είναι ομοιόμορφος με τη σπείρα ($\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

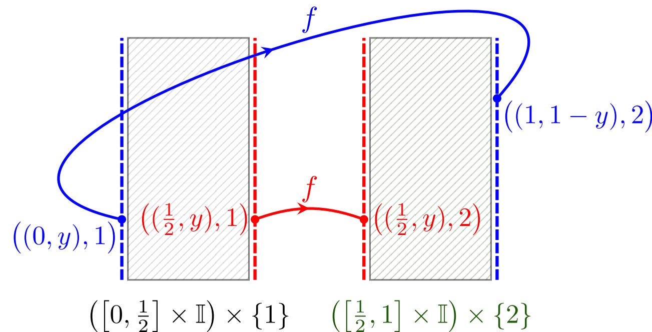
8. Αν στην προηγούμενη άσκηση ταυτίσουμε σε ένα όλα τα σημεία του C_1 και σε ένα όλα τα σημεία του C_2, να δειχθεί ότι ο χώρος πηλίκο που προκύπτει είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^2$.

9. Να αποδείξετε ότι η λωρίδα του Moebius ($\mathbb{M}$) είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff.



Σχήμα 9.14. Λωρίδα Möbius

Απόδειξη: Το ότι η $\mathbb{M}$ είναι χώρος συμπαγής είναι άμεση συνέπεια του ότι είναι εικόνα του συμπαγούς $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$, μέσω της συνεχούς απεικόνισης pr. Για να αποδείξουμε ότι η $\mathbb{M}$ είναι χώρος Hausdorff παρατηρούμε ότι μπορεί να προκύψει ως χώρος επικόλλησης με τον εξής τρόπο:
Θεωρούμε τους χώρους $X = ([0,\frac{1}{2}]\times\mathbb{I})\times\{1\}$ και $Y = ([\frac{1}{2},1]\times\mathbb{I})\times\{2\}$. Επίσης θεωρούμε τα σύνολα $A = (\{\frac{1}{2}\}\times\mathbb{I})\times\{1\}$ και $B = (\{0\}\times\mathbb{I})\times\{1\}$. Το $A\cup B$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Η απεικόνιση $f : A\sqcup B \to Y$, με $f((x,y),1) = \begin{cases} ((\frac{1}{2},y),2), & x=\frac{1}{2}\wedge y\in\mathbb{I} \\ ((1,1-y),2), & x=0\wedge y\in\mathbb{I}\end{cases}$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής (Βλέπε σχήμα 9.15).
Τότε $\mathbb{M} = X\bigsqcup_f Y$. Επειδή οι χώροι X, Y είναι συμπαγείς και Hausdorff, από την πρόταση 9.4.2, συνεπάγεται ότι η $\mathbb{M}$ είναι Hausdorff.



Σχήμα 9.15

10. Να αποδείξετε ότι η μποτίλια Klein ($\mathbb{K}$) είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff.
Απόδειξη: Η συμπάγεια της μποτίλιας Klein είναι συνέπεια του ότι είναι εικόνα του συμπαγούς χώρου $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$, μέσω της συνεχούς pr. Για την απόδειξη του δεύτερου ζητούμενου πρέπει να επισημάνουμε τι ότι η μποτίλια Klein, ως χώρος πηλίκο κατασκευάζεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση ταυτίζουμε τα σημεία $(0,y)$ και $(1,y)$ για κάθε $y\in\mathbb{I}$. Με την πιο πάνω ταύτιση προκύπτει ο κύλινδρος $\mathbb{S}^1\times\mathbb{I}$. Οι βάσεις του κυλίνδρου είναι οι κύκλοι $\mathbb{S}^1\times\{0\}$ και $\mathbb{S}^1\times\{1\}$ που είναι εικόνες των συνεχών απεικονίσεων $\alpha:\mathbb{I}\to\mathbb{R}^2\times\{0\}$, με $\alpha(t)=(e^{2\pi i t},0)$ και $\beta:\mathbb{I}\to\mathbb{R}^2\times\{1\}$, με $\beta(t)=(e^{2\pi i t},1)$.
Στην δεύτερη φάση πρέπει να ταυτίσουμε το σημείο $(e^{2\pi i t},0)$ του $\mathbb{S}^1\times\{0\}$ με το σημείο

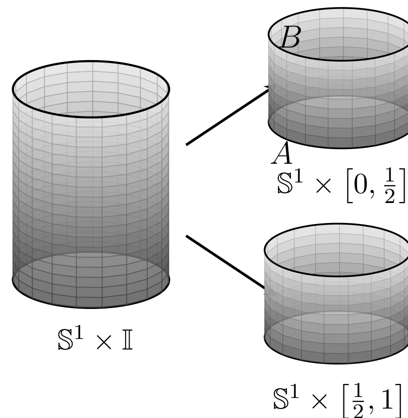
$(e^{2\pi i(1-t)},1)=(e^{-2\pi it},1)$ του $\mathbb{S}^1\times\{1\}$. Για να πετύχουμε την ταύτιση αυτή θα ακολουθήσουμε την τεχνική της απεικόνισης επικόλλησης που ακολουθήσαμε στην απόδειξη της προηγούμενης άσκησης. Συγκεκριμένα "σπάμε" τον κύλινδρο σε δύο κυλίνδρους

$$X=\mathbb{S}^1\times[0,\tfrac{1}{2}] \text{ και } Y=\mathbb{S}^1\times[\tfrac{1}{2},1] \text{ (σχήμα 9.16)},$$

και ακολούθως θεωρούμε τα κλειστά υποσύνολα $A=\mathbb{S}^1\times\{0\}$, $B=\mathbb{S}^1\times\{1\}$ του X και την απεικόνιση $f:A\sqcup B\to Y$, με

$$f(e^{2\pi it},\tfrac{1}{2})=(e^{2\pi it},\tfrac{1}{2}) \text{ και } f(e^{2\pi it},0)=(e^{-2\pi it},1).$$

Η μποτίλια Klein ($\mathbb{K}$) είναι ο χώρος επικόλλησης $X\bigsqcup_f Y$. Οι χώροι X,Y είναι συμπαγείς και Hausdorff, άρα ο χώρος $\mathbb{K}$ είναι Hausdorff (πρόταση 9.4.2).



Σχήμα 9.16

11. Να αποδειχθεί ότι $P\mathbb{R}^1\cong\mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, με $f(z)=z^2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ {\scriptstyle pr}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ P\mathbb{R}^1 & & \end{array}$$

Είναι

$$\begin{aligned} x\sim y &\Leftrightarrow x=\pm y \\ &\Leftrightarrow x^2=y^2 \\ &\Leftrightarrow f(x)=f(y)\,, \end{aligned}$$

άρα η f είναι συμβατή με τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, η οποία ορίζει στον $\mathbb{S}^1$ τον χώρο πηλίκο $P\mathbb{R}^1$. Επιπλέον, αν $z=e^{i\theta}\in\mathbb{S}^1$, τότε $z=f(w)$, όπου $w=e^{i\frac{\theta}{2}}\in\mathbb{S}^1$, άρα η f είναι επί. Ο $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγής και Hausdorff, άρα η απεικόνιση μεταφοράς $\overline{f}$ που επάγει η f είναι ομοιομορφισμός, επομένως $P\mathbb{R}^1\cong\mathbb{S}^1$.

12. Να δειχθεί ότι η $pr : \mathbb{S}^n \to P\mathbb{R}^n$ είναι κλειστή απεικόνιση.
Απόδειξη: Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-1, 1\}$ εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία και την συνεχή απεικόνιση $f : B \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $f(a, z) = az$. Έχουμε ότι $pr^{-1}\big(pr(A)\big) = f\big(B \times A\big)$. Το $B \times A$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $B \times \mathbb{S}^n$, άρα συμπαγές. Επομένως το $f\big(B \times A\big)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου Hausdorff $\mathbb{S}^n$, άρα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, άρα το $pr^{-1}\big(pr(A)\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, άρα το $pr(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$, επομένως η pr είναι κλειστή απεικόνιση.

13. Να δειχθεί ότι η $pr : \mathbf{S}^n \to P\mathbb{C}^n$ είναι κλειστή απεικόνιση.
Απόδειξη: Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, με $f(\lambda, z) = \lambda z$. Έχουμε ότι $pr^{-1}\big(pr(A)\big) = f\big(\mathbb{S}^1 \times A\big)$. Το $\mathbb{S}^1 \times A$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{S}^n$, άρα συμπαγές. Επομένως το $f\big(\mathbb{S}^1 \times A\big)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου Hausdorff $\mathbf{S}^n$, άρα κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$, άρα το $pr^{-1}\big(pr(A)\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{S}^n$, άρα το $pr(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $P\mathbb{C}^n$, επομένως η pr είναι κλειστή απεικόνιση.

14. Να δειχθεί ότι $P\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{S}^2$.
Απόδειξη: Έστω $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ η με ένα σημείο συμπαγοποίηση του $\mathbb{C}$. Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : \overline{\mathbb{C}} \to P\mathbb{C}^1$, με $f(z) = \begin{cases} [z; 1], & z \neq \infty \\ [1; 0], & z = \infty \end{cases}$ και $g : P\mathbb{C}^1 \to \overline{\mathbb{C}}$, με $g\big([u; v]\big) = \begin{cases} \frac{u}{v}, & v \neq 0 \\ \infty, & v = 0 \end{cases}$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $g \circ f = i_{\overline{\mathbb{C}}}$ και $f \circ g = i_{P\mathbb{C}^1}$, άρα οι απεικονίσεις f, g είναι ομοιομορφισμοί, επομένως $P\mathbb{C}^1 \cong \overline{\mathbb{C}}$. Επιπλέον (στερεογραφική προβολή) έχουμε $\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, άρα $P\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{S}^2$.

15. Έστω G τοπολογική ομάδα και H η συνεκτική συνιστώσα της G, η οποία περιέχει το ουδέτερο στοιχείο e της G, να δειχθεί ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G.
Απόδειξη: Προφανώς είναι $H \neq \varnothing$. Έστωσαν $x, y \in H$. Είναι $H \bullet x^{-1} = R_{x^{-1}}(H)$, άρα το $H \bullet x^{-1}$ είναι συνεκτικό, επειδή η $R_{x^{-1}}$ είναι ομοιομορφισμός. Επίσης $x \bullet x^{-1} = e \in H \bullet x^{-1}$. Επειδή το H είναι η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το e είναι $H \bullet x^{-1} \subseteq H$, άρα $y \bullet x^{-1} \in H$. Συνεπώς η H είναι υποομάδα της G.
Έστω $g \in G$, τότε $g \bullet H \bullet g^{-1} = L_g\big(R_{g^{-1}}(H)\big)$. Επειδή ο $L_g \circ R_{g^{-1}}$, είναι ομοιομορφισμός, το $L_g\big(R_{g^{-1}}(H)\big)$ είναι συνεκτικό, με $e \in L_g\big(R_{g^{-1}}(H)\big)$, άρα $g \bullet H \bullet g^{-1} = L_g\big(R_{g^{-1}}(H)\big) \subseteq H$. Δηλαδή η H είναι κανονική υποομάδα της G.

16. Έστω G συνεκτική τοπολογική ομάδα, να δειχθεί ότι κάθε περιοχή V του μοναδιαίου στοιχείου e παράγει την G.
Απόδειξη: Έστω V μια περιοχή του e και H η υποομάδα της G που παράγεται από τα στοιχεία του V. Αν $h \in H$, τότε το $h \bullet V = L_h(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του G και $h \in h \bullet V \subseteq H$, άρα η H είναι ανοικτό υποσύνολο του G. Έστω ότι, υπάρχει $g \in G \setminus H$. Αν το σύνολο $(g \bullet V) \cap H = g \bullet (V \cap H)$ δεν είναι κενό, τότε υπάρχει $x \in g \bullet (V \cap H)$, άρα $x = g \bullet y$ για κάποιο $y \in V$, άρα $g = x \bullet y^{-1}$, άρα $g \in H$, γιατί $x, y^{-1} \in H$, άτοπο. Άρα $\big(g \bullet V\big) \cap H = \varnothing$, επομένως το $g \bullet V = L_g(V)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του G, με $g \in g \bullet V \subseteq G \setminus H$, άρα το $G \setminus H$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του G, άτοπο, γιατί ο συνεκτικός χώρος G δεν μπορεί να γραφεί

ως ένωση δύο μη κενών ανοικτών και ξένων υποσυνόλων του. Συνεπώς $G \setminus H = \varnothing$, άρα $H = G$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

17. Να αποδείξετε ότι κάθε ομάδα με τη διακριτή τοπολογία είναι τοπολογική ομάδα.

18. Έστωσαν G, H τοπολογικές ομάδες και $f : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι συνεχής, αν και μόνον, αν είναι συνεχής στο ουδέτερο στοιχείο e_G της G.

    Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι προφανές.
    Για το ικανό: Έστω $x \in G$ και U μια περιοχή του $f(x)$ στην H. Τότε το $V = R_{f^{-1}(x)}(U) = f^{-1}(x)U$ είναι ανοικτό υποσύνολο της H, γιατί ο $R_{f^{-1}(x)} : H \to H$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον $e_H \in V$. Επειδή η f είναι συνεχής στο e_G και $f(e_G) = e_H$, υπάρχει περιοχή W του e_G, ώστε $f(W) \subseteq V$. Το $R_x(W) = K$ είναι ανοικτό υποσύνολο της G, γιατί ο $R_x : G \to G$ είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον $x \in K$ και

$$\begin{aligned} f(K) &= f(xW) \\ &= f(x)f(W) \subseteq f(x)V \\ &= f(x)f^{-1}(x)U = U \\ &\Rightarrow f(K) \subseteq U\,. \end{aligned}$$

    Άρα η f είναι συνεχής στο αυθαίρετα επιλεγμένο $x \in G$, επομένως είναι συνεχής.

19. Αν G μια τοπολογική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $\mathbf{1}$, να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

    i) Ο G είναι Hausdorff.
    ii) Το $\{\mathbf{1}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του G.

    Απόδειξη: Το i) $\Rightarrow$ ii) είναι προφανές. Για το αντίστροφο, θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : G\times G \to G$, με $f(x,y) = xy^{-1}$. Έχουμε $f^{-1}\big(\mathbf{1}\big) = \Delta$, όπου Δ το διαγώνιο σύνολο του $G \times G$. Από το δεδομένο, το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $G \times G$, άρα ο G είναι χώρος Hausdorff (πρόταση 3.3.3).

20. Αν G είναι μια τοπολογική ομάδα και H μια υποομάδα της G, να δειχθεί ότι η $\overline{H}$ είναι επίσης υποομάδα της G.

    Απόδειξη: Έχουμε ότι $\overline{H \times H} = \overline{H} \times \overline{H}$, επομένως

$$\begin{aligned} M(\overline{H} \times \overline{H}) &= M(\overline{H \times H}) \\ &\subseteq \overline{M(H \times H)} \\ &\subseteq \overline{M(H)} \\ &\subseteq \overline{H}. \end{aligned}$$

    Επιπλέον $\overline{H} \neq \varnothing$. Έστω ότι $a, b \in \overline{H}$. Τότε $a \bullet b^{-1} = M(a, b^{-1}) \in \overline{H}$, άρα η $\overline{H}$ είναι υποομάδα της G.

10 ΟΜΟΤΟΠΙΑ

10.1 Ομοτοπικές απεικονίσεις

Η ομοτοπία είναι μία έννοια πολύ σημαντική για την τοπολογία. Έχει αφετηρία την έννοια του συνεχούς μετασχηματισμού μιας συνεχούς απεικονίσεως σε μιαν άλλη συνεχή απεικόνιση. Η ομοτοπική ισοδυναμία των χώρων που εισάγεται, μέσω της ομοτοπίας είναι έννοια ασθενέστερη του ομοιομορφισμού. Όμως, όπως θα δούμε στην αλγεβρική τοπολογία οι ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες ομάδες και ομοτοπίας και ομολογίας. Η διεύρυνση της κλάσης των ομοιόμορφων χώρων με εκείνη των ομοτοπικά ισοδυνάμων χώρων συνδέεται άμεσα με την νέα έννοια της συστολής παραμόρφωσης, που αποτελεί ένα σημαντικότατο εργαλείο επίλυσης πολλών τοπολογικών προβλημάτων.

Ορισμός 10.1.1. Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y και $f, g : X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις. Η f ονομάζεται **ομοτοπική** της g (συμβολισμός: $f \approx g$), αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με

$$H(x, 0) = f(x) \text{ και } H(x, 1) = g(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Η H ονομάζεται **ομοτοπία μεταξύ των** f και g. Αν η απεικόνιση g είναι σταθερή, τότε η f ονομάζεται **μηδενοτοπική**.

Ορισμός 10.1.2. Έστωσαν οι τοπολογικοί χώροι X, Y. Αν A μη κενό υποσύνολο του X και $f, g : X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις, τότε η f ονομάζεται **ομοτοπική της** g **σε σχέση με το** A (συμβολισμός: $f \approx g(rel.A)$), αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με

$$H(x, 0) = f(x)\,, H(x, 1) = g(x) \text{ για κάθε } x \in X$$

και

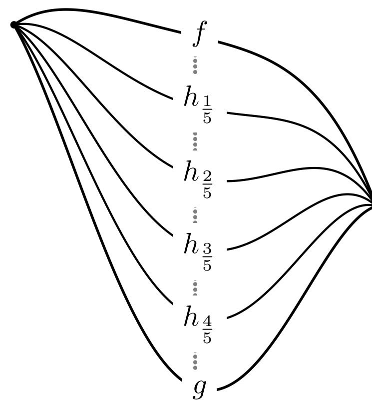
$$H(a, t) = f(a) = g(a) \text{ για κάθε } (a, t) \in A \times \mathbb{I}.$$

Παρατηρήσεις:

1. Αν θεωρήσουμε ότι $H(x,t) = h_t(x)$ και ότι η μεταβλητή t, η οποία κινείται στο διάστημα [0,1] εκφράζει χρόνο, τότε έχουμε μία συνεχή μεταβολή

$$h_t : X \to Y$$

της $f = h_0$ στην $g = h_1$ (σχήμα 10.1).



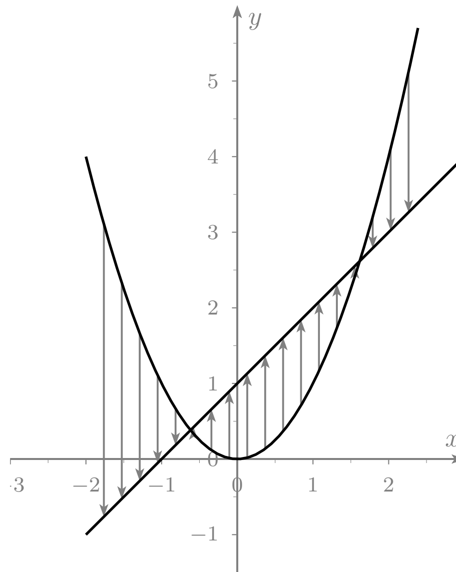
Σχήμα 10.1

2. Αν, οι απεικονίσεις $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχείς, τότε η f είναι ομοτοπική της g, γιατί η συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, με $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ των f και g. Παρατηρούμε ότι και η $G : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, με $G(x,t) = (1-t^2)f(x) + t^3 g(x)$ είναι επίσης ομοτοπία μεταξύ των f και g. Συνεπώς η ομοτοπία μεταξύ των απεικονίσεων f και g, αν υπάρχει δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

Να επισημάνουμε πως η απόδειξη της συνέχειας της απεικόνισης H, η οποία αναφέρεται στα παραδείγματα που ακολουθούν είναι απλή και τις περισσότερες φορές γίνεται εύκολα με εφαρμογή του θεωρήματος μεταφοράς (πρόταση 2.1.10).

Παραδείγματα 10.1.1.

1. Έστωσαν οι συνεχείς απεικονίσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = (x, x^2)$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $g(x) = (x, x)$. Η απεικόνιση $H : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $H(x,t) = (x, (1-t)x^2 + tx)$ είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι ομοτοπική της g (σχήμα 10.2).



Σχήμα 10.2

2. Έστωσαν ο τοπολογικός χώρος X και η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to X$. Η απεικόνιση $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x,t) = f((1-t)x)$ είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Άρα η H είναι μια ομοτοπία μεταξύ της f και της σταθερής $g : \mathbb{R}^n \to X$, με $g(x) = f(0)$. Δηλαδή η f είναι μηδενοτοπική.

3. Έστωσαν X ένας τοπολογικός χώρος, A μη κενό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : X \to A$ συνεχής απεικόνιση. Η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to A$, με $H(x,t) = (1-t)f(x) + ta$, όπου $a \in A$ είναι καλώς ορισμένη, λόγω της κυρτότητας του A. Επιπλέον η H είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = a$ για κάθε $x \in X$. Άρα η f είναι μηδενοτοπική.

4. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αν η συνεχής απεικόνιση $f : X \to \mathbb{S}^n$ δεν είναι επί, τότε, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n$, με $f(x) \neq x_0$ για κάθε $x \in X$, άρα τα $f(x)$ και $-x_0$ δεν είναι αντιποδικά σημεία της $\mathbb{S}^n$ για κάθε $x \in X$, συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $f(x)$ και $-x_0$ δεν περιέχει την αρχή $\mathbf{0}$, επομένως για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $(1-t)f(x) + t(-x_0) \neq \mathbf{0}$. [1] Άρα η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)-tx_0}{\|(1-t)f(x)-tx_0\|}$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η H είναι συνεχής με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = -x_0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή η H είναι μία ομοτοπία μεταξύ της f και της σταθερής $g : X \to \mathbb{S}^n$, με $g(x) = -x_0$. Συνεπώς η f είναι μηδενοτοπική.

5. Έστω X τοπολογικός χώρος και οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, με
$$\|f(x) - g(x)\| < 2 \tag{10.1}$$
για κάθε $x \in X$. Η σχέση (10.1) σημαίνει ότι τα σημεία $f(x)$, $g(x)$ του $\mathbb{S}^n$ δεν είναι αντιποδικά, άρα το ευθύγραμμο τμήμα $[f(x), g(x)]$ δεν περιέχει την αρχή $\mathbf{0}$, συνεπώς $(1-t)f(x) + tg(x) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Επομένως η $H : X \times \mathbb{I} \to$

[1] Ονομάζουμε αντιποδικά τα σημεία x και $-x$ της $\mathbb{S}^n$.

$\mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον, η H είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $f \approx g$.

6. Έστωσαν η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$ και η αντιποδική απεικόνιση $\mathrm{a} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $\mathrm{a}(x) = -x$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$ ισχύει $(1-t)f(x) + t\mathrm{a}(x) \neq \mathbf{0}$. Πράγματι για $t = 0$ και για $t = 1$ η σχέση ισχύει προφανώς. Έστω ότι για κάποιο $x_0 \in \mathbb{S}^n$ και για κάποιο $t \in (0,1)$ ισχύει $(1-t)f(x_0) + t\mathrm{a}(x_0) = 0$, τότε $f(x_0) = \frac{t}{t-1}\mathrm{a}(x_0)$, άρα $\|f(x_0)\| = \frac{t}{1-t}\|\mathrm{a}(x_0)\|$, άρα $t = \frac{1}{2}$. Συνεπώς έχουμε $\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}(-x_0) = \mathbf{0}$, άρα $f(x_0) = x_0$, άτοπο. Επομένως η $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+t\mathrm{a}(x)}{\|(1-t)f(x)+t\mathrm{a}(x)\|}$, είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η H είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = \mathrm{a}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, άρα $f \approx \mathrm{a}$.

7. Έστωσαν ο τοπολογικός χώρος X και οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to \mathbb{C}^*$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ για κάθε $x \in X$. Αν $t \in \mathbb{I}$, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\begin{aligned} |(1-t)f(x) + tg(x)| &= |f(x) - t(f(x) - g(x))| \\ &\geq \left||f(x)| - t|f(x) - g(x)|\right|, \end{aligned}$$

αλλά $t|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - g(x)| < |f(x)|$, άρα $|(1-t)f(x) + tg(x)| > 0$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $f(x)$, $g(x)$ βρίσκεται ολόκληρο εντός του $\mathbb{C}^*$, επομένως η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{C}^*$, με $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η H είναι συνεχής, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή $f \approx g$.

8. Έστωσαν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = (x, x^2 - 3x + 2)$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, με $g(x) = (x, (x-1)^2(x-2)^3)$. Η απεικόνιση $H : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ είναι συνεχής. Επιπλέον $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} H(a,t) &= (1-t)(a,0) + t(a,0) \\ &= (a,0) = f(a) = g(a) \end{aligned}$$

για κάθε $a \in A = \{1,2\}$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα $f \approx g(rel.A)$.

Παρατήρηση: Εύλογη είναι η απορία, γιατί δεν δόθηκε παράδειγμα δύο μη ομοτοπικών απεικονίσεων. Η εξήγηση είναι πως σχετικά εύκολα αποδεικνύουμε ότι δύο συνεχείς απεικονίσεις είναι ομοτοπικές, βρίσκοντας μία ομοτοπία μεταξύ τους, η οποία τις περισσότερες φορές προκύπτει από μία σχετικά καλή "γεωμετρική αίσθηση" των Ευκλείδειων χώρων και των υποχώρων τους. Όμως εξαιρετικά δύσκολα αποδεικνύεται το αντίστροφο, η απόδειξη του οποίου πολλές φορές απαιτεί τη χρήση εργαλείων της αλγεβρικής τοπολογίας, τα οποία προς το παρόν δεν έχουμε στη διάθεσή μας. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τις συνεχείς απεικονίσεις $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $\gamma(t) = e^{\pi i t}$ και $\delta : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $\delta(t) = e^{-\pi i t}$, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε διαισθητικά ότι δεν μπορεί η γ να κάνει μία συνεχή πορεία και να ταυτιστεί με την δ, παραμένοντας καθ' όλη τη διάρκεια της πορείας αυτής στο "τρυπημένο επίπεδο", εξαιτίας της τρύπας (κάνετε ένα σχήμα). Η αυστηρή όμως απόδειξη του γεγονότος αυτού απαιτεί τη γνώση της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου.

Πρόταση 10.1.1. *Στο σύνολο $C(X,Y)$ των συνεχών απεικονίσεων από τον χώρο X στο χώρο Y η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: Έστωσαν $f,g,h \in C(X,Y)$

α΄) Η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $H(x,t) = f(x)$ είναι συνεχής με $H(x,0) = H(x,1) = f(x)$, άρα $f \approx f$. Επομένως η σχέση $\approx$ είναι ανακλαστική.

β΄) Αν $f \approx g$, τότε υπάρχει ομοτοπία $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.
Αν $g \approx h$, τότε υπάρχει ομοτοπία $G : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $G(x,0) = g(x)$ και $G(x,1) = h(x)$ για κάθε $x \in X$.
Η απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ είναι συνεχής (πρόταση 2.1.8). Επιπλέον $F(x,0) = H(x,0) = f(x)$ και $F(x,1) = G(x,1) = h(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $f \approx h$. Επομένως η σχέση $\approx$ είναι μεταβατική.

γ΄) Αν $f \approx g$, τότε υπάρχει ομοτοπία $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Η απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $G(x,t) = H(x,1-t)$ είναι συνεχής, με $G(x,0) = H(x,1) = g(x)$ και $G(x,1) = H(x,0) = f(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $g \approx f$. Επομένως η σχέση $\approx$ είναι συμμετρική. Άρα η $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

□

Παρατήρηση: Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η $\approx (rel.A)$, όπου A μη κενό υποσύνολο του X, είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $C^A(X,Y)$, όπου $C^A(X,Y)$ είναι το υποσύνολο του $C(X,Y)$ για το οποίο ισχύει:

$$f,g \in C^A(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = g(a) \quad \forall a \in A.$$

Πρόταση 10.1.2. *Έστωσαν X, Y, Z τοπολογικοί χώροι, $f_1, g_1 \in C(X,Y)$ και f_2, $g_2 \in C(Y,Z)$. Αν $f_1 \approx g_1$ και $f_2 \approx g_2$, τότε $f_2 \circ f_1 \approx g_2 \circ g_1$.*

Απόδειξη: Η $f_1 \approx g_1$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ομοτοπία $F : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε

$$F(x,0) = f_1(x) \text{ και } F(x,1) = g_1(x)$$

για κάθε $x \in X$.
Η $f_2 \approx g_2$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ομοτοπία $H : Y \times \mathbb{I} \to Z$, ώστε

$$H(y,0) = f_2(y) \text{ και } H(y,1) = g_2(y)$$

για κάθε $y \in Y$. Για την συνεχή απεικόνιση $f_2 \circ F : X \times \mathbb{I} \to Z$ ισχύουν τα

$$f_2(F(x,0)) = f_2(f_1(x)) \text{ και } f_2(F(x,1)) = f_2(g_1(x))$$

για κάθε $x \in X$, άρα

$$f_2 \circ f_1 \approx f_2 \circ g_1 \tag{10.2}$$

Επίσης, $H(g_1(x),0) = f_2(g_1(x))$ και $H(g_1(x),1) = g_2(g_1(x))$ για κάθε $x \in X$, άρα

$$f_2 \circ g_1 \approx g_2 \circ g_1 \tag{10.3}$$

Από τις (10.2) και (10.3) προκύπτει το ζητούμενο. □

Η ακόλουθη πρόταση απαντάει σε ένα σημαντικό τοπολογικό ερώτημα:

Πρόταση 10.1.3. *Αν X τοπολογικός χώρος, $n \geq 2$ και $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ συνεχής απεικόνιση, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f επεκτείνεται συνεχώς στην $\overline{f} : \mathbb{D}^n \to X$.

β΄) Η f είναι μηδενοτοπική.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β΄): Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $G : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^n$, με $G(x,t) = (1-t)x$ και ακολούθως τη συνεχή απεικόνιση $H = \overline{f} \circ G : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I} \to X$, για την οποία ισχύουν τα

$$H(x,0) = \overline{f}(x) = f(x) \text{ και } H(x,1) = \overline{f}(0) = y \in X$$

για κάθε $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, άρα η f είναι μηδενοτοπική.
β') $\Rightarrow$ α΄): Είναι $\mathbb{D}^n = \{tx/t \in \mathbb{I} \wedge x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$. Έστω H μία ομοτοπία μεταξύ της f και της σταθερής $g : \mathbb{S}^{n-1} \to X$, με $g(x) = z \in X$. Άρα $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x) = z \in X$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Θεωρούμε την $\overline{f} : \mathbb{D}^n \to X$, με

$$y = tx \xrightarrow{\overline{f}} \begin{cases} H(x,1-t), & 0 < t \leq 1 \\ z, & t = 0 \end{cases}.$$

Η $\overline{f}$ είναι προφανώς συνεχής στο $\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Αν $y_n = xt_n \in \mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $y_n \to \mathbf{0}$, τότε $(0,1] \ni t_n \to 0$, άρα $\overline{f}(y_n) = H(x,1-t_n) \to H(x,1) = z = \overline{f}(\mathbf{0})$. Συνεπώς η $\overline{f}$ είναι συνεχής και στο $\mathbf{0}$. Επιπλέον, αν $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, τότε $\overline{f}(x) = H(x,0) = f(x)$, άρα $\overline{f}/\mathbb{S}^{n-1} = f$. Επομένως η $\overline{f}$ είναι συνεχής επέκταση της f στον $\mathbb{D}^n$. □

Σχόλιο: Με άλλα λόγια η πιο πάνω πρόταση λέει πως οι μοναδικές συνεχείς απεικονίσεις του συνόλου $\mathbb{S}^{n-1}$ στον οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο X, οι οποίες επεκτείνονται συνεχώς σε ολόκληρο τον δίσκο $\mathbb{D}^n$ είναι οι μηδενοτοπικές.

10.2 Ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι

Η λογική της αλγεβρικής τοπολογίας είναι η επισύναψη σε κάθε τοπολογικό χώρο μιας αλγεβρικής οντότητας, έτσι ώστε σε δύο ομοιόμορφους τοπολογικούς χώρους να επισυνάπτονται δύο ισόμορφες αλγεβρικές οντότητες. Όμως, όπως θα δούμε η κλάση ισοδυναμίας των ομοιόμορφων τοπολογικών χώρων, μπορεί να διευρυνθεί σημαντικά, αν ορίσουμε, ως σχέση ισοδυναμίας μια σχέση ασθενέστερη του ομοιομορφισμού, η οποία είναι η σχέση της ομοτοπικής ισοδυναμίας. Οι ιδιότητες, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες στους ομοτοπικά ισοδύναμους τοπολογικούς χώρους ονομάζονται **ομοτοπικά αναλλοίωτα**. Όπως θα δούμε στα επόμενα στα ομοτοπικά αναλλοίωτα εντάσσονται και οι αλγεβρικές οντότητες που επισυνάπτουμε σε κάθε τοπολογικό χώρο, δηλαδή οι ομάδες ομοτοπίας και οι ομάδες ομολογίας.

Ορισμός 10.2.1. Οι τοπολογικοί χώροι X και Y ονομάζονται **ομοτοπικά ισοδύναμοι** (συμβολισμός: $X \approx Y$), αν και μόνον, αν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$, ώστε

$$g \circ f \approx i_X \text{ και } f \circ g \approx i_Y.$$

Οι συνεχείς απεικονίσεις f και g ονομάζονται **ομοτοπικές ισοδυναμίες** μεταξύ των χώρων X και Y. Η g ονομάζεται **ομοτοπικά αντίστροφη** της f και η f ομοτοπικά αντίστροφη της g.

Πρόταση 10.2.1. *Αν X, Y τοπολογικοί χώροι, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$X \cong Y \quad \Rightarrow \quad X \approx Y.$$

Απόδειξη: Η $X \cong Y$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις f και g, ώστε $g \circ f = i_X$ και $f \circ g = i_Y$. Από την ανακλαστική ιδιότητα της σχέσης $\approx$, έπεται $g \circ f \approx i_X$ και $f \circ g \approx i_Y$, άρα $X \approx Y$ □

Παρατήρηση: Η αντίστροφη συνεπαγωγή της $X \cong Y \Rightarrow X \approx Y$, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, δεν ισχύει πάντοτε. Επομένως η έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας τοπολογικών χώρων είναι ασθενέστερη εκείνης του ομοιομορφισμού τοπολογικών χώρων.

Παραδείγματα 10.2.1.

1. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^2$ και ο υπόχωρος $P = \{x_0\}$ του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^2 \to P$, με $f(x) = x_0$ και $g : P \to \mathbb{R}^2$, με $g(x) = x_0$.
   Η $f \circ g$ είναι μία συνεχής απεικόνιση από το P στο P, με

   $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x_0)\\ &= x_0 = i_P(x),\end{aligned}$$

   άρα $f \circ g = i_P$, συνεπώς

   $$f \circ g \approx i_P. \tag{10.4}$$

   Η $g \circ f$ είναι μία συνεχής απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$, με

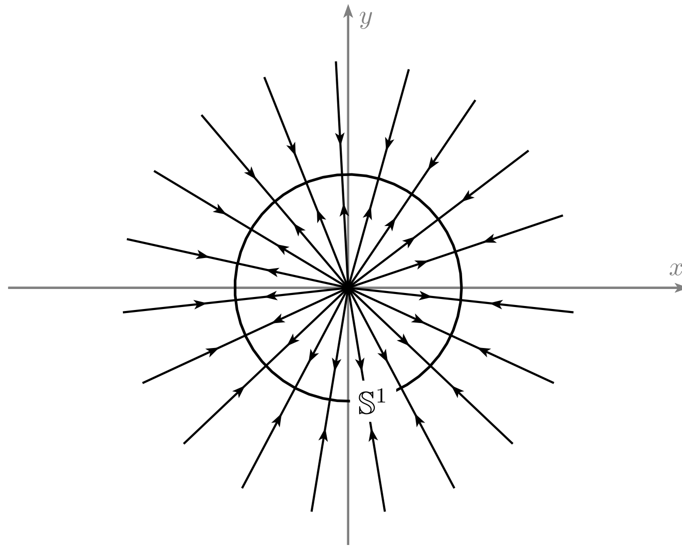
   $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x_0) = x_0.\end{aligned}$$

   Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $H(x,t) = tx_0 + (1-t)x$, για την οποία έχουμε $H(x,0) = x = i_{\mathbb{R}^2}(x)$ και $H(x,1) = x_0 = (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, άρα

   $$g \circ f \approx i_{\mathbb{R}^2} \tag{10.5}$$

   Από τις (10.4) και (10.5) έχουμε ότι $\mathbb{R}^2 \approx P$. Όμως οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και P δεν είναι ομοιόμορφοι. Η πιο απλή αιτιολογία είναι ότι δεν έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

2. Έστω $X = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ο n-διάστατος τρυπημένος χώρος και ο υπόχωρος $\mathbb{S}^{n-1}$ του X.



Σχήμα 10.3

Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f : X \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ και την ένθεση $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow X$. Για τη συνεχή απεικόνιση $f \circ i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ ισχύει

$$(f \circ i)(x) = f(x) = \frac{x}{\|x\|} = x,$$

άρα $f \circ i = i_{\mathbb{S}^1}$, άρα

$$f \circ i \approx i_{\mathbb{S}^{n-1}} \tag{10.6}$$

Επιπλέον θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$, για την οποία ισχύουν τα $H(x,0) = \frac{x}{\|x\|} = (i \circ f)(x)$ και $H(x,1) = x = i_X(x)$ για κάθε $x \in X$, επομένως

$$i \circ f \approx i_X \tag{10.7}$$

Από τις (10.6) και (10.7), έχουμε ότι $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Όμως οι χώροι $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ και $\mathbb{S}^{n-1}$ δεν είναι ομοιόμορφοι, γιατί ο δεύτερος είναι συμπαγής, αλλά ο πρώτος δεν είναι (σχήμα 10.3).

3. Έστω ο δακτύλιος $X = \{x \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ και ο υπόχωρος $\mathbb{S}^1$ του X. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : X \to \mathbb{S}^1$, με $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ και την ένθεση $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$. Για τη συνεχή απεικόνιση $f \circ i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ισχύει

$$(f \circ i)(x) = f(x) = \frac{x}{\|x\|} = x,$$

άρα $f \circ g = i_{\mathbb{S}^1}$, άρα

$$f \circ i \approx i_{\mathbb{S}^1} \tag{10.8}$$

Επιπλέον θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$, για την οποία ισχύουν τα $H(x,0) = \frac{x}{\|x\|} = (i \circ f)(x)$ και $H(x,1) = x = i_X(x)$ για κάθε $x \in X$, επομένως

$$i \circ f \approx i_X \tag{10.9}$$

Από τις (10.8) και (10.9) έχουμε ότι $X \approx \mathbb{S}^1$. Όμως οι χώροι X και $\mathbb{S}^1$ δεν είναι ομοιόμορφοι, γιατί αν από τον πρώτο αφαιρέσουμε δύο σημεία παραμένει συνεκτικός, ενώ ο δεύτερος, με την αφαίρεση δύο σημείων "χάνει" την συνεκτικότητα του (αιτιολογήστε αυστηρά).

Πρόταση 10.2.2. *Η σχέση $\approx$ στην κλάση των τοπολογικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη:

α΄) Είναι $X \cong X \Rightarrow X \approx X$, άρα η $\approx$ είναι ανακλαστική.

β΄) Η συμμετρικότητα της $\approx$ είναι προφανής.

γ΄) Αν $X \approx Y$, τότε υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$, ώστε $g \circ f \approx i_X$ και $f \circ g \approx i_Y$. Επιπλέον $Y \approx Z$, άρα υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $h : Y \to Z$ και $r : Z \to Y$, ώστε $r \circ h \approx i_Y$ και $h \circ r \approx i_Z$.
Για τις συνεχείς απεικονίσεις $h \circ f : X \to Z$ και $g \circ r : Z \to X$ έχουμε

$$\begin{aligned}(g \circ r) \circ (h \circ f) &= g \circ (r \circ h) \circ f \\ &\approx g \circ i_Y \circ f \\ &= g \circ f \approx i_X\,,\end{aligned}$$

(για τις πιο πάνω ομοτοπικές ισοδυναμίες γίνεται χρήση της πρότασης 10.1.2) και

$$\begin{aligned}(h \circ f) \circ (g \circ r) &= h \circ (f \circ g) \circ r \\ &\approx h \circ i_Y \circ r \\ &= h \circ r \approx i_Z\,.\end{aligned}$$

(για τις πιο πάνω ομοτοπικές ισοδυναμίες γίνεται χρήση της πρότασης 10.1.2). Επομένως $X \approx Z$, άρα η $\approx$ είναι μεταβατική. Επομένως η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Πρόταση 10.2.3. *Αν $X \approx Y$ και ο X είναι συνεκτικός, τότε ο Y είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ο Y δεν είναι συνεκτικός. Άρα υπάρχουν μη κενά, ξένα και ανοικτά υποσύνολα U, V του Y, ώστε $U \cup V = Y$. Επειδή $X \approx Y$, υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$, με $g \circ f \approx i_X$ και $f \circ g \approx i_Y$. Επειδή το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y είναι ή $f(X) \subseteq U$ ή $f(X) \subseteq V$.
Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το πρώτο και έστω $u \in V$. Η $f \circ g \approx i_Y$ συνεπάγεται ότι υπάρχει συνεχής $H : Y \times \mathbb{I} \to Y$, με $H(y,0) = f(g(y))$ και $H(y,1) = i_Y(y) = y$ για κάθε $y \in Y$.
Θεωρούμε τη συνεχή $h_u : \mathbb{I} \to Y$, με $h_u(t) = H(u,t)$. Τότε $h_u(0) = f(g(u)) \in U$ και $h_u(1) = u \in V$, άρα έχουμε $h_u(\mathbb{I}) \subseteq U \cup V$, $h_u(\mathbb{I}) \cap U \neq \varnothing$, $h_u(\mathbb{I}) \cap V \neq \varnothing$ και $U \cap V = \varnothing$, άρα το $h_u(\mathbb{I})$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y, άτοπο, γιατί ο $\mathbb{I}$ είναι συνεκτικός χώρος και η h_u είναι συνεχής. □

Παρατήρηση: Δηλαδή η συνεκτικότητα είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο. Ενώ η συμπάγεια δεν είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο. Για παράδειγμα οι χώροι $\mathbb{S}^{n-1}$ και $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, ο πρώτος είναι συμπαγής, ενώ ο δεύτερος δεν είναι.

Αντίστοιχη πρόταση, όπως η 10.2.3 ισχύει και για την δρομοσυνεκτικότητα. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι ισχύει και η ακόλουθη ισχυρότερη πρόταση

Πρόταση 10.2.4. *Αν οι χώροι X και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, τότε έχουν το ίδιο πλήθος δρομοσυνεκτικών συνιστωσών.*

Απόδειξη: Επειδή οι και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$, ώστε $g \circ f \approx i_X$ και $f \circ g \approx i_Y$. Επομένως υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x, 0) = x$ και $H(x, 1) = (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in X$. Αν K είναι μια δρομοσυνεκτική συνιστώσα του X, στην οποία ανήκει το $x \in X$, τότε το $H(K \times \mathbb{I})$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X, άρα τα x και $(g \circ f)(x)$ ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεκτική συνιστώσα του X.
Θεωρούμε τα σύνολα $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών των X και Y, αντιστοίχως. Με C_x συμβολίζουμε την δρομοσυνεκτική συνιστώσα του X, στην οποία ανήκει το x και D_y την δρομοσυνεκτική συνιστώσα του Y, στην οποία ανήκει το y. Επιπλέον θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \text{ με } \Phi(C_x) = D_{f(x)}.$$

Έστω $\Phi(C_{x_1}) = \Phi(C_{x_2})$, τότε $D_{f(x_1)} = D_{f(x_2)} = A$. Το $g(A)$ είναι ένα δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X, γιατί η g είναι συνεχής. Επιπλέον $g(f(x_1)), g(f(x_2)) \in A$. Από την αρχική παρατήρηση προκύπτει ότι και $x_1, x_2 \in A$, άρα $C_{x_1} = C_{x_2}$, δηλαδή η Φ είναι 1-1.
Έστω τώρα ότι $D_y \in \mathcal{D}$. Αν $y \in D_y$, τότε $g(y) = x \in C_x$, επομένως $f(g(y)) \in C_{f(x)}$. Με τον ίδιο τρόπο, όπως στο αρχικό βήμα αποδεικνύεται ότι τα y και $f(g(y))$ ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεκτική συνιστώσα του Y, άρα $D_y = D_{f(g(y))} = D_{f(x)} = \Phi(C_x)$, δηλαδή η Φ είναι επί.
Συνεπώς $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$. □

10.3 Συσταλτοί χώροι-Συστολές-Συστολές παραμόρφωσης

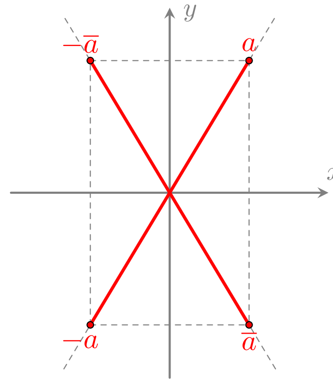
Ορισμός 10.3.1. Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **συσταλτός**, αν και μόνον, αν η ταυτοτική απεικόνιση i_X του X είναι μηδενοτοπική. Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x, 0) = x$ και $H(x, 1) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Στην περίπτωση αυτή η ομοτοπία H ονομάζεται **συστολή του X στο x_0**.

Παρατήρηση: Διαισθητικά συσταλτότητα είναι η δυνατότητα ενός χώρου να "συμμαζεύεται συνεχώς" σε ένα σημείο του.

Παραδείγματα 10.3.1.

1. Έστω A ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για τη συνεχή απεικόνιση $H : A \times \mathbb{I} \to A$, με $H(x,t) = (1-t)x + tx_0$, όπου $x_0 \in A$ ισχύουν τα $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in A$, άρα ο χώρος A, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι συσταλτός. Προφανώς και ο ίδιος ο $\mathbb{R}^n$ είναι συσταλτός.

2. Έστω $\mathbb{C} \ni a = \kappa + \lambda i, \kappa\lambda \neq 0$ και $X = \{a(1-t) - at/t \in \mathbb{I}\} \cup \{\overline{a}(1-t) - \overline{a}t/t \in \mathbb{I}\}$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(z,t) = (1-t)z$.
   Τότε $H(z,0) = z$ και $H(z,1) = \mathbf{0}$ για κάθε $z \in X$. Άρα ο χώρος X, ως υπόχωρος του $\mathbb{C}$ είναι συσταλτός (σχήμα 10.4).



Σχήμα 10.4

3. Έστω X ο τρύπιος κύκλος, δηλαδή ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ που προκύπτει, αν αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{S}^1$ ένα σημείο του x_0. Είναι $(1-t)x + t(-x_0) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $x \in X$ (γιατί;), άρα η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x) = \frac{(1-t)x - tx_0}{\|(1-t)x - tx_0\|}$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η H είναι συνεχής με $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = -x_0$ για κάθ,ε $x \in X$. Επομένως ο χώρος X είναι συσταλτός.

4. Οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$, με $n \geq 1$ είναι μη συσταλτοί χώροι. Η απόδειξη του ισχυρισμού, λόγω ελλείψεως των κατάλληλων "εργαλείων", αναβάλλεται για το κεφάλαιο 16.

Πρόταση 10.3.1. *Ο χώρος X είναι συσταλτός, αν και μόνον, αν υπάρχει $x_0 \in X$, ώστε ο X και ο $\{x_0\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Επειδή ο X είναι συσταλτός υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε

$$H(x,0) = x \text{ και } H(x,1) = x_0$$

για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to \{x_0\}$ και $g : \{x_0\} \to X$, με $g(x_0) = x_0$. Για την $g \circ f : X \to X$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x_0$. Επιπλέον $H(x,0) = x = i_X(x)$ και $H(x,1) = x_0 = (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $g \circ f \approx i_X$. Επίσης $f \circ g = i_{\{x_0\}}$, άρα $f \circ g \approx i_{\{x_0\}}$. Επομένως $X \approx \{x_0\}$.
Το ικανό: Έστω ότι ο X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον $\{x_0\} \subseteq X$. Άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to \{x_0\}$ και συνεχής απεικόνιση $g : \{x_0\} \to X$, ώστε

$$(g \circ f)(x) \approx i_X. \tag{10.10}$$

Από την (10.10), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x,0) = i_X(x) = x$ και $H(x,1) = (g \circ f)(x) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Άρα ο X είναι χώρος συσταλτός. □

Πρόταση 10.3.2. *Αν ο χώρος X είναι συσταλτός, τότε ο X είναι δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη: Επειδή ο X είναι συσταλτός υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in X$.
Αν $y, z \in X$, τότε θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $\alpha : \mathbb{I} \to X$, με $\alpha(t) = H(y,t)$ και $\beta : \mathbb{I} \to X$, με $\beta(t) = H(z,t)$.
Η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to X$, με

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής (πρόταση 2.1.8), γιατί $\alpha(1) = H(y,1) = H(z,1) = \beta(1) = x_0$. Επιπλέον

$$\gamma(0) = \alpha(0) = H(y,0) = y \text{ και } \gamma(1) = \beta(0) = H(z,0) = z,$$

άρα υπάρχει δρόμος στον X, με αρχή το y και πέρας το z, δηλαδή το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα και αντιπαράδειγμα είναι οι χώροι $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, οι οποίοι είναι δρομοσυνεκτικοί, αλλά δεν είναι συσταλτοί.

Πρόταση 10.3.3. *Αν ο χώρος Y είναι συσταλτός και $f \in C(X,Y)$, τότε η f είναι μηδενοτοπική.*

Απόδειξη: Έστω $f \in C(X,Y)$. Επειδή ο Y είναι συσταλτός, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : Y \times \mathbb{I} \to Y$ και $y_0 \in Y$, ώστε $H(y,0) = y$ και $H(y,1) = y_0$ για κάθε $y \in Y$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $h : X \to Y$, με $h(x) = y_0$ και τη συνεχή απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $G(x,t) = H(f(x),t)$. Έχουμε $G(x,0) = f(x)$ και $G(x,1) = y_0 = h(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $f \approx h$. Επομένως η $f \in C(X,Y)$ είναι μηδενοτοπική, γιατί είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση h. □

Πρόταση 10.3.4. *Αν ο χώρος X είναι συσταλτός, ο χώρος Y είναι δρομοσυνεκτικός και $f \in C(X,Y)$, τότε η f είναι μηδενοτοπική.*

Απόδειξη: Έστω $f \in C(X,Y)$. Επειδή ο X είναι συσταλτός, υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Αν $y_0 \in Y$, τότε, λόγω του ότι ο Y είναι δρομοσυνεκτικός υπάρχει δρόμος γ_x στον Y, με $\gamma(0) = f(x_0)$ και $\gamma(1) = y_0$. Θεωρούμε την απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to Y$, με

$$G(x,t) = \begin{cases} f(H(x,2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_x(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Η απεικόνιση G είναι συνεχής (πρόταση 2.1.8), με $G(x,0) = f(H(x,0)) = f(x)$ και $G(x,1) = \gamma_x(1) = y_0$ για κάθε $x \in X$. Άρα η f είναι μηδενοτοπική, γιατί είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση $h \in C(X,Y)$, με $h(x) = y_0$ για κάθε $x \in X$. □

Πρόταση 10.3.5. *Αν ο χώρος X είναι συσταλτός και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι συσταλτός.*

Απόδειξη: Επειδή $X \approx Y$ υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $\phi : Y \to X$ και $h : X \to Y$, ώστε

$$h \circ \phi \approx i_Y \tag{10.11}$$

Ο χώρος X είναι συσταλτός, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $G(x,0) = x$ και $G(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $F : Y \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$, με $F(y,t) = \big(\phi(y), t\big)$. Για την συνεχή απεικόνιση $h \circ G \circ F : Y \times \mathbb{I} \to Y$ $\big(Y \times \mathbb{I} \xrightarrow{F} X \times \mathbb{I} \xrightarrow{G} X \xrightarrow{h} Y\big)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\big(h \circ G \circ F\big)(y,0) &= h\big(G(\phi(y),0)\big)\\ &= h\big(\phi(y)\big) \quad \forall y \in Y\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\big(h \circ G \circ F\big)(y,1) &= h\big(G(\phi(y),1)\big)\\ &= h(x_0) \quad \forall y \in Y.\end{aligned}$$

Άρα

$$h \circ \phi \approx c, \tag{10.12}$$

όπου c η σταθερή απεικόνιση στον Y, με $c(y) = h(x_0)$. Από τις (10.11) και (10.12) έχουμε ότι $i_y \approx c$, άρα ο Y είναι χώρος συσταλτός. □

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση είναι το ότι η ιδιότητα της συσταλτότητας είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο. Επειδή η ομοιομορφία είναι ισχυρότερη της ομοτοπικής ισοδυναμίας, έπεται ότι η συσταλτότητα είναι και τοπολογικό αναλλοίωτο.

Ορισμός 10.3.2. Έστω τοπολογικός χώρος X και A ένας γνήσιος υπόχωρος του X. Ο A ονομάζεται **συστολή** του X, αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$, με $r(a) = a$ για κάθε $a \in A$ ή αλλιώς, αν $i : A \hookrightarrow X$ η ένθεση, τότε $r \circ i = i_A$ ($A \hookrightarrow X \xrightarrow{r} A$). Η απεικόνιση r ονομάζεται **απεικόνιση συστολής**.

Παραδείγματα 10.3.2.

1. Αν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$, τότε η $r : X \to \{x_0\}$ είναι μία απεικόνιση συστολής, άρα ο $\{x_0\}$ είναι συστολή του X.

2. Έστω $n > 1$, τότε για τη συνεχή απεικόνιση $r : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ έχουμε, αν $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, τότε $r(a) = a$. Άρα η r είναι απεικόνιση συστολής, συνεπώς ο $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συστολή του $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Πρόταση 10.3.6. *Αν ο A είναι συστολή ενός χώρου Hausdorff X, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X \setminus A$, τότε $r(x) \neq x$, επειδή $r(x) \in A$. Άρα, επειδή ο X είναι Hausdorff υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U, V του X με $x \in U$ και $r(x) \in V$. Το $W = U \cap r^{-1}(V)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, με $x \in W$. Έστω $y \in W$, τότε $y \in U$ και $r(y) \in V$. Επειδή τα U, V είναι ξένα είναι $y \neq r(y)$, άρα $y \notin A$, άρα $y \in X \setminus A$, άρα $W \subseteq X \setminus A$, επομένως $x \in W \subseteq X \setminus A$. Άρα το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Πρόταση 10.3.7. *Ο κώνος υπεράνω ενός χώρου X είναι χώρος συσταλτός.*

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος CX είναι ο χώρος πηλίκο στον χώρο $X \times \mathbb{I}$, που προκύπτει από την ταύτιση των σημείων του συνόλου $X \times \{1\}$ σε ένα. Επομένως αποτελείται από τις κλάσεις $[(x,t)]$, αν $0 \leq t < 1$ και $[(x,1)] = \{(x,1)/x \in X\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$, με $F\big(x,(t,s)\big) = (x,(1-s)t+s)$, η οποία είναι συνεχής, γιατί οι $p_1 \circ F$, με $(p_1 \circ F)\big(x,(t,s)\big) = x$ και $p_2 \circ F$, με $(p_2 \circ F)\big(x,(t,s)\big) = (1-s)t+s$ είναι συνεχείς. Επιπλέον θεωρούμε τις απεικονίσεις $(pr \times 1) : (X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I} \to CX \times \mathbb{I}$, με $(pr \times 1)\big((x,t),s\big) = \big([(x,t)],s\big)$, $g : X \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to CX$, με $g = pr \circ F$ και την $G : CX \times \mathbb{I} \to CX$, με $G\big([(x,t)],s\big) = [(x,(1-s)t+s)]$. Άρα $G \circ (pr \times 1) = g$,

$$\begin{array}{ccc} (X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow{F} & X \times \mathbb{I} \\ {\scriptstyle pr \times 1}\downarrow & \searrow^{g} & \downarrow{\scriptstyle pr} \\ CX \times \mathbb{I} & \xrightarrow[G]{} & CX \end{array}$$

Η g είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών pr και F. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του CX, τότε το $g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $(X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I}$, λόγω της συνέχειας της g. Όμως $g^{-1}(U) = (pr \times 1)^{-1}(G^{-1}(U))$, άρα το $G^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $CX \times \mathbb{I}$ (πρόταση 9.3.4), επομένως η G είναι συνεχής. Επιπλέον

- $G([(x,t)],0) = [(x,t)]$ και
- $G([(x,t)],1) = [(x,1)]$,

άρα ο χώρος CX είναι συσταλτός. □

Πρόταση 10.3.8. *Η συστολή A ενός συσταλτού χώρου X είναι συσταλτός χώρος*

Απόδειξη: Επειδή ο A είναι συστολή του χώρου X υπάρχει απεικόνιση συστολής $r : X \to A$. Ο χώρος X είναι συσταλτός, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $r \circ H : X \times \mathbb{I} \to A$ και ακολούθως τον περιορισμό G της $r \circ H$ στο $A \times \mathbb{I}$. Η απεικόνιση G είναι, προφανώς συνεχής, με

$$G(x,0) = r\big(H(x,0)\big) = r(x) = x \quad \forall x \in A$$

και

$$G(x,1) = r\big(H(x,1)\big) = r(x_0) \in A \quad \forall x \in A,$$

άρα ο A είναι χώρος συσταλτός. □

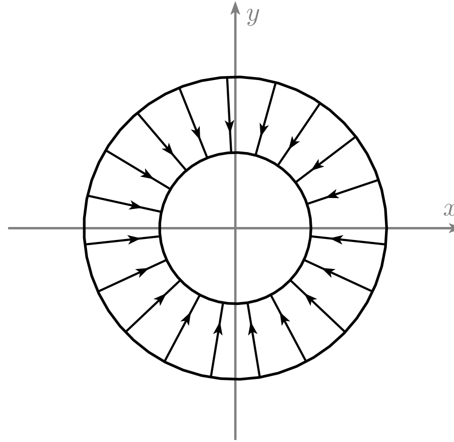
Ορισμός 10.3.3. Έστωσαν X τοπολογικός χώρος και A γνήσιος υπόχωρος του X. Ο A ονομάζεται **συστολή παραμόρφωσης** του X, αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε

- $H(x, 0) = x$ για κάθε $x \in X$.
- $H(x, 1) \in A$ για κάθε $x \in X$ και
- $H(a, t) = a$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Η απεικόνιση H ονομάζεται **απεικόνιση παραμόρφωσης**.

Παραδείγματα 10.3.3.

1. Θεωρούμε τον δακτύλιο $A = \{z \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq \|z\| \leq 2\}$ και την συνεχή απεικόνιση $H : A \times \mathbb{I} \to A$, με $H(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{\|x\|}$.



Σχήμα 10.5

   Ισχύουν τα: $H(x, 0) = x$ για κάθε $x \in A$, $H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1$ για κάθε $x \in A$ και $H(a, t) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{S}^1$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα ο $\mathbb{S}^1$ είναι συστολή παραμόρφωσης του A.

2. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ για κάθε $n \geq 2$.

3. Ο υπόχωρος C του μοναδιαίου τετραγώνου $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ που αποτελείται απο τις δύο κατακόρυφες πλευρές του τετραγώνου, την κάτω οριζόντια και όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ και $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ ονομάζεται **χώρος χτένα**. Ο χώρος $\mathbb{I} \times \{0\}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του C. Πράγματι, θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : C \times \mathbb{I} \to C$, με $H\big((x, y), t\big) = (x, (1 - t)y)$, για την οποία έχουμε $H\big((x, y), 0\big) = (x, y)$ και $H\big((x, y), 1\big) = (x, 0) \in \mathbb{I} \times \{0\}$ για κάθε $(x, y) \in C$. Επιπλέον, αν $(x, 0) \in \mathbb{I} \times \{0\}$, τότε $H\big((x, 0), 0\big) = (x, 0)$, άρα το $\mathbb{I} \times \{0\}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του C.

Παρατήρηση: Αν ο γνήσιος υπόχωρος A του X είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε ο A είναι συστολή του X. Πράγματι, η $r : X \to A$, με $r(x) = H(x, 1)$ είναι απεικόνιση συστολής.
Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $x_0 \in X$, τότε το $\{x_0\}$ είναι συστολή του X. Αν όμως ο X δεν είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ο $\{x_0\}$ δεν είναι συστολή παραμόρφωσης του X. Πράγματι, υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο. Έστω $H : X \times \mathbb{I} \to X$ μια απεικόνιση παραμόρφωσης και $x, y \in X$. Η απεικόνιση $\gamma_1 : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma_1(t) = H(x, t)$ είναι ένας δρόμος από το x στο x_0 και η $\gamma_2 : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma_2(t) = H(y, 1 - t)$ είναι ένας δρόμος από το x_0 στο y. Η σύνθεση των δρόμων γ_1 και γ_2 είναι ένας δρόμος από το x στο y. Επομένως ο X είναι δρομοσυνεκτικός, άτοπο.

Πρόταση 10.3.9. *Αν ο γνήσιος υπόχωρος A του τοπολογικού χώρου X είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε ο A είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον X.*

Απόδειξη: Επειδή ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του X υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x, 0) = x$ για κάθε $x \in X$, $H(x, 1) \in A$ για κάθε $x \in X$ και $H(a, t) = a$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $r : X \to A$, με $r(x) = H(x, 1)$. Αν $i : A \hookrightarrow X$ είναι η ένθεση, τότε

$$(r \circ i)(x) = x = i_A(x) \text{ για κάθε } x \in A,$$

άρα $r \circ i = i_A$, άρα $r \circ i \approx i_A$. Επιπλέον για την $i \circ r : X \to A$ έχουμε $H(x, 0) = x = i_X(x)$ για κάθε $x \in X$ και $H(x, 1) = (i \circ r)(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $i \circ r \approx i_X$. Επομένως $A \approx X$. □

Παρατήρηση: Αν ο $\varnothing \neq A \subset X$ είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία των χώρων A και X.

Πρόταση 10.3.10. *Αν ο χώρος X είναι δρομοσυνεκτικός και ο γνήσιος υπόχωρος A του X είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε ο A είναι δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστωσαν $x_1, x_2 \in A$. Επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικός υπάρχει δρόμος α στον X, με $\alpha(0) = x_1$ και $\alpha(1) = x_2$. Επειδή ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του X υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με

$$H(x, 0) = x,\ H(x, 1) \in A \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } H(a, t) = a \text{ για κάθε } a \in A \text{ και για κάθε } t \in \mathbb{I}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $\beta : \mathbb{I} \to X$, με $\beta(t) = H(\alpha(t), 1)$.
Έχουμε $\beta(t) \in A$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα ο β είναι ένας δρόμος στον A με αρχή το σημείο $\beta(0) = H(\alpha(0), 1) = H(x_1, 1) = x_1$ και πέρας το σημείο $\beta(1) = H(\alpha(1), 1) = H(x_2, 1) = x_2$, άρα ο A είναι δρομοσυνεκτικός. □

10.4 Ασκήσεις

1. Δίδονται οι υπόχωροι $X = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ και $Y = \{(x, 0)/x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ του $\mathbb{R}^2$.
Είναι οι X, Y ομοιόμορφοι; Είναι οι X, Y ομοτοπικά ισοδύναμοι;

   Υπόδειξη: Οι χώροι δεν είναι ομοιόμορφοι, γιατί, αν αφαιρέσουμε από τον πρώτο το σημείο (0,0), θα έχουμε τρεις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ, αν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο από τον δεύτερο χώρο προκύπτουν το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες. Οι χώροι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, γιατί και για τους δύο ο κύκλος $x^2+(y-1)^2 = 1$ είναι συστολή παραμόρφωσης.

2. Αν $f, g : X \to \mathbb{S}^n_+$ συνεχείς απεικονίσεις, να δειχθεί ότι $f \approx g$.

3. Αν ο χώρος X είναι συσταλτός, να αποδειχθεί ότι για κάθε τοπολογικό χώρο Y ισχύει $X \times Y \approx Y$.
Απόδειξη: Επειδή ο X είναι συσταλτός υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x, 0) = x$ και $H(x, 1) = x_0 \in X$. Επειδή $\{x_0\} \times Y \cong Y$, αρκεί να δειχθεί ότι $\{x_0\} \times Y \approx X \times Y$. Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : X \times Y \to \{x_0\} \times Y$, με $f(x, y) = (x_0, y)$ και $g : \{x_0\} \times Y \to X \times Y$, με $g(x_0, y) = (x_0, y)$. Αν $G : (X \times Y) \times \mathbb{I} \to X \times Y$, με $G((x, y), t) = (H(x, t), y)$, τότε

$$G((x, y), 0) = (H(x, 0), y) = (x, y) = i_{X\times Y}(x, y)$$

   και

$$G((x, y), 1) = (H(x, 1), y) = (x_0, y) = (g \circ f)(x, y).$$

   Άρα $g \circ f \approx i_{X\times Y}$. Επιπλέον έχουμε $f \circ g : \{x_0\} \times Y \to \{x_0\} \times Y$, με $(f \circ g)(x_0, y) = i_{\{x_0\}\times Y}$ για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, άρα $f \circ g \approx i_{\{x_0\}\times Y}$. Επομένως $\{x_0\} \times Y \approx X \times Y$, άρα $X \times Y \approx Y$.

4. Ο χώρος X είναι συσταλτός, αν και μόνον, αν η απεικόνιση $f : X \to X \times X$, με $f(x) = (x, x)$ είναι μηδενοτοπική.
Απόδειξη: Το ικανό: Επειδή η f είναι μηδενοτοπική υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X \times X$, ώστε $H(x, 0) = f(x, x)$ και $H(x, 1) = (x_0, y_0) \in X \times X$ για κάθε $x \in X$. Η απεικόνιση $p_1 \circ H : X \times \mathbb{I} \to X$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών. Επιπλέον

$$(p_1 \circ H)(x, 0) = x \text{ και } (p_1 \circ H)(x, 1) = x_0$$

   για κάθε $x \in X$, άρα ο X είναι συσταλτός.
Το αναγκαίο: Επειδή ο X είναι συσταλτός υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $H(x, 0) = x$ και $H(x, 1) = x_0 \in X$. Η απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \to X \times X$, με $F(x, t) = (H(x, t), H(x, t))$ είναι συνεχής, με

$$F(x, 0) = (H(x, 0), H(x, 0)) = (x, x) = f(x)$$

και

$$F(x,1) = (H(x,1), H(x,1)) = (x_0, x_0)$$

για κάθε $x \in X$. Άρα η f είναι μηδενοτοπική.

5. Έστω X τοπολογικός χώρος. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

   α΄ Ο X είναι συσταλτός.

   β΄ Αν Y είναι τοπολογικός χώρος και $f : Y \to X$ συνεχής απεικόνιση, τότε η f είναι μηδενοτοπική.

   Απόδειξη: $\alpha \Rightarrow \beta$: Ο X είναι συσταλτός, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = x_0$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $F : Y \times \mathbb{I} \to X$, με $F(y,t) = H\big(f(y), t\big)$, για την οποία έχουμε $F(y,0) = H\big(f(y),0\big) = f(y)$ και $F(y,1) = H\big(f(y),1\big) = x_0$, άρα η f είναι μηδενοτοπική.
   $\beta \Rightarrow \alpha$: Η απεικόνιση $i_X : X \to X$ είναι μηδενοτοπική, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ και συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x,0) = i_X(x) = x$ και $H(x,1) = x_0$, άρα ο χώρος X είναι συσταλτός.

6. Αν ο χώρος A είναι συστολή παραμόρφωσης του χώρου X και ο B είναι συστολή παραμόρφωσης του A, να δειχθεί ότι ο B είναι συστολή παραμόρφωσης του X.
   Απόδειξη: Ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του X, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = a(x) \in A$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, αν $a \in A$, τότε $H(a,t) = a$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Ο B είναι συστολή παραμόρφωσης του A, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : A \times \mathbb{I} \to A$, ώστε $G(x,0) = x$ και $G(x,1) = b(x) \in B$ για κάθε $x \in A$. Επιπλέον, αν $b \in B$, τότε $G(b,t) = b$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \to X$, με $F(x,t) = \begin{cases} H(x,t) = F_1(x,t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G\big(H(x,1), 2t-1\big) = F_2(x,t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$. Επειδή $F_1\big(x, \frac{1}{2}\big) = F_1\big(x, \frac{1}{2}\big)$ εφαρμόζεται το λήμμα επικόλλησης, το οποίο μας εξασφαλίζει την συνέχεια της F. Έχουμε ότι $F(x,0) = H(x,0) = x$ και $F(x,1) = G\big(H(x,1),1\big) = G(a,1) = b \in B$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, αν $b \in B$ και $0 \le t \le \frac{1}{2}$, τότε $F(b,t) = H(b,2t) = b$, γιατί $b \in A$. Αν $b \in B$ και $\frac{1}{2} \le t \le 1$, τότε $F(b,t) = G\big(H(b,1), 2t-1\big) = G(b, 2t-1) = b$, άρα ο B είναι συστολή παραμόρφωσης του X.

7. Να αποδειχθεί ότι η λωρίδα Moebius ($\mathbb{M}$) είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τον $\mathbb{S}^1$.
   Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο $A = \big\{\big[(u, \frac{1}{2})\big] \,/\, u \in \mathbb{I}\big\}$ της $\mathbb{M}$. Ακολούθως θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{M} \times \mathbb{I} \to \mathbb{M}$, με $F\big(\big[(u,v)\big], t\big) = \big[(u, (1-t)v + \frac{t}{2})\big]$, η οποία είναι καλώς ορισμένη, γιατί $0 \le (1-t)u + \frac{t}{2} \le 1$ και $(1-t)u + \frac{t}{2} + (1-t)(1-u) + \frac{t}{2} = 1$ για κάθε $(u,t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Επιπλέον η F είναι συνεχής (αποδεικνύεται εύκολα), με

$$F(\big[(u,v)\big], 0) = \big[(u,v)\big] \text{ για κάθε } (u,v) \in \mathbb{M},$$

$$F(\big[(u,v)\big], 1) = \big[(u, \tfrac{1}{2})\big] \in A \text{ για κάθε } \big[(u,v)\big] \in \mathbb{M} \text{ και}$$

$$F\big(\big[(u,\tfrac{1}{2},t)\big]\big) = \big[(u,\tfrac{1}{2})\big] \text{ για κάθε } t \in \mathbb{I}.$$

Άρα το A είναι συστολή παραμόρφωσης της $\mathbb{M}$, επομένως

$$\mathbb{M} \approx A \tag{10.13}$$

Αλλά $A \cong \mathbb{S}^1$, άρα

$$A \approx \mathbb{S}^1 \tag{10.14}$$

Επομένως από τις (10.13) και (10.14) έχουμε ότι $\mathbb{M} \approx \mathbb{S}^1$.

8. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος $GL(\mathbb{R},n)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον χώρο $SO(\mathbb{R},n)$.
Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $F : GL(\mathbb{R},n)\times\mathbb{I} \to GL(\mathbb{R},n)$, με $F(A,t) = (1-t)A + \frac{t}{\det(A)}A$, για την οποία έχουμε

$$F(A,0) = A \text{ για κάθε } A \in GL(\mathbb{R},n),$$

$$F(A,1) = \tfrac{1}{\det(A)}A \in SO(\mathbb{R},n) \text{ για κάθε } A \in GL(\mathbb{R},n) \text{ και}$$

$$F(A,t) = A \text{ για κάθε } A \in SO(\mathbb{R},n) \text{ και για κάθε } t \in \mathbb{I}.$$

Επομένως ο $SO(\mathbb{R},n)$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $GL(\mathbb{R},n)$, άρα

$$GL(\mathbb{R},n) \approx SO(\mathbb{R},n).$$

9. Να αποδειχθεί ότι για τον οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο X ο χώρος $X \times \mathbb{I}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον X.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $F : (X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$, με

$$F\big((x,t),s\big) = \big(x,(1-s)t\big), \text{ για την οποία}$$

$$F\big((x,t),0\big) = (x,t) \text{ για κάθε } (x,t) \in X \times \mathbb{I},$$

$$F\big((x,t),1\big) = (x,0) \in X \times \{0\} \text{ για κάθε } (x,t) \in X \times \mathbb{I} \text{ και}$$

$$F\big((x,0),s\big) = (x,0) \text{ για κάθε } s \in \mathbb{I}.$$

Άρα το $X \times \{0\}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $X \times \mathbb{I}$, άρα

$$X \times \mathbb{I} \approx X \times \{0\}. \tag{10.15}$$

Αλλά $X \times \{0\} \cong X$, άρα

$$X \times \{0\} \approx X. \tag{10.16}$$

Από τις (10.15) και (10.16) έχουμε

$$X \times \mathbb{I} \approx X.$$

10. Θεωρούμε τον χώρο $X = \{(n, y) \,/\, n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}\}$ με την επαγόμενη από τον $\mathbb{R}^2$ τοπολογία και τον υπόχωρό του $A = \{(n, 0) \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$. Να δειχθεί ότι ο A είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον X, αλλά δεν είναι ομοιόμορφος με αυτόν.
Απόδειξη: Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με $h(x, t) = (1 - t)(n, y) + t(n, 0)$, για την οποία έχουμε $H\big((n, y), 0\big) = (n, y)$ και $H\big((n, y), 1\big) = (n, 0) \in A$ για κάθε $(n, y) \in X$. Επιπλέον $H\big((n, 0), t\big) = (n, 0)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του X, επομένως $X \approx A$. Οι χώροι, όμως δεν είναι ομοιόμορφοι, γιατί δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το X είναι υπεραριθμήσιμο, ενώ το A αριθμήσιμο.

11 ΧΩΡΟΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

11.1 Σημειο-ανοικτή τοπολογία

Αν Y είναι ένας τοπολογικός χώρος και X ένα μη κενό σύνολο γεννάται το ερώτημα: πώς μπορούμε να εισαγάγουμε έννοια γειτονικότητας στο σύνολο Y^X των απεικονίσεων από το X στον Y, η οποία θα προέρχεται από την τοπολογία του Y; Είναι η πρώτη φορά που γίνεται σαφές με τόσο φανερό τρόπο ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε απόσταση, γιατί σε κανέναν από τα X ή Y δεν έχουμε ορίσει απόσταση, αφού ο Y δεν είναι απαραίτητα μετρικός χώρος και ο X, ούτε καν τοπολογικός χώρος. Κατά συνέπεια για πρώτη φορά είναι φανερή η ανάγκη προσφυγής σε ποιοτικές λύσεις, δηλαδή λύσεις καθαρά τοπολογικές. Ο πρώτος προτεινόμενος τρόπος είναι, μέσω της σημειο-ανοικτής τοπολογίας ή αλλιώς της τοπολογίας της σημειακής σύγκλισης.

Ορισμός 11.1.1. Αν Y είναι ένας τοπολογικός χώρος και X ένα μη κενό σύνολο, τότε η τοπολογία στον χώρο των απεικονίσεων από το X στον Y, η οποία έχει ως υποβάση τα σύνολα $S(x,U)$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Y, με

$$S(x,U) = \{f \in Y^X / f(x) \in U\}$$

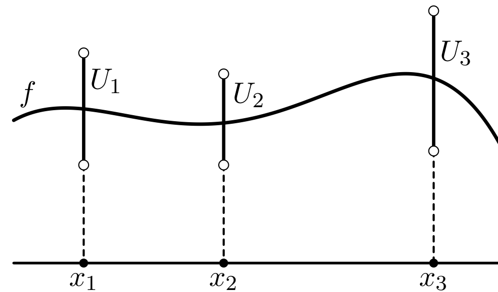
ονομάζεται **σημείο- ανοικτή τοπολογία** ή **τοπολογία της σημειακής σύγκλισης**.

Παρατηρήσεις:

1. Τα σύνολα της μορφής $S(x,U)$ αποτελούν υποβάση για μια τοπολογία στο Y^X, γιατί, αν $f \in Y^X$, τότε $f \in S(x,X)$, άρα η ένωση όλων των στοιχείων $S(x,U)$ είναι το Y^X.

2. Η σημειο-ανοικτή τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία Tychonoff στο γινόμενο $\prod_{x\in X} Y_x$, όπου $Y_x = Y$ για κάθε $x \in X$.

3. Μία βάση της σημειο-ανοικτής τοπολογίας στον Y^X αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $\bigcap_{n=1}^{k} S(x_n, U_n)$, όπου $x_n \in X$ και τα U_n, $n = 1, \ldots, k$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Y (σχήμα 11.1).



Σχήμα 11.1

Πρόταση 11.1.1. *Αν* $f_n \in Y^X$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) $f_n \to f$, *ως προς την σημείο ανοικτή τοπολογία του* Y^X.

β΄) $f_n(x) \to f(x)$ *για κάθε* $x \in X$, *ως προς την τοπολογία του* Y.

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Έστω $x \in X$ και U μια περιοχή του $f(x)$. Επειδή $f_n \to f$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $f_n \in S(x,U)$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f_n(x) \in U$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f_n(x) \to f(x)$.
β') ⇒ α'): Έστω $S(x,U)$ μια υποβασική περιοχή της f. Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $f_n(x) \in U$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, αν $n \geq n_0$, τότε $f_n \in S(x,U)$. Συνεπώς $f_n \to f$, ως προς την σημείο ανοικτή τοπολογία του Y^X. □

Παρατήρηση: Η πιο πάνω πρόταση εξηγεί το γιατί η σημειο-ανοικτή τοπολογία ονομάζεται και τοπολογία της σημειακής σύγκλισης.

11.2 Η συμπαγής-ανοικτή τοπολογία

Στο σύνολο $C(X,Y)$ των συνεχών απεικονίσεων από τον χώρο X στον χώρο Y μπορούμε να εισαγάγουμε μια τοπολογία, διαφορετική από την σημείο-ανοικτή.

Ορισμός 11.2.1. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι. Τα σύνολα της μορφής

$$W(A,U) = \{f \in C(X,Y) / f(A) \subseteq U\}$$

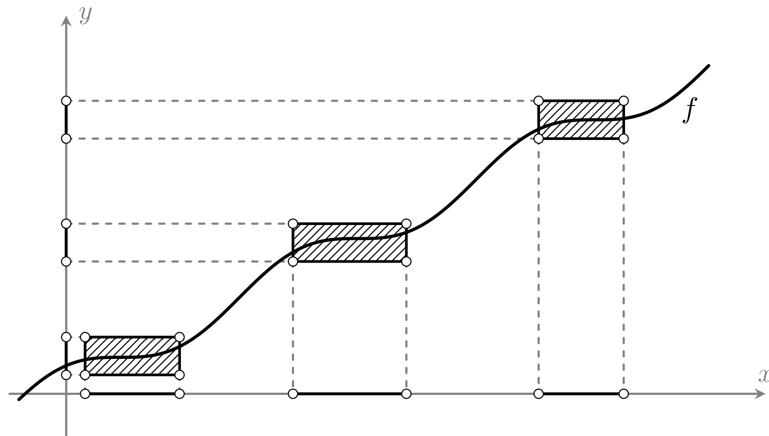
για κάθε συμπαγές υποσύνολο A του X και για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Y αποτελούν υποβάση μιας τοπολογίας στον $C(X,Y)$, η οποία ονομάζεται **συμπαγής-ανοικτή τοπολογία**.

Παρατηρήσεις:

1. Τα σύνολα της μορφής $W(A,U)$ αποτελούν υποβάση για μια τοπολογία στο $C(X,Y)$, γιατί το $\{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$ και, αν $f \in C(X,Y)$, τότε $f(x) \in Y$ Επομένως το $W\big(\{x\},Y\big)$ είναι ένα σύνολο, στο οποίο ανήκει κάθε $f \in C(X,Y)$, άρα η ένωση όλων των $W(A,U)$ είναι το $C(X,Y)$.

2. Στο σχήμα 11.2, φαίνεται ένα βασικό σύνολο της συμπαγούς-ανοικτής τοπολογίας.

3. Η συμπαγής-ανοικτή τοπολογία είναι πλουσιότερη της σημείο-ανοικτής. Πράγματι, έστω W ένα βασικό σύνολο της σημείο-ανοικτής τοπολογίας στον χώρο $C(X,Y)$, άρα υπάρχουν $x_1,...,x_n \in X$ και ανοικτά υποσύνολα $U_1,...,U_n$ του Y, ώστε $W = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i,U_i)$. Αλλά, επειδή τα $\{x_i\}$ είναι συμπαγή υποσύνολα του X τα $S(x_i,U_i)$ είναι υποβασικά, άρα ανοικτά σύνολα της συμπαγούς-ανοικτής τοπολογίας στο $C(X,Y)$, δηλαδή κάθε βασικό σύνολο της σημείο-ανοικτής τοπολογίας περιέχεται στην συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, άρα η δεύτερη είναι πλουσιότερη της πρώτης.



Σχήμα 11.2

Ορισμός 11.2.2. Έστωσαν X, Y και Z τοπολογικοί χώροι και η απεικόνιση $H : X \times Z \to Y$. Ονομάζουμε την απεικόνιση $F : Z \to C(X,Y)$ **επαγόμενη από την** H, αν και μόνον, αν

$$F(z) = f \quad \Leftrightarrow \quad H(x,z) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Παράδειγμα 11.2.1. Η ομοτοπία $H : X \times \mathbb{I} \to Y$ επάγει την απεικόνιση $F : \mathbb{I} \to C(X,Y)$, με $F(t) = f_t : X \to Y$, όπου $f_t(x) = H(x,t)$.

Ορισμός 11.2.3. Η απεικόνιση $e : X \times C(X,Y) \to Y$, με

$$e(x,f) = f(x)$$

ονομάζεται **εκτιμήτρια απεικόνιση**.

Πρόταση 11.2.1. *Αν ο χώρος X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff και ο χώρος $C(X,Y)$ είναι εφοδιασμένος με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, τότε η εκτιμήτρια απεικόνιση είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$, $f \in C(X,Y)$ και V μια περιοχή του $e(x,f) = f(x)$. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $f(U) \subseteq V$. Επειδή ο χώρος X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff, η με ένα σημείο συμπαγοποίηση X_∞ του X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, άρα φυσιολογικός. Το $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου Hausdorff X_∞. Από την φυσιολογικότητα του X_∞, επειδή τα $\{x\}$ και $X_\infty \setminus U$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X_∞ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα U', V' του X_∞, ώστε $x \in U'$ και $X_\infty \setminus U \subseteq V'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (λήμμα 5.2.5), μπορούμε να υποθέσουμε ότι το U' είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Το $\overline{U'}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X_∞. Επιπλέον, $U' \subseteq X_\infty \setminus V'$, άρα

$$\begin{aligned}\overline{U'} &\subseteq \overline{X_\infty \setminus V'}\\ &= X_\infty \setminus V' \subseteq U.\end{aligned}$$

Έχουμε ότι $f(\overline{U'}) \subseteq f(U) \subseteq V$, άρα το $U'' = U' \times W(\overline{U'}, V)$ είναι μία περιοχή του (x,f). Επιπλέον

$$\begin{aligned}(y,g) \in U'' &\Rightarrow y \in U' \wedge g \in W(\overline{U'}, V)\\ &\Rightarrow y \in \overline{U'} \wedge g(y) \in V\\ &\Rightarrow e(y,g) \in V\,.\end{aligned}$$

Επομένως $e(U'') \subseteq V$, άρα η e είναι συνεχής. □

Πρόταση 11.2.2. *Αν ο χώρος $C(X,Y)$ είναι εφοδιασμένος με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, Z τοπολογικός χώρος και η $H : X \times Z \to Y$ είναι συνεχής, τότε η επαγόμενη από την H απεικόνιση $F : Z \to C(X,Y)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε τη συνέχεια της F σε ένα αυθαίρετα επιλεγμένο $z \in Z$. Έστω $W(K,U)$ ένα υποβασικό σύνολο του $C(X,Y)$, με $F(z) = g_z \in W(K,U)$. Άρα $g_z(x) \in U$ για κάθε $x \in K$, άρα $H(x,z) = g_z(x) \in U$ για κάθε $x \in K$. Επειδή η H είναι συνεχής, το $H^{-1}(U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$, με $(x,z) \in H^{-1}(U)$ για κάθε $x \in K$, άρα $K \times \{z\} \subseteq H^{-1}(U)$. Έστω $\{A_i \times B_j/(i,j) \in I \times J\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $K \times \{z\}$, όπου τα $B_j, j \in J$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Z, με $z \in B_j$ για κάθε $j \in J$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A_i \times B_j \subseteq H^{-1}(U)$ για κάθε $(i,j) \in I \times J$. Το παραπάνω κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{A_{i_k} \times B_{j_r}/k = 1,2,\ldots,n \wedge r = 1,2,\ldots,m\}$. Το $V = \bigcap_{r=1}^{m} B_{j_r}$ είναι μια περιοχή του z στον χώρο Z. Αν $z \in V$, τότε $g_z(x) = H(x,z) \in K \times V \subseteq H^{-1}(U)$ για κάθε $x \in K$, άρα $g_z(x) \in H^{-1}(U)$ για κάθε $x \in K$, άρα $g_z = F(z) \in F(V) \subseteq W(K,U)$. Επομένως η F είναι συνεχής στο z. □

Αν, επιπλέον ο χώρος X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff, τότε ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Πρόταση 11.2.3. *Αν ο χώρος $C(X,Y)$ έχει τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, Z τοπολογικός χώρος, ο X είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff και η επαγόμενη απεικόνιση $F : Z \to C(X,Y)$ είναι συνεχής, τότε και η H, που επάγει την F, κατά τον ορισμό 11.2.2 είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Από την πρόταση 11.2.1 έχουμε ότι η εκτιμήτρια απεικόνιση $e : X \times C(X,Y) \to Y$, με $e(x,f) = f(x)$ είναι συνεχής. Επίσης η απεικόνιση $G : X \times Z \to X \times C(X,Y)$, με $G(x,z) = (x, F(z))$ είναι συνεχής, επειδή οι συνιστώσες απεικονίσεις είναι συνεχείς.
Άρα η $H = e \circ G$ είναι συνεχής. □

Πρόταση 11.2.4. *Κάθε κλάση ομοτοπίας στον $C(X,Y)$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $C(X,Y)$.*

Απόδειξη: Έστω A μια κλάση ομοτοπίας στον $C(X,Y)$ και $f, g \in A$. Άρα, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε

$$H(x,0) = f(x) \text{ και } H(x,1) = g(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Από την πρόταση 11.2.2 έχουμε ότι η H επάγει συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{I} \to C(X,Y)$, ώστε

$$F(i) = h_i \quad \Leftrightarrow \quad H(x,i) = h_i(x).$$

Επομένως για κάθε $x \in X$ είναι

$$F(0) = H(x,0) = f(x) \text{ και } F(1) = H(x,1) = g(x) \text{ για κάθε } x \in X,$$

δηλαδή η F είναι ένας δρόμος στον $C(X,Y)$ με αρχή την f και πέρας την g. Επομένως το A είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $C(X,Y)$. □

Πρόταση 11.2.5. *Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος και οι f, g ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεκτική συνιστώσα του $C(X,Y)$, όπου ο χώρος $C(X,Y)$ είναι εφοδιασμένος με τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, τότε $f \approx g$.*

Απόδειξη: Επειδή οι f και g ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεκτική συνιστώσα του $C(X,Y)$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to C(X,Y)$, με $\gamma(0) = f \wedge \gamma(1) = g$. Επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, με $H(x,t) = \gamma(t)$ είναι συνεχής (πρόταση 11.2.3) και, επιπλέον $H(x,0) = \gamma(0) = f$ και $H(x,1) = \gamma(1) = g$, άρα $f \approx g$. □

Παρατήρηση: Δηλαδή, αν ο X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff χώρος, τότε οι κλάσεις ομοτοπίας του $C(X,Y)$ είναι ακριβώς οι δρομοσυνεκτικές του συνιστώσες.

Ορισμός 11.2.4. Έστωσαν X τοπολογικός χώρος και (Y,d) μετρικός χώρος. Μία ακολουθία απεικονίσεων $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέμε ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή** στην απεικόνιση $f : X \to Y$, αν και μόνον, αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο G του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(G, \varepsilon)$, ώστε για κάθε $x \in G$ να ισχύει

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Πρόταση 11.2.6. *Αν X τοπολογικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος και $f_n \in C(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή στην f.

β΄) $f_n \to f$, ως προς τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία του $C(X,Y)$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Έστω $W(G,U)$ ένα υποβασικό σύνολο του χώρου $C(X,Y)$, ως προς τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία με $f \in W(G,U)$. Επειδή η f είναι συνεχής το $f(G)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Επιπλέον $f(G) \subseteq U$, άρα $f(G) \cap U^c = \varnothing$, άρα (άσκηση 7.7.1β)

$$d(f(G), U^c) = \varepsilon > 0.$$

Επειδή η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή στην f υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $x \in G$ να ισχύει

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow d(f_n(x), f(G)) \leq d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως $f_n(x) \notin U^c$ για κάθε $n > n_0$ και για κάθε $x \in G$, άρα $f_n(x) \in U$ για κάθε $n > n_0$ και για κάθε $x \in G$, δηλαδή

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow f_n(G) \subseteq U \\ &\Rightarrow f_n \in W(G,U)\,, \end{aligned}$$

συνεπώς $f_n \to f$.

β') $\Rightarrow$ α'): Έστω G ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $\varepsilon > 0$. Επειδή το G είναι συμπαγές και η f συνεχής το $f(G)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, άρα ολικά φραγμένο.
Επομένως υπάρχουν $p_1, p_2, \ldots, p_k \in Y$, ώστε

$$f(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S\big(p_i, \tfrac{\varepsilon}{3}\big). \tag{11.1}$$

Θέτουμε $S(p_i, \frac{\varepsilon}{3}) = S_i$ και έχουμε $\overline{S_i} \subseteq S(p_i, \frac{2\varepsilon}{3}) = U_i, i = 1, \ldots, k$. Από την (11.1), συμπεραίνουμε ότι

$$f(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i} \Rightarrow G \subseteq f^{-1}\big(f(G)\big) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}\Big).$$

Θέτουμε $G_i = G \cap f^{-1}(\overline{S}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, άρα $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$. Τα $f^{-1}(\overline{S_i})$ είναι κλειστά υποσύνολα του X, άρα τα $G_i = G \cap f^{-1}(\overline{S_i})$ είναι συμπαγή υποσύνολα του X. Επιπλέον

$$\begin{aligned} f(G_i) = f(G \cap f^{-1}(\overline{S_i})) &\subseteq f(G) \cap f(f^{-1}(\overline{S_i})) \\ &\subseteq f(G) \cap \overline{S_i} \\ &\subseteq \Big(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\Big) \cap U_i = U_i\,. \end{aligned}$$

Επομένως τα $W(G_i, U_i)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $C(X,Y)$, με $f \in W(G_i, U_i)$, $i = 1, \ldots, k$, άρα $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} W(G_i, U_i)$. Το $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W(G_i, U_i)$ είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του $C(X,Y)$, επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad f_n \in \bigcap_{i=1}^{k} W(G_i, U_i).$$

Αν $x \in G$, τότε $x \in G_j$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, k\}$, άρα

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow f_n(x) \in f_n(G_j) \subseteq U_j \\ &\Rightarrow d(f_n(x), p_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} \wedge d(f(x), p_j) < \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), p_j) + d(p_j, f(x)) < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

άρα η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή στην f. □

12 Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ

12.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Τα κεφάλαια που προηγήθηκαν αφορούσαν τον κλάδο της τοπολογίας που είναι γνωστός ως γενική ή συνολοθεωρητική τοπολογία. Ο κλάδος αυτός, απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης έχει μεγάλη δυσχέρεια στην επίλυση βασικών τοπολογικών προβλημάτων, γεωμετρικής κυρίως φύσης. Για παράδειγμα στο θέμα της κατάταξης των τοπολογικών χώρων τα δύο βασικά επιχειρήματα της συνεκτικότητας και της συμπάγειας αδυνατούν να αιτιολογήσουν το διαισθητικά προφανές γεγονός της μη ομοιομορφίας των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ ή των χώρων $\mathbb{S}^n$ και $\mathbb{S}^m$, στην γενική περίπτωση, όταν $n \neq m$. Άλλο ένα παράδειγμα: με επιχειρήματα γενικής τοπολογίας δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο γιατί δεν υπάρχει συστολή του δίσκου $\mathbb{D}^2$ στο σύνορο του $\mathbb{S}^1$ ή γιατί οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$ δεν είναι συσταλτοί χώροι ή, γιατί μία συνεχής απεικόνιση από τον $\mathbb{D}^2$ στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο κ.ο.κ. Αντιθέτως η αλγεβρική τοπολογία έχει πολύ μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων.

Στην αλγεβρική τοπολογία, όπως έχουμε ήδη επισημάνει από το κεφάλαιο 10 αντιστοιχούμε στους τοπολογικούς χώρους αλγεβρικές δομές, οι οποίες είναι αναλλοίωτα στις ομοτοπικές ισοδυναμίες και μελετούμε αυτούς μέσω των αλγεβρικών αυτών δομών. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε δύο είδη τέτοιων δομών, τις ομάδες ομοτοπίας και της ομάδες ομολογίας. Οι απαρχές της αλγεβρικής τοπολογίας βρίσκονται στο έργο που παρουσίασε στα τέλη του 19ου αιώνα ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός H. Poincare και του έδωσε τον τίτλο Analysis Situs. Έως την καθοριστική παρέμβαση το 1942, των Eilenberg και Stenrood, πολλοί μαθηματικοί, τους οποίους θα συναντήσουμε στην τελευταία παράγραφο του βιβλίου, συνέβαλαν στην ανάπτυξη της αλγεβρική τοπολογίας.

Αρχίζουμε την ενασχόληση μας από τον πρώτο όρο της ακολουθίας ομάδων, οι οποίες είναι γνωστές με το όνομα ομάδες ομοτοπίας, ο οποίος αναφέρεται ως θεμελιώδης ομάδα του χώρου, στον οποίον αντιστοιχεί.

Ορισμός 12.1.1. Έστωσαν X τοπολογικός χώρος και α, β δύο δρόμοι στον X με αρχή το σημείο $x_1 \in X$ και πέρας το σημείο $x_2 \in X$, δηλαδή

$$\alpha(0) = \beta(0) = x_1 \text{ και } \alpha(1) = \beta(1) = x_2.$$

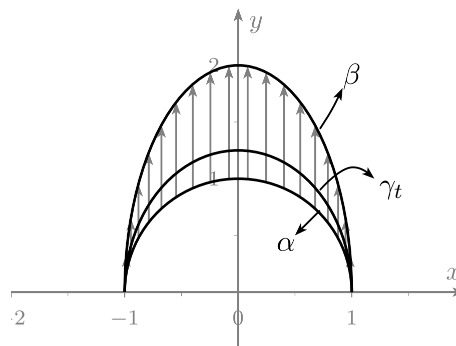
Οι α, β ονομάζονται **ομοτοπικοί** (συμβολισμός $\alpha \approx_p \beta$), αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, ώστε $H(0, s) = x_1$ και $H(1, s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επιπλέον δε $H(t, 0) = \alpha(t)$ και $H(t, 1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, ή αλλιώς υπάρχει οικογένεια δρόμων $\gamma_t, t \in \mathbb{I}$ στον X, οι οποίοι έχουν αρχή το σημείο x_1 και πέρας το σημείο x_2, ώστε $\gamma_0 = \alpha$ και $\gamma_1 = \beta$. Με άλλα λόγια οι συνεχείς απεικονίσεις α και β είναι ομοτοπικές σε σχέση με το σύνολο $\{0, 1\}$. Η απεικόνιση H ονομάζεται **ομοτοπία των δρόμων** α και β.

Ορισμός 12.1.2. Έστω X τοπολογικός χώρος. Μία συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ ονομάζεται **ελεύθερη ομοτοπία δρόμων** στον X, αν και μόνον, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$, ώστε

$$H(0, s) = x_1 \text{ και } H(1, s) = x_2 \text{ για κάθε } s \in \mathbb{I}.$$

Παραδείγματα 12.1.1.

1. Ας εξετάσουμε τους δρόμους α, με $\alpha(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $t \in \mathbb{I}$ και β, με $\beta(t) = (\cos \pi t, 2 \sin \pi t)$, $t \in \mathbb{I}$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Και οι δύο έχουν αρχή το σημείο $x_1 = (1, 0)$ και πέρας το σημείο $x_2 = (-1, 0)$. Η απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, με $H(t, s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t)$ είναι προφανώς συνεχής, με $H(0, s) = x_1$ και $H(1, s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.
   Επιπλέον $H(t, 0) = \alpha(t)$ και $H(t, 1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα οι δρόμοι α και β είναι ομοτοπικοί, το οποίο διαισθητικά σημαίνει ότι ο ένας μπορεί να μετασχηματιστεί στον άλλον, με συνεχή τρόπο μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα 12.1.



Σχήμα 12.1

2. Όμως οι δρόμοι γ, με $\gamma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $t \in \mathbb{I}$ και δ, με $\delta(t) = (\cos \pi t, -\sin \pi t)$ $t \in \mathbb{I}$ στο τρυπημένο επίπεδο $(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ δεν είναι ομοτοπικοί. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού αναβάλλεται για το επόμενο κεφάλαιο, λόγω έλλειψης καταλλήλων επιχειρημάτων. Μία διαισθητική εξήγηση του ισχυρισμού αυτού είναι ότι η τρύπα "δεν αφήνει" το δρόμο γ να μετασχηματιστεί συνεχώς στον δρόμο δ.

Πρόταση 12.1.1. *Η σχέση $\approx_p$ στο σύνολο $P_{(x_1,x_2)}$ των δρόμων στον χώρο X, οι οποίοι έχουν αρχή το σημείο $x_1 \in X$ και πέρας το σημείο $x_2 \in X$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

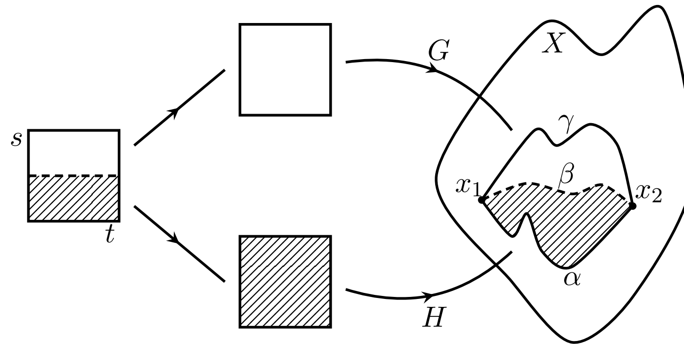
Απόδειξη: α΄) Έστω $\alpha \in P_{(x_1,x_2)}$ Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με $H(t,s) = \alpha(t)$. Έχουμε $H(0,s) = \alpha(0) = x_1$ και $H(1,s) = \alpha(1) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επιπλέον $H(t,0) = \alpha(t)$ και $H(t,1) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα $\alpha \approx_p \alpha$. Συνεπώς η $\approx_p$ είναι ανακλαστική.

β΄) Έστωσαν $\alpha, \beta \in P_{(x_1,x_2)}$, με $\alpha \approx_p \beta$. Άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to X$, με $H(0,s) = x_1$ και $H(1,s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $H(t,0) = \alpha(t)$ και $H(t,1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.
Θεωρούμε την $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με $G(t,s) = H(t,1-s)$ και έχουμε $G(0,s) = H(0,1-s) = x_1$ και $G(1,s) = H(1,1-s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $G(t,0) = H(t,1) = \beta(t)$ και $G(t,1) = H(t,0) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα $\beta \approx_p \alpha$. Συνεπώς η $\approx_p$ είναι συμμετρική.

γ΄) Έστωσαν $\alpha, \beta, \gamma \in P_{(x_1,x_2)}$, με $\alpha \approx_p \beta$ και $\beta \approx_p \gamma$. Άρα υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ και $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με $H(0,s) = x_1$ και $H(1,s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $H(t,0) = \alpha(t)$ και $H(t,1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Επιπλέον $G(0,s) = x_1$ και $G(1,s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $G(t,0) = \beta(t)$ και $G(t,1) = \gamma(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με

$$F(t,s) = \begin{cases} H(t,2s), & t \in \mathbb{I} \wedge 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(t,2s-1), & t \in \mathbb{I} \wedge \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases},$$

η οποία είναι προφανώς συνεχής (πρόταση 2.1.8). Επιπλέον, ισχύουν τα $F(0,s) = H(0,2s) = G(0,2s-1) = x_1$ και $F(1,s) = H(1,2s) = G(1,2s-1) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $F(t,0) = H(t,0) = \alpha(t)$ και $F(t,1) = G(t,1) = \gamma(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα $\alpha \approx_p \gamma$. Συνεπώς η $\approx_p$ είναι μεταβατική (σχήμα 12.2). Επομένως η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

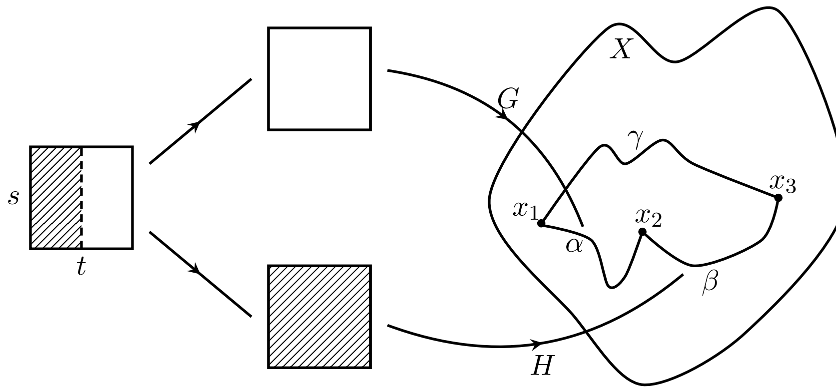


Σχήμα 12.2

□

Υπενθυμίζουμε την έννοια της σύνθεσης δύο δρόμων που ορίσαμε στο κεφάλαιο 4. Αν α είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το x_1 και πέρας το x_2, β ένας δρόμος στον X, με αρχή το x_2 και πέρας το x_3, τότε ορίζουμε ως σύνθεση των δρόμων α και β την απεικόνιση $\alpha * \beta$, για την οποία:

$$(a * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 12.3

Συνέπεια της πρότασης 2.1.8 είναι το ότι η απεικόνιση $\alpha * \beta : \mathbb{I} \to X$ είναι συνεχής, άρα είναι δρόμος στον X, με αρχή το x_1 και πέρας το x_3. Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική, γιατί ουσιαστικά σ' αυτή στηρίζεται ο ορισμός της πράξης της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου.

Πρόταση 12.1.2. *Έστωσαν X τοπολογικός χώρος x_1, x_2, $x_3 \in X$, α, α' δύο δρόμοι στον X, με αρχή το x_1 και πέρας το x_2 και β, β' δύο δρόμοι στον X, με αρχή το x_2 και πέρας το x_3. Αν $\alpha \approx_p \alpha'$ και $\beta \approx_p \beta'$, τότε*

$$\alpha * \beta \approx \alpha' * \beta'.$$

Απόδειξη: Έστωσαν $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ μία ομοτοπία των δρόμων α, α' και $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ μία ομοτοπία των δρόμων β, β'. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}] \wedge s \in \mathbb{I} \\ G(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \wedge s \in \mathbb{I} \end{cases}$$

(σχήμα 12.3). Επειδή $H(1,s) = G(0,s) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$, η F είναι καλώς ορισμένη και συνεχής (πρόταση 2.1.8), με

$$F(0,s) = H(0,s) = x_1 \text{ και } F(1,s) = G(1,s) = x_3.$$

Επιπλέον,

$$F(t,0) = \begin{cases} H(2t,0), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,0), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\alpha * \beta)(t)$$

και

$$F(t,1) = \begin{cases} H(2t,1), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha'(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta'(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\alpha' * \beta')(t)\,,$$

άρα η F είναι μια ομοτοπία μεταξύ των $\alpha * \beta$ και $\alpha' * \beta'$, επομένως

$$\alpha * \beta \approx_p \alpha' * \beta'.$$

□

Ορισμός 12.1.3. **Αναπαραμέτρηση** ονομάζουμε κάθε συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, με

$$f(0) = 0 \text{ και } f(1) = 1.$$

Παραδείγματα 12.1.2. Η απεικόνιση $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, με $f(t) = t^2$, καθώς και η $g : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, με $g(t) = t^3$ είναι αναπαραμετρήσεις.

Λήμμα 12.1.3. *Αν α ένας δρόμος στον χώρο X και $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ μία αναπαραμέτρηση, τότε*

$$\alpha \circ f \approx_p \alpha.$$

Απόδειξη: Επειδή $(\alpha \circ f)(0) = \alpha(0) = x_1$ και $(\alpha \circ f)(1) = \alpha(1) = x_2$ ο $\alpha \circ f$ είναι ένας δρόμος στον X με την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας με τον α. Επειδή, αν $t, s \in \mathbb{I}$, τότε $sf(t) + (1-s)t \in \mathbb{I}$, η απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με $H(t,s) = \alpha(sf(t) + (1-s)t)$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Ισχύουν τα $H(0,s) = \alpha(0) = x_1$ και $H(1,s) = \alpha(1) = x_2$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης τα $H(t,0) = \alpha(t)$ και $H(t,1) = (\alpha \circ f)(t)$ $t \in \mathbb{I}$. Άρα η H είναι μια ομοτοπία μεταξύ των α και $\alpha \circ f$, συνεπώς $\alpha \approx_p \alpha \circ f$. □

Πρόταση 12.1.4. *Αν α, β, γ δρόμοι στον χώρο X, με $\alpha(1) = \beta(0)$ και $\beta(1) = \gamma(0)$, τότε*

$$(\alpha * \beta) * \gamma \approx_p \alpha * (\beta * \gamma).$$

Απόδειξη: Είναι

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1), & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

και

$$(\alpha*(\beta*\gamma))(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \beta(4t-2), & \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4}\\ \gamma(4t-3), & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}.$$

Ορίζουμε την συνεχή απεικόνιση $f:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$, με

$$f(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le \frac{1}{4}\\ t+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{2}\\ \frac{t}{2}+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases},$$

για την οποία έχουμε $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Άρα η f είναι μία αναπαραμέτρηση. Επιπλέον $(\alpha*(\beta*\gamma))\circ f=((\alpha*\beta)*\gamma)$, άρα από το λήμμα 12.1.3, συμπεραίνουμε ότι

$$(\alpha*(\beta*\gamma))\approx_p((\alpha*\beta)*\gamma).$$

□

Πρόταση 12.1.5. *Έστω α ένας δρόμος στον χώρο X, με $\alpha(0)=x_1$ και $\alpha(1)=x_2$, τότε*

α΄) $e_1*\alpha\approx_p\alpha$, όπου $e_1(t)=x_1$ για κάθε $t\in\mathbb{I}$ και

β΄) $\alpha*e_2\approx_p\alpha$, όπου $e_2(t)=x_2$ για κάθε $t\in\mathbb{I}$.

Απόδειξη:

α΄) Είναι

$$(e_1*\alpha)(t)=\begin{cases}x_1, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}.$$

Η απεικόνιση $f:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$, με $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 2t-1, & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$ είναι συνεχής, με $f(0)=0$ και $f(1)=1$, άρα είναι μία αναπαραμέτρηση. Επιπλέον

$$(\alpha\circ f)(t)=\begin{cases}x_1, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}=(e_1*\alpha)(t),$$

άρα $e_1*\alpha\approx_p\alpha$ (λήμμα 12.1.3).

β΄) Είναι

$$(\alpha*e_2)(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ x_2, & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}.$$

Η απεικόνιση $g:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$, με $g(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$ είναι συνεχής, με $g(0)=0$ και $g(1)=1$, άρα είναι μία αναπαραμέτρηση. Επιπλέον

$$(\alpha \circ g)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ x_2, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = (\alpha * e_2)(t),$$

άρα $\alpha * e_2 \approx_p \alpha$ (λήμμα 12.1.3).

Ορισμός 12.1.4. Αν α είναι ένας δρόμος στον χώρο X, τότε η συνεχής απεικόνιση $\overline{\alpha} : \mathbb{I} \to X$, με

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$$

είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το σημείο $\alpha(1)$, δηλαδή το πέρας του α και πέρας το σημείο $\alpha(0)$, δηλαδή την αρχή του α. Ο δρόμος $\overline{\alpha}$ ονομάζεται **αντίστροφος του** α.

Πρόταση 12.1.6. *Έστω α ένας δρόμος στον χώρο X, με $\alpha(0) = x_1$ και $\alpha(1) = x_2$, τότε:*

α΄) $\alpha * \overline{\alpha} \approx_p e_1$, όπου $e_1(t) = x_1$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και

β΄) $\overline{\alpha} * \alpha \approx_p e_2$, όπου $e_2(t) = x_2$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Απόδειξη:

α΄) Είναι

$$(\alpha * \overline{\alpha})(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \overline{\alpha}(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, με $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2-2t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ και $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με $H(t,s) = \alpha(sf(t))$. Ισχύουν τα

$$\begin{aligned} H(0,s) &= \alpha(0) \\ &= \alpha(sf(1)) = H(1,s) \\ &\Rightarrow H(0,s) = H(1,s) = x_1 \end{aligned}$$

για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Επίσης $H(t,0) = \alpha(0) = x_1 = e_1$ και $H(t,1) = \alpha(f(t)) = (\alpha \circ f)(t) = (\alpha * \overline{\alpha})(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα η H είναι μια ομοτοπία μεταξύ των δρόμων $\alpha * \overline{\alpha}$ και e_1. Επομένως $\alpha * \overline{\alpha} \approx_p e_1$.

β΄) Αποδεικνύεται όπως το α').

□

Ορισμός 12.1.5. Ως **βρόχο στον χώρο** X **με βάση το σημείο** $x_0 \in X$ ορίζουμε κάθε συνεχή απεικόνιση $\alpha : \mathbb{I} \to X$, για την οποία ισχύει $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Το σύνολο των βρόχων του X, με βάση το σημείο x_0 συμβολίζουμε με $L(X, x_0)$.

Παρατήρηση: Βρόχοι είναι οι δρόμοι, στους οποίους η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Επομένως, ως ειδικές περιπτώσεις δρόμων έχουν όλες τις ιδιότητες των δρόμων που περιγράψαμε προηγουμένως και τις οποίες θα συναντήσουμε και στις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 12.1.7. *Η σχέση $\approx_p$ στο σύνολο $L(X, x_0)$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της πρότασης 12.1.1.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, τις οποίες ορίζει η σχέση $\approx_p$ στο σύνολο $L(X, x_0)$ συμβολίζουμε με $\pi_1(X, x_0)$ και την κλάση ισοδυναμίας, στην οποία ανήκει ο βρόχος α συμβολίζουμε με $[\alpha]$.

Ορισμός 12.1.6. Στο σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια της πρότασης 12.1.2 είναι ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού των κλάσεων των βρόχων είναι καλώς ορισμένη.

Πρόταση 12.1.8. *Το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$, με την πράξη του πολλαπλασιασμού των κλάσεων είναι ομάδα.*[1]

Απόδειξη:

α΄) Είναι

$$\begin{aligned}\big([\alpha][\beta]\big)[\gamma] &= [\alpha * \beta][\gamma] \\ &= [(\alpha * \beta) * \gamma]\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}[\alpha]\big([\beta][\gamma]\big) &= [\alpha][\beta * \gamma] \\ &= [\alpha * (\beta * \gamma)]\,.\end{aligned}$$

Αλλά από την πρόταση 12.1.4 έχουμε ότι $\alpha * (\beta * \gamma) \approx_p (\alpha * \beta) * \gamma$, συνεπώς

$$[\alpha]\big([\beta][\gamma]\big) = \big([\alpha][\beta]\big)[\gamma].$$

Άρα η πράξη του πολλαπλασιασμού των στοιχείων της $\pi_1(X, x_0)$ είναι προσεταιριστική.

β΄) Θέτουμε $e_1 = e_2 = e$. Από την πρόταση 12.1.5 έχουμε ότι $e * \alpha = \alpha * e = \alpha$, άρα

$$[e][\alpha] = [\alpha][e] = [\alpha].$$

Συνεπώς η κλάση $[e]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης του πολλαπλασιασμού κλάσεων. Ο e ονομάζεται **ταυτοτικός βρόχος** στο x_0.

[1] Χρησιμοποιούμε τον δείκτη 1 στο γράμμα π, γιατί, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 19 σε έναν τοπολογικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε ομοτοπικές ομάδες τάξης μεγαλύτερης του 1, για τις οποίες στο γράμμα π, ως δείκτη θα έχουμε την τάξη τους.

γ΄) Για την κλάση $[\overline{\alpha}]$ έχουμε (πρόταση 12.1.6)

$$[\alpha][\overline{\alpha}] = [\alpha * \overline{\alpha}] = [e] \text{ και } [\overline{\alpha}][\alpha] = [\overline{\alpha} * \alpha] = [e].$$

Συνεπώς η κλάση $[\overline{\alpha}]$ είναι το συμμετρικό στοιχείο της κλάσης $[\alpha]$, ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Άρα η $\pi_1(X, x_0)$ είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό των κλάσεων ομοτοπικής ισοδυναμίας των βροχών στον X με βάση το x_0. □

Παρατήρηση: Η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ δεν είναι απαραίτητα αβελιανή. Στο τέλος του κεφαλαίου 14 θα δούμε παράδειγμα τοπολογικού χώρου, ο οποίος έχει μη αβελιανή θεμελιώδη ομάδα.

Ορισμός 12.1.7. Αν X τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$ η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ ονομάζεται **θεμελιώδης ομάδα του X με βάση το x_0.**

Πρόταση 12.1.9. *Έστω G τοπολογική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το e. Τότε η $\pi_1(G, e)$ είναι αβελιανή.*

Απόδειξη: Στο σύνολο $L(G, e)$ των βρόγχων με βάση το e ορίζουμε πράξη $\bullet$, ως εξής

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t),$$

για κάθε $\alpha, \beta \in L(G, e)$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Η πράξη $\bullet$ επάγει στην $\pi_1(G, e)$ την πράξη

$$\odot\colon [\alpha] \odot [\beta] = [\alpha \bullet \beta]$$

για κάθε $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$, η οποία είναι καλώς ορισμένη.[2] Αν c είναι ο σταθερός βρόχος με βάση το e, τότε

$$\begin{aligned} \big((\alpha * c) \bullet (c * \beta)\big)(t) &= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e = \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e \cdot \beta(2t-1) = \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (\alpha * \beta)(t) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \big((c * \alpha) \bullet (\beta * c)\big)(t) &= \begin{cases} e \cdot \beta(2t) = \beta(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot e = \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (\beta * \alpha)(t)\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} [\alpha][\beta] &= [\alpha * \beta] \\ &= \big[(\alpha * c) \bullet (c * \beta)\big] = [\alpha * c] \odot [c * \beta] \\ &= [c * \alpha] \odot [\beta * c] = \big[(c * \alpha) \bullet (\beta * c)\big] \\ &= [\beta * \alpha] = [\beta][\alpha]\,. \end{aligned}$$

Επομένως η $\pi_1(G, e)$ είναι αβελιανή. □

[2]Τον ισχυρισμό ότι η πράξη $\odot$ είναι καλώς ορισμένη θα αποδείξουμε στο λήμμα που έπεται.

Λήμμα 12.1.10. *Η πράξη $\odot$ που αναφέραμε στην προηγούμενη απόδειξη, είναι καλώς ορισμένη.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in L(G, e)$, με $[\alpha] = [\alpha']$ και $[\beta] = [\beta']$, τότε $\alpha \approx_p \alpha'$ και $\beta \approx_p \beta'$. Άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to G$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $H(0, s) = H(1, s) = e$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $H(t, 0) = \alpha(t)$ και $H(t, 1) = \alpha'(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Επίσης υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to G$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

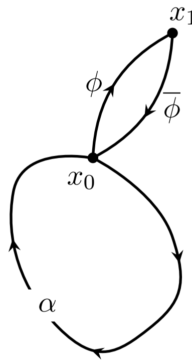
- $G(0, s) = G(1, s) = e$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $G(t, 0) = \beta(t)$ και $G(t, 1) = \beta'(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Η απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to G$, με $F(t, s) = H(t, s)G(t, s)$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $F(0, s) = H(0, s)G(0, s) = e$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$,
- $F(1, s) = H(1, s)G(1, s) = e$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.
- $F(t, 0) = \alpha(t)\beta(t) = (\alpha \bullet \beta)(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $H(t, 1) = \alpha'(t)\beta'(t) = (\alpha' \bullet \beta')(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$,

άρα $\alpha \bullet \beta \approx_p \alpha' \bullet \beta'$, άρα $[\alpha \bullet b] = [\alpha' \bullet \beta']$, άρα $\alpha \odot \beta = \alpha' \odot \beta'$, επομένως η πράξη $\odot$ είναι καλώς ορισμένη. $\square$

Πρόταση 12.1.11. *Αν ϕ είναι ένας δρόμος στον χώρο X από το σημείο $x_0 \in X$ στο σημείο $x_1 \in X$ και $\alpha \in L(X, x_0)$, τότε $\overline{\phi} * \alpha * \phi \in L(X, x_1)$.*



Σχήμα 12.4

Απόδειξη: Είναι (σχήμα 12.4)

$$(\overline{\phi} * \alpha * \phi)(t) = \begin{cases} \overline{\phi}(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \alpha(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \phi(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

άρα η $\overline{\phi} * \alpha * \phi$ είναι μια συνεχής απεικόνιση του $\mathbb{I}$ στον X (πρόταση 2.1.8).
Επιπλέον $(\overline{\phi} * \alpha * \phi)(0) = \overline{\phi}(0) = x_1$ και $(\overline{\phi} * \alpha * \phi)(1) = \phi(1) = x_1$, συνεπώς η $\overline{\phi} * \alpha * \phi$ είναι ένας βρόχος στον X με βάση το σημείο x_1, δηλαδή $\overline{\phi} * \alpha * \phi \in L(x, x_1)$. □

Πρόταση 12.1.12. *Αν ϕ είναι ένας δρόμος στον χώρο X με αρχή το σημείο x_0 και πέρας το σημείο x_1, τότε η απεικόνιση $\hat{\phi} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, με*

$$\hat{\phi}([\alpha]) = [\overline{\phi} * \alpha * \phi]$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη:

- Πρώτο βήμα: Αν e είναι ο ταυτοτικός βρόχος με βάση το x_0, τότε

$$\begin{aligned} \hat{\phi}([\alpha][\beta]) &= \hat{\phi}([\alpha * \beta]) \\ &= [\overline{\phi} * \alpha * \beta * \phi] \\ &= [(\overline{\phi} * \alpha * e) * (\beta * \phi)] \\ &= [(\overline{\phi} * \alpha * \phi * \overline{\phi}) * (\beta * \phi)] \\ &= [(\overline{\phi} * \alpha * \phi) * (\overline{\phi} * \beta * \phi)] \\ &= [(\overline{\phi} * \alpha * \phi)][(\overline{\phi} * \beta * \phi)] \\ &= \hat{\phi}([\alpha])\hat{\phi}([\beta]) \, , \end{aligned}$$

  άρα η $\hat{\phi}$ είναι ομομορφισμός.

- Δεύτερο βήμα:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}([\alpha]) = \hat{\phi}([\beta]) &\Rightarrow [\overline{\phi} * \alpha * \phi] = [\overline{\phi} * \beta * \phi] \\ &\Rightarrow \overline{\phi} * \alpha * \phi \approx_p \overline{\phi} * \beta * \phi \\ &\Rightarrow \phi * \overline{\phi} * \alpha * \phi * \overline{\phi} \approx_p \phi * \overline{\phi} * \beta * \phi * \overline{\phi} (*) \\ &\Rightarrow e * \alpha * e \approx_p e * \beta * e \\ &\Rightarrow \alpha \approx_p \beta \\ &\Rightarrow [\alpha] = [\beta] \, , \end{aligned}$$

  άρα η $\hat{\phi}$ είναι 1-1.
  (*): Εδώ εφαρμόζουμε την πρόταση 12.1.2

- Τρίτο βήμα:

$$\begin{aligned} [\beta] \in \pi_1(X, x_1) &\Rightarrow [\alpha] = [\phi * \beta * \overline{\phi}] \in \pi_1(X, x_0) \\ &\Rightarrow \hat{\phi}([\alpha]) = [\overline{\phi} * \phi * \beta * \overline{\phi} * \phi] = [\beta] \, , \end{aligned}$$

  άρα η $\hat{\phi}$ είναι επί.

Συνεπώς η $\hat{\phi}$ είναι ισομορφισμός. □

Παρατήρηση: Με άλλα λόγια η θεμελιώδης ομάδα ενός χώρου παραμένει αναλλοίωτη αν αλλάξουμε το σημείο βάσης της, αρκεί το νέο σημείο να συνδέεται με έναν δρόμο με το αρχικό. Επομένως στους δρομοσυνεκτικούς χώρους η θεμελιώδης ομάδα δεν εξαρτάται από το σημείο βάσης της. Για αυτόν τον λόγο, όταν ο χώρος X είναι δρομοσυνεκτικός, αντί για $\pi_1(X, x_0)$, τις περισσότερες φορές γράφουμε $\pi_1(X)$.

Πρόταση 12.1.13. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Η σχέση*

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

ορίζει έναν ομομορφισμό από την ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ στην ομάδα $\pi_1(Y, f(x_0))$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς η $f \circ \alpha$ είναι συνεχής απεικόνιση από το $\mathbb{I}$ στον Y, ως σύνθεση των συνεχών απεικονίσεων α και f.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ & \searrow^{f\circ\alpha} & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Επιπλέον $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0)$ και $(f \circ \alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(x_0)$. Άρα ο $f \circ \alpha$ είναι ένας βρόχος με βάση το x_0, άρα $f_*([\alpha]) \in \pi_1(Y, f(x_0))$. Αν $[\alpha] = [\beta]$, τότε $\alpha \approx_p \beta$, άρα υπάρχει ομοτοπία $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, ώστε

- $H(0, s) = H(1, s) = x_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $H(t, 0) = \alpha(t)$ και $H(t, 1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Θεωρούμε την $G = f \circ H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$, για την οποία έχουμε

- $G(0, s) = f(H(0, s)) = f(x_0)$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$,
- $G(1, s) = f(H(1, s)) = f(x_0)$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$,
- $G(t, 0) = f(H(t, 0)) = (f \circ \alpha)(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $G(t, 1) = f(H(t, 1)) = (f \circ \beta)(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Άρα $f \circ \alpha \approx_p f \circ \beta$, άρα $f_*([\alpha]) = f_*([\beta])$, επομένως η f_* είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha][f \circ \beta] \\ &= f_*([\alpha])f_*([\beta])\,. \end{aligned}$$

Άρα η $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ είναι ομομορφισμός. □

Ορισμός 12.1.8. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Ο ομομορφισμός

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

της πρότασης 12.1.13 ονομάζεται **επαγόμενος από την f ομομορφισμός** και συμβολίζεται με $\pi_1(f)$, ή συνηθέστερα με f_*.

Πρόταση 12.1.14. *Έστωσαν X, Y, Z τοπολογικοί χώροι $x_0 \in X$ και*

$$f : X \to Y, g : Y \to Z$$

συνεχείς απεικονίσεις, τότε

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Απόδειξη: Έστω $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*([f \circ \alpha]) \\ &= g_*(f_*([\alpha])) \\ &= (g_* \circ f_*)([\alpha]) .\end{aligned}$$

□

Πρόταση 12.1.15. *Έστω X τοπολογικός χώρος $x_0 \in X$ και $i : X \to X$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός*

$$i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

είναι ο ταυτοτικός.

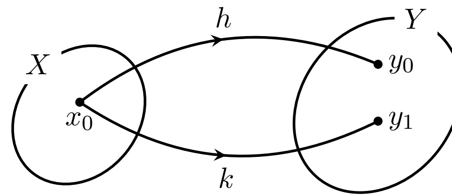
Απόδειξη: Έστω $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε $i_*([\alpha]) = [i \circ \alpha] = [\alpha]$. Άρα ο i_* είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός. □

Ορισμός 12.1.9. Έστω X τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Το ζεύγος $\big(X, x_0\big)$ ονομάζουμε **εστιγμένο χώρο**.

Σχολιάζοντας τα έως τώρα αποτελέσματα έχουμε να παρατηρήσουμε ότι αντιστοιχίσαμε κάθε αντικείμενο της κλάσης των εστιγμένων τοπολογικών χώρων (X, x_0) σε ένα και μόνον αντικείμενο της κατηγορίας των ομάδων, την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X, x_0)$. Η πιο πάνω αντιστοίχιση έγινε με τρόπο, ώστε κάθε συνεχής απεικόνιση $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ να αντιστοιχεί σε έναν και μόνον ομομορφισμό $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, ώστε να ισχύουν οι "φυσικές" σχέσεις $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ και $(i_X)_* = i_*$. Οι φυσικές αυτές σχέσεις στη θεωρία των κατηγοριών ονομάζονται ιδιότητες συναρτησιακότητας.
Η πρόταση που ακολουθεί θα μπορούσε να χαρακτηριστεί, ως το κεντρικό θεώρημα της θεωρίας της θεμελιώδους ομάδας, γιατί δείχνει ότι ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες.

Πρόταση 12.1.16. *Έστωσαν X, Y ομοτοπικά ισοδύναμοι τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $f : X \to Y$ μια ομοτοπική ισοδυναμία. Τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ είναι ισομορφισμός.*

Θα αποδείξουμε πρώτα την εξής βοηθητική πρόταση, η οποία δείχνει τη σχέση μεταξύ των επαγόμενων ομομορφισμών δύο ομοτοπικών συνεχών απεικονίσεων $h, k : X \to Y$ (σχήμα 12.5).



Σχήμα 12.5

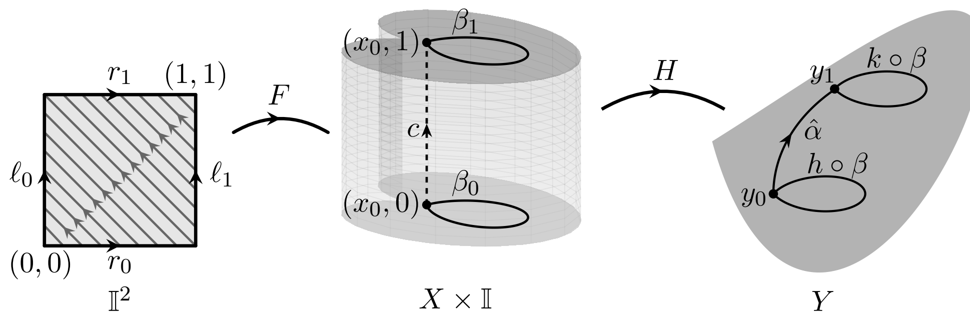
Λήμμα 12.1.17. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, αν*

- *Οι $h, k : X \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, με $h(x_0) = y_0$ και $k(x_0) = y_1$.*
- *Οι h και k είναι ομοτοπικές και $H : X \times \mathbb{I} \to Y$ είναι μια ομοτοπία μεταξύ τους και*
- *$\alpha : \mathbb{I} \to Y$, με $\alpha(t) = H(x_0, t)$ ο δρόμος στον Y με αρχή το $H(x_0, 0) = h(x_0) = y_0$ και πέρας το $H(x_1, 0) = k(x_0) = y_1$,*

τότε για τους επαγόμενους ομομορφισμούς $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ και $k_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ ισχύει $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{k_*} & \pi_1(Y,y_1) \\ \downarrow h_* & \nearrow \hat{\alpha} & \\ \pi_1(Y,y_0) & & \end{array}$$

Απόδειξη: (J. Munkres)



Σχήμα 12.6

Έστω β ένας βρόχος στον X με βάση το σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι $k_*\big([\beta]\big) = \hat{\alpha}\Big(h_*\big([\beta]\big)\Big)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} k_*([\beta]) = \hat{\alpha}(h_*([\beta])) &\Leftrightarrow [k \circ \beta] = [\overline{\alpha} * (h \circ \beta) * \alpha] \\ &\Leftrightarrow k \circ \beta \approx_p \overline{\alpha} * (h \circ \beta) * \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha * (k \circ \beta) \approx_p (\alpha * \overline{\alpha}) * (h \circ \beta) * \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha * (k \circ \beta) \approx_p (h \circ \beta) * \alpha\,. \end{aligned}$$

- Βήμα 1ο. Στον χώρο $X \times \mathbb{I}$ θεωρούμε τους βρόχους β_0 και β_1, με $\beta_0(s) = (\beta(s), 0)$, $\beta_1(s) = (\beta(s), 1)$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και τον δρόμο c που ορίζεται από τον τύπο $c(t) = (x_0, t)$, $t \in \mathbb{I}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(H \circ \beta_0)(s) &= H(\beta(s), 0)\\ &= h(\beta(s))\\ &= (h \circ \beta)(s) \quad \forall s \in \mathbb{I}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H \circ \beta_1)(s) &= H(\beta(s), 1)\\ &= k(\beta(s))\\ &= (k \circ \beta)(s) \quad \forall s \in \mathbb{I}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(H \circ c)(t) &= H(c(t))\\ &= H(x_0, t)\\ &= \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{I}\,,\end{aligned}$$

άρα

$$H \circ \beta_0 = h \circ \beta,\ H \circ \beta_1 = k \circ \beta \text{ και } H \circ c = \alpha.$$

- Βήμα 2ο. Έστω η απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$, με $F(s,t) = (\beta(s), t)$.
Στο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ θεωρούμε τους δρόμους $r_0(s) = (s, 0)$, $r_1(s) = (s, 1)$, $s \in \mathbb{I}$ και $l_0(t) = (0, t)$, $l_1(t) = (1, t)$, $t \in \mathbb{I}$, οι οποίοι διατρέχουν τις πλευρές του τετραγώνου $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ και για τους οποίους ισχύει:

$$F \circ r_0 = \beta_0,\ F \circ r_1 = \beta_1 \text{ και } F \circ l_0 = F \circ l_1 = c$$

(σχήμα 12.6). Οι απεικονίσεις $r_0 * l_1$ και $l_0 * r_1$ είναι δρόμοι στον $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ με αρχή το (0,0) και πέρας το (1,1). Επειδή το $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ είναι κυρτό, οι πιο πάνω δρόμοι είναι ομοτοπικοί (γιατί;).
Έστω G μια ομοτοπία μεταξύ τους, τότε

$$G(s,0) = (r_0 * l_1)(s),\ G(s,1) = (l_0 * r_1)(s),\ G(0,t) = (0,0) \text{ και } G(1,t) = (1,1).$$

Οι δρόμοι $\beta_0 * c$ και $c * \beta_1$ έχουν αρχή το $(x_0, 0)$ και πέρας το $(x_0, 1)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}\big(F \circ G\big)(s,0) &= F\big(G(s,0)\big)\\ &= \big(F \circ (r_0 * l_1)\big)(s)\\ &= \big((F \circ r_0) * (F \circ l_1)\big)(s)\\ &= (\beta_0 * c)(s)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(F\circ G\big)(s,1) &= F\big(G(s,1)\big)\\ &= \big(F\circ (l_0 * r_1)\big)(s)\\ &= \big((F\circ l_0) * (F\circ r_1)\big)(s)\\ &= (c*\beta_1)(s)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(F\circ G\big)(0,t) &= F\big(G(0,t)\big)\\ &= F(0,0)\\ &= (\beta(0),0)\\ &= (x_0,0)\,,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\big(F\circ G\big)(1,t) &= F\big(G(1,t)\big)\\ &= F(1,1)\\ &= (\beta(1),1)\\ &= (x_0,1)\,,\end{aligned}$$

άρα η $F\circ G$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ του $\beta_0 * c$ και του $c*\beta_1$.
Οι απεικονίσεις $(h\circ\beta)*\alpha$ και $\alpha*(k\circ\beta)$ είναι δρόμοι στον χώρο Y με αρχή το y_0 και πέρας το y_1. Επιπλέον

$$\begin{aligned}\big(H\circ(F\circ G)\big)(s,0) &= H\big((F\circ G)(s,0)\big)\\ &= \big(H\circ(\beta_0 * c)\big)(s)\\ &= \big((H\circ\beta_0)*(H\circ c)\big)(s)\\ &= \big((h\circ\beta)*\alpha\big)(s)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(H\circ(F\circ G)\big)(s,1) &= H\big((F\circ G)(s,1)\big)\\ &= \big(H\circ(c*\beta_1)\big)(s)\\ &= \big((H\circ c)*(H\circ\beta_1)\big)(s)\\ &= (\alpha*(k\circ\beta))(s)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(H\circ(F\circ G)\big)(0,t) &= H\big(F\big(G(0,t)\big)\big)\\ &= H(x_0,0)\\ &= h(x_0) = y_0\,,\end{aligned}$$

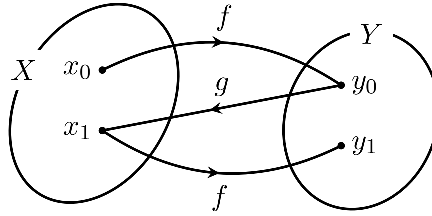
και

$$\begin{aligned}\big(H\circ(F\circ G)\big)(1,t) &= H\big(F\big(G(1,t)\big)\big)\\ &= H(x_0,1)\\ &= k(x_0)=y_1\,.\end{aligned}$$

Επομένως η $H\circ(F\circ G)$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ του δρόμου $(h\circ\beta)*\alpha$ και του δρόμου $\alpha*(k\circ\beta)$, επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη της πρότασης.

Απόδειξη: Έστω g η ομοτοπικά αντίστροφη της f, άρα $g\circ f\approx i_X$ και $f\circ g\approx i_Y$. Έχουμε $y_0=f(x_0), x_1=g(y_0)$ και $y_1=f(x_1)$ (σχήμα 12.7).



Σχήμα 12.7

Έστω $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ ο ομομορφισμός που επάγεται από την f, $g_*:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,x_1)$ ο ομομορφισμός που επάγεται από την g και $f'_*:\pi_1(X,x_1)\to\pi_1(Y,y_1)$ ο ομομορφισμός που επάγεται και αυτός από την f.

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,y_0)\\ & \swarrow_{g_*} & \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{f'_*} & \pi_1(Y,y_1)\end{array}.$$

Οι απεικονίσεις $g\circ f$ και i_X, από τον X στον X είναι ομοτοπικές, με $(g\circ f)(x_0)=x_1$ και $i_X(x_0)=x_0$, άρα, από το προηγηθέν λήμμα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει δρόμος α στον X από το x_0 στο x_1, ώστε

$$\begin{aligned}g_*\circ f_* &= (g\circ f)_*\\ &= \hat{\alpha}\circ(i_x)_*\\ &= \hat{\alpha}.\end{aligned}$$

Ο $g_*\circ f_*$ είναι ισομορφισμός, επειδή ο $\hat{\alpha}$ είναι ισομορφισμός (πρόταση 12.1.12), άρα η g_* είναι επί. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο $f'_*\circ g_*$ είναι ισομορφισμός, άρα η g_* είναι 1-1. Επομένως η g_* είναι ισομορφισμός. Επιπλέον $g_*\circ f_*=\hat{\alpha}$, άρα $f_*=g_*^{-1}\circ\hat{\alpha}$, συνεπώς η f_* είναι ισομορφισμός, ως σύνθεση ισομορφισμών. □

Πόρισμα. *Αν* X, Y *είναι δρομοσυνεκτικοί χώροι και* $X \approx Y$, *τότε* $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.

Πρόταση 12.1.18. *Αν η απεικόνιση* $f : X \to Y$ *είναι ομοιομορφισμός και* $x_0 \in X$, *τότε*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0))$$

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, επειδή οι ομοιομορφισμοί είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Πόρισμα. *Αν* X, Y *είναι δρομοσυνεκτικοί χώροι και* $X \cong Y$, *τότε* $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.

Παρατήρηση: Συνεπώς στους δρομοσυνεκτικούς χώρους η θεμελιώδης ομάδα είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Στα επόμενα θα δούμε περιπτώσεις τοπολογικών χώρων, οι οποίοι έχουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες, αλλά δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Πρόταση 12.1.19. *Αν ο χώρος* X *είναι δρομοσυνεκτικός και ο* A *είναι συστολή παραμόρφωσης του* X, *τότε* $\pi_1(X) \simeq \pi_1(A)$.

Απόδειξη: Η πρόταση 10.3.10 συνεπάγεται ότι και ο A είναι δρομοσυνεκτικός. Η πρόταση 10.3.9 συνεπάγεται ότι $X \approx A$, άρα από το πόρισμα της πρότασης 12.1.16 συνάγεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 12.1.20. *Αν* $\pi_1(X, x_0)$ *και* $\pi_1(Y, y_0)$ *είναι θεμελιώδεις ομάδες των χώρων* X *και* Y, *αντιστοίχως, τότε*

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \simeq \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)).$$

[3]

Απόδειξη: Έστωσαν οι προβολές

$$p_1 : X \times Y \to X, \text{ με } p_1(x, y) = x \text{ και } p_2 : X \times Y \to Y, \text{ με } p_2(x, y) = y.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, με $F([\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha])$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\alpha} & X \times Y \\ & \searrow^{p_1 \circ \alpha} & \downarrow p_1 \\ & & X \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\alpha} & X \times Y \\ & \searrow^{p_2 \circ \alpha} & \downarrow p_2 \\ & & Y \end{array}$$

- Βήμα 1ο. Έχουμε

$$\begin{aligned} F\big([\alpha][\beta]\big) &= F\big([\alpha * \beta]\big) \\ &= \big([p_1 \circ (\alpha * \beta)], [p_2 \circ (\alpha * \beta)]\big) \\ &= \big([p_1 \circ \alpha][p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \alpha][p_2 \circ \beta]\big) \\ &= \big([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]\big)\big([p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \beta]\big) \\ &= F\big([\alpha]\big)F\big([\beta]\big) . \end{aligned}$$

Άρα η F είναι ομομορφισμός.

[3] Αν A, B είναι ομάδες, τότε το σύνολο $A \times B$ γίνεται ομάδα με την πράξη του πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένη, δηλαδή, αν (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in A \times B$, τότε $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$.

- Βήμα 2ο. Έστω α ένας βρόχος στον X, με βάση το x_0 και β ένας βρόχος στον Y, με βάση το y_0. Τότε ο $\gamma : \mathbb{I} \to X \times Y$, με $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ είναι ένας βρόχος στον $X \times Y$, με βάση το (x_0, y_0), για τον οποίο ισχύει $F([\gamma]) = ([p_1 \circ \gamma], [p_2 \circ \gamma]) = ([\alpha], [\beta])$. Άρα η F είναι επί.
- Βήμα 3ο. Έστωσαν $[e]$, $[e']$ τα ουδέτερα στοιχεία των ομάδων $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ και $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, αντιστοίχως. Αν $F([\alpha]) = [e']$, τότε $\big([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]\big) = [e']$, άρα $p_1 \circ \alpha \approx \gamma$, όπου $\gamma(t) = x_0$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και $p_2 \circ \alpha \approx \delta$, όπου $\delta(t) = y_0$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Επομένως υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, ώστε
  - $H(t, 0) = x_0$ και $H(t, 1) = \big(p_1 \circ \alpha\big)(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
  - και $H(0, s) = H(1, s) = x_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

  Επίσης υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε
  - $G(t, 0) = y_0$ και $G(t, 1) = \big(p_2 \circ \alpha\big)(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
  - $G(0, s) = G(1, s) = y_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

  Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $\Phi : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X \times Y$, με $\Phi(t, s) = (H(t, s), G(t, s))$, για την οποία για κάθε $t, s \in \mathbb{I}$ έχουμε
  - $\Phi(t, 0) = \big(H(t, 0), G(t, 0)\big) = (x_0, y_0)$,
  - $\Phi(t, 1) = \big(H(t, 1), G(t, 1)\big) = \big((p_1 \circ \alpha)(t), (p_2 \circ \alpha)(t)\big) = \alpha(t)$,
  - $\Phi(0, s) = \big(H(0, s), G(0, s)\big) = (x_0, y_0)$ και
  - $\Phi(1, s) = \big(H(1, s), G(1, s)\big) = (x_0, y_0)$,

  άρα η Φ είναι μια ομοτοπία μεταξύ των α και e, δηλαδή
  $$\begin{aligned} \alpha \approx_p e &\Rightarrow [\alpha] = [e] \\ &\Rightarrow \operatorname{Ker} F = \{[e]\}, \end{aligned}$$
  άρα η F είναι 1-1.

Συνεπώς η F είναι ισομορφισμός. □

12.2 Απλά συνεκτικοί χώροι

Ορισμός 12.2.1. Ένας δρομοσυνεκτικός χώρος ονομάζεται **απλά συνεκτικός**, αν και μόνον, αν η θεμελιώδης ομάδα του είναι η τετριμμένη.

Πρόταση 12.2.1. *Οι μονοσημειακοί χώροι είναι απλά συνεκτικοί.*

Απόδειξη: Είναι προφανές, γιατί ο μοναδικός βρόχος στον χώρο $X = \{x_0\}$ είναι ο
$$e : \mathbb{I} \to X, \text{ με } e(t) = x_0.$$
□

Πρόταση 12.2.2. *Αν A ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε ο χώρος A, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, είναι απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη: Επειδή το A είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ο χώρος A είναι δρομοσυνεκτικός, συνεπώς η θεμελιώδης ομάδα του A δεν εξαρτάται από το σημείο που θα πάρουμε ως βάση. Επιλέγουμε $x_0 \in A$ και θα υπολογίσουμε την $\pi_1(A, x_0)$. Έστω α ένας βρόχος στον A, με βάση το x_0. Η απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to A$, με $H(t,s) = (1-s)\alpha(t) + sx_0$ είναι καλώς ορισμένη, λόγω της κυρτότητας του A. Εύκολα αποδεικνύεται το ότι η H είναι συνεχής. Επιπλέον

- $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $H(t,0) = \alpha(t)$ και $H(t,1) = x_0$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$,

άρα $\alpha \approx_p e$, όπου e είναι ο ταυτοτικός βρόχος με βάση το x_0, δηλαδή $e(t) = x_0$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα $[\alpha] = [e]$, άρα η $\pi_1(A, x_0)$ είναι η τετριμμένη, ως έχουσα μοναδικό στοιχείο το $[e]$. □

Πόρισμα. *Ο $\mathbb{R}^n$ και ο $\mathbb{D}^n$, $(n \geq 1)$ είναι απλά συνεκτικοί χώροι.*

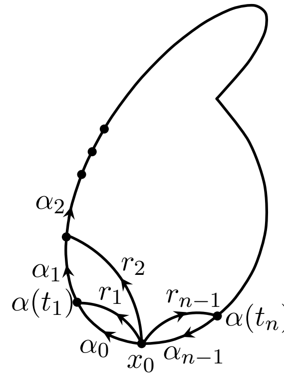
Πρόταση 12.2.3. *Οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$, με $n \geq 2$ είναι απλά συνεκτικοί χώροι.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τους χώρους $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ και $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, όπου N ο βόρειος και S ο νότιος πόλος της σφαίρας, αντιστοίχως. Το $\{U, V\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{S}^n$. Οι χώροι U, V είναι ομοιόμορφοι με τον $\mathbb{R}^n$ (στερεογραφική προβολή), άρα είναι απλά συνεκτικοί. Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^n$ είναι δρομοσυνεκτικός η θεμελιώδης ομάδα δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου βάσης. Συνεπώς επιλέγουμε σημείο βάσης το $x_0 \in U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$. Έστω α ένας βρόχος στον $\mathbb{S}^n$ με βάση το x_0. Το $\mathcal{A} = \{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του διαστήματος $\mathbb{I}$. Αν ε είναι ο αριθμός Lebesque του καλύμματος $\mathcal{A}$ θεωρούμε την διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ του διαστήματος $\mathbb{I}$, με $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Από το λήμμα Lebesque έχουμε $[t_i, t_{i+1}] \subseteq \alpha^{-1}(U)$ ή $[t_i, t_{i+1}] \subseteq \alpha^{-1}(V)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$, άρα

$$\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \alpha(\alpha^{-1}(U)) \subseteq U \text{ ή } \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \alpha(\alpha^{-1}(V)) \subseteq V$$

για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ορίζουμε τον δρόμο $\alpha_i : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $\alpha_i(s) = \alpha((1-s)t_i + st_{i+1})$, ο οποίος έχει αρχή το σημείο $\alpha(t_i)$ και πέρας το σημείο $\alpha(t_{i+1})$ και, ο οποίος βρίσκεται εξολοκλήρου στο U ή στο V. Επιπλέον, ισχύει $\alpha = \alpha_0 * \cdots * \alpha_{n-1}$. Επειδή οι χώροι U και V είναι δρομοσυνεκτικοί για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει δρόμος r_i στον U ή στον V με αρχή το x_0 και πέρας το $\alpha(t_i)$ (σχήμα 12.9). Έχουμε

$$\alpha = (\alpha_0 * \overline{r_1}) * (r_1 * \alpha_1 * \overline{r_2}) * \cdots * (r_{n-2} * \alpha_{n-2} * \overline{r_{n-1}}) * (r_{n-1} * \alpha_{n-1}).$$



Σχήμα 12.8

Κάθε μια από τις παρενθέσεις στον πιο πάνω τύπο είναι ένας βρόχος με βάση το x_0, ο οποίος ανήκει εξ ολοκλήρου στο U είτε στο V, άρα είναι ομοτοπικός με τον e ($e(t) = x_0$, $t \in \mathbb{I}$), αφού οι U και V είναι απλά συνεκτικοί χώροι. Επομένως έχουμε

$$\alpha \approx_p e \Rightarrow [\alpha] = [e],$$

άρα η $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ είναι η τετριμμένη, ως έχουσα ως μοναδικό στοιχείο το $[e]$. Επομένως ο χώρος $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ είναι απλά συνεκτικός. □

Πρόταση 12.2.4. *Αν ο χώρος X είναι απλά συνεκτικός, τότε δύο οποιοιδήποτε δρόμοι α, β στον X με αρχή το x_0 και πέρας το x_1 είναι ομοτοπικοί.*

Απόδειξη: Ο $\alpha * \overline{\beta}$ είναι ένας βρόχος με βάση το x_0, άρα

$$\alpha * \overline{\beta} \approx_p e \Rightarrow \big(\alpha * \overline{\beta}\big) * \beta \approx_p e * \beta$$
$$\Rightarrow \alpha \approx_p \beta\,.$$

□

Πρόταση 12.2.5. *Αν ο χώρος X είναι συσταλτός, τότε είναι απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη: Ο χώρος X είναι συσταλτός, άρα δρομοσυνεκτικός, συνεπώς η θεμελιώδης ομάδα του δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου βάσης. Από τη συσταλτότητά του, συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει $x_0 \in X$, έτσι ώστε $\{x_0\} \approx X$. Άρα η θεμελιώδης ομάδα του X είναι ισόμορφη με την θεμελιώδη ομάδα του $\{x_0\}$, η οποία είναι η τετριμμένη, άρα ο X είναι απλά συνεκτικός. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο της πιο πάνω πρότασης δεν ισχύει απαραίτητα. Για παράδειγμα, οι χώροι $\mathbb{S}^n$ με $n \geq 2$ είναι απλά συνεκτικοί, αλλά δεν είναι συσταλτοί, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 16.

13 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

13.1 Ο κύκλος και η προσθετική ομάδα των ακεραίων

Ας επιχειρήσουμε μια διαισθητική προσέγγιση των βρόχων του κύκλου, οι οποίοι έχουν ως βάση το σημείο (1,0). Κατ' αρχάς το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε εκείνους του βρόχους, οι οποίοι δεν καλύπτουν ολόκληρο τον κύκλο. Με άλλα λόγια, η απεικόνιση $\alpha : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ δεν είναι επί. Οι βρόχοι αυτοί με ένα "σύρσιμο" πάνω στον κύκλο, δηλαδή με μία συνεχή παραμορφωτική διαδικασία "μαζεύονται" στο σημείο (1,0) είναι, δηλαδή μηδενοτοπικοί. Θεωρούμε τους μηδενοτοπικούς βρόχους αμελητέους και καθ' εαυτούς και στην περίπτωση που αυτοί συντίθενται με άλλους βρόχους. Συνεπώς για έναν οποιονδήποτε βρόχο παραλείπεται το μέρος του στην αρχή ή στο τέλος του, το οποίο είναι μηδενοτοπικό και απομένει το μέρος του βρόχου που είναι περιτύλιγμα ολόκληρου του κύκλου. Σ' αυτή την περίπτωση τι μας ενδιαφέρει; Προφανώς το πόσες φορές περιτυλίγουμε τον κύκλο και με ποια φορά, αλλά και ποιο είναι το αλγεβρικό άθροισμα του αριθμού των περιτυλιγμάτων, όταν αυτά είναι διαδοχικά. Για παράδειγμα, αν περιτυλίξουμε τον κύκλο 7 φορές με την αρνητική φορά ο αριθμός που εκφράζει το περιτύλιγμα είναι ο -7. Αν περιτυλίξουμε τον κύκλο 5 φορές κατά τη θετική φορά ο αριθμός που εκφράζει το περιτύλιγμα είναι ο 5. Αν τα δύο αυτά περιτυλίγματα εφαρμοστούν διαδοχικά, τότε έχουμε ένα περιτύλιγμα, το οποίο εκφράζεται από τον αριθμό -2. Άρα ουσιαστικά οι βρόχοι και η σύνθεσή τους περιγράφονται από το σύνολο των ακεραίων και την πράξη της πρόσθεσης σ' αυτό, δηλαδή από την προσθετική ομάδα των ακεραίων.

Το αντικείμενο της παρούσης παραγράφου είναι η αυστηρή μαθηματική θεμελίωση της πιο πάνω διαισθητικά προφανούς διαδικασίας. Προς τούτο, θεωρούμε τον $\mathbb{S}^1$ ως πολλαπλασιαστική ομάδα, υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μη μηδενικών μιγαδικών. Ουδέτερο στοιχείο της πιο πάνω ομάδας είναι ο αριθμός **1**, ο οποίος αντιστοιχεί στο σημείο $b_0 = (1, 0)$ του κύκλου. Το κλειδί για τον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου με βάση το σημείο (1,0)[1] είναι η συνεχής και επί απεικόνιση

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{S}, \text{ με } r(x) = e^{2\pi x i} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x),$$

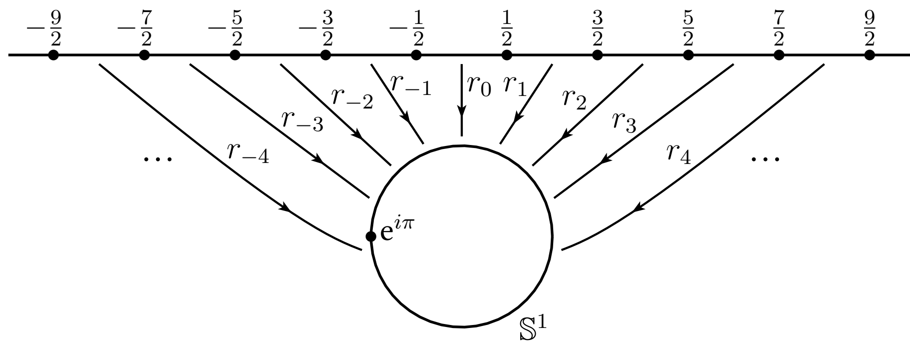
[1]Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου βάσης, επειδή ο κύκλος είναι δρομοσυνεκτικός.

η οποία έχει την εξής αξιοσημείωτη ιδιότητα:
Έστω $z \in \mathbb{S}^1$, τότε υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$, ώστε $z = e^{i\theta}$, άρα $z = e^{2\pi(n+\frac{\theta}{2\pi})i}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και, επειδή $0 \leq \frac{\theta}{2\pi} < 1$ έχουμε $z \in r([n, n+1))$, με $n \in \mathbb{Z}$. Με άλλα λόγια η r τυλίγει την πραγματική ευθεία γύρω από τον κύκλο $\mathbb{S}^1$. Αν $z = e^{i\theta}$, με $0 \leq \theta < 2\pi$, τότε $r^{-1}(z) = \{n + \frac{\theta}{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$, το οποίο είναι ένα σύνολο που τίθεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Ειδικά $r^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}$.

Πρόταση 13.1.1. *Αν r_n είναι ο περιορισμός της r στο διάστημα $J_n = (-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n)$, τότε η απεικόνιση*

$$r_n : J_n \to \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{\pi i}\}$$

είναι ένας ομοιομορφισμός (σχήμα 13.1).



Σχήμα 13.1

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} & x, y \in J_n \wedge r_n(x) = r_n(y) \\ & \Rightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y} \\ & \Rightarrow e^{2\pi i(x-y)} = \mathbf{1} \\ & \Rightarrow 2\pi(x-y) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}, . \end{aligned}$$

Αλλά $x, y \in J_n$, άρα $-1 < x - y < 1$ και $x - y \in \mathbb{Z}$, άρα $x - y = 0$, επομένως η r_n είναι 1-1. Έστω $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$, άρα υπάρχει $y \in (-\pi, \pi)$, ώστε $z = e^{yi}$, άρα

$$-\tfrac{1}{2} < \tfrac{y}{2\pi} < \tfrac{1}{2},$$

άρα $-\frac{1}{2} + n < \frac{y}{2\pi} + n < \frac{1}{2} + n$ και $r_n(\frac{y}{2\pi} + n) = e^{yi}$, άρα η r_n είναι επί.
Ο $\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$ είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{R}$. Η στερεογραφική προβολή $\mathbf{p} : \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\} \to \mathbb{R}$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Η $g_n : J_n \to \mathbb{R}$, με $g_n = \mathbf{p} \circ r_n$ είναι συνεχής, 1-1 και επί, άρα είναι ομοιομορφισμός (άσκηση 10 κεφαλαίου 2).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathbb{R} \\ r_n \uparrow & \nearrow g_n & \\ J_n & & \end{array}$$

Συνεπώς η $r_n = \mathbf{p}^{-1} \circ g_n$ είναι ένας ομοιομορφισμός, ως σύνθεση ομοιομορφισμών. □

Παρατήρηση: Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} r(r_n^{-1}(z_1) + \cdots + r_n^{-1}(z_k)) &= e^{2\pi i (r_n^{-1}(z_1) + \cdots + r_n^{-1}(z_k))} \\ &= e^{2\pi i r_n^{-1}(z_1)} \cdots e^{2\pi i r_n^{-1}(z_k)} \\ &= r(r_n^{-1}(z_1)) \cdots r(r_n^{-1}(z_k)) \\ &= z_1 \cdots z_k \,. \end{aligned}$$

Ορισμός 13.1.1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Η συνεχής απεικόνιση

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$$

ονομάζεται **ανόρθωση της συνεχούς απεικόνισης**

$$f : X \to \mathbb{S}^1,$$

αν και μόνον, αν $f = r \circ \tilde{f}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow f & \swarrow r & \\ \mathbb{S}^1 & & \end{array}$$

Λήμμα 13.1.2. *Έστωσαν X συνεκτικός χώρος και $f', f'' : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς απεικονίσεις, με*

$$r \circ f' = r \circ f'' \;\; \text{και} \;\; f'(x_0) = f''(x_0)$$

για κάποιο $x_0 \in X$, τότε $f' = f''$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $h : X \to \mathbb{R}$, με $h(x) = f'(x) - f''(x)$. Είναι

$$\begin{aligned} (r \circ h)(x) &= e^{2\pi i (f'(x) - f''(x))} \\ &= \frac{e^{2\pi i f'(x)}}{e^{2\pi i f''(x)}} \\ &= \frac{(r \circ f')(x)}{(r \circ f'')(x)} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$, άρα $h(x) \in r^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in X$, άρα $h(X) \subseteq \mathbb{Z}$. Επειδή ο X είναι συνεκτικός χώρος, το $h(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, άρα μονοσύνολο. Επιπλέον, επειδή $h(x_0) = 0$ είναι $h(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, άρα $f'(x) = f''(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $f' = f''$. □

Λήμμα 13.1.3. *Έστω X ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει την αρχή και $f : X \to \mathbb{S}^1$ συνεχής απεικόνιση, με $f(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$. Τότε υπάρχει μοναδική ανόρθωση $\tilde{f}$ της f, με $\tilde{f}(\mathbf{0}) = 0$.*

Απόδειξη: Επειδή ο X είναι συμπαγής η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (πρόταση 7.4.3), άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε

$$\|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2.$$

Επειδή το X είναι φραγμένο υπάρχει θετικός ακέραιος k, ώστε $\frac{\|x\|}{k} < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς, αν $j = 0, 1, \ldots, k-1$, τότε

$$x \in X \Rightarrow \Big\| \frac{(j+1)x}{k} - \frac{jx}{k} \Big\| = \Big\| \frac{x}{k} \Big\| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \Big| f\big(\tfrac{(j+1)x}{k}\big) - f\big(\tfrac{jx}{k}\big) \Big| < 2\,.$$

Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ ισχύει

$$\frac{f(\frac{(j+1)x}{k})}{f(\frac{jx}{k})} = e^{i\pi} = -\mathbf{1},$$

τότε

$$\Big| f\big(\tfrac{(j+1)x}{k}\big) - f\big(\tfrac{jx}{k}\big) \Big| = \Big| f\big(\tfrac{jx}{k}\big) \Big| \left| \frac{f(\frac{(j+1)x}{k})}{f(\frac{jx}{k})} - \mathbf{1} \right| = 2,$$

άτοπο. Συνεπώς $\frac{f(\frac{(j+1)x}{k})}{f(\frac{jx}{k})} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$. Για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $g_j : X \to \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\pi}\}$, με $g_j(x) = \frac{f(\frac{(j+1)x}{k})}{f(\frac{jx}{k})}$ για $j = 0, 1, ..., k-1$. Παρατηρούμε ότι $f(x) = g_0(x) g_1(x) \cdots g_{k-1}(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα για την $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, με $\tilde{f}(x) = r_0^{-1}(g_0(x)) + r_0^{-1}(g_1(x)) + \cdots + r_0^{-1}(g_{k-1}(x))$ έχουμε

$$\tilde{f}(\mathbf{0}) = r_0^{-1}(\mathbf{1}) + r_0^{-1}(\mathbf{1}) + \cdots + r_0^{-1}(\mathbf{1}) = 0$$

και $r\big(\tilde{f}(x)\big) = g_0(x) g_1(x) \cdots g_{k-1}(x) = f(x)$ (παρατήρηση στην πρόταση 13.1.1), άρα $r \circ \tilde{f} = f$. Συνεπώς η ύπαρξη της $\tilde{f}$ αποδείχθηκε.
Επειδή το X, ως κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό η μοναδικότητα της $\tilde{f}$ είναι άμεση συνέπεια του λήμματος 13.1.2 □.

Έστω α ένας βρόχος στον $\mathbb{S}^1$ με βάση το σημείο $\mathbf{1}$. Αν $\tilde{\alpha}$ η μοναδική ανόρθωση του α, τότε $\mathbf{1} = \alpha(1) = r((\tilde{\alpha}(1))$, άρα $\tilde{\alpha}(1) = r^{-1}(\mathbf{1}) \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 13.1.2. Έστω α ένας βρόχος στον $\mathbb{S}^1$, με $\alpha(0) = \alpha(1) = \mathbf{1}$ και $\tilde{\alpha}$ η ανόρθωση του α. Τον μοναδικό ακέραιο $\tilde{\alpha}(1)$ ονομάζουμε **χαρακτηριστικό ακέραιο του βρόχου** α και τον συμβολίζουμε με $t(\alpha)$.

Πρόταση 13.1.4. *Έστωσαν α και β δύο ομοτοπικοί βρόγχοι στον $\mathbb{S}^1$ με βάση το $\mathbf{1}$, τότε*

$$t(\alpha) = t(\beta).$$

Απόδειξη: Οι δρόμοι α και β είναι ομοτοπικοί, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε να ισχύουν τα

- $F(t,0) = \alpha(t)$ και $F(t,1) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $F(0,s) = F(1,s) = \mathbf{1}$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

Από το λήμμα 13.1.3 υπάρχει μοναδική ανόρθωση $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ της F, με $\tilde{F}(0,0) = 0$. Ορίζουμε τον δρόμο $\tilde{\alpha} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, με $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{F}(t,0)$ και τον δρόμο $\tilde{\beta} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, με $\tilde{\beta}(t) = \tilde{F}(t,1)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\big(r \circ \tilde{\alpha}\big)(t) &= r\big(\tilde{F}(t,0)\big)\\ &= F(t,0) = \alpha(t)\end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{F}(0,0) = 0$, άρα ο $\tilde{\alpha}$ είναι η μοναδική ανόρθωση του δρόμου α. Επίσης,

$$\begin{aligned}\big(r \circ \tilde{\beta}\big)(t) &= r\big(\tilde{F}(t,1)\big)\\ &= F(t,1) = \beta(t)\end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Αληθεύει η σχέση $\big(r \circ \tilde{F}\big)(0,s) = F(0,s) = \mathbf{1}$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$, άρα $\tilde{F}(0,s) = r^{-1}(\mathbf{1}) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$, άρα $\big\{\tilde{F}(0,s)/s \in \mathbb{I}\big\} = \tilde{F}\big(\{0\} \times \mathbb{I}\big) \subseteq \mathbb{Z}$. Επειδή το $\mathbb{I} \times \{0\}$ είναι συνεκτικό και η $\tilde{F}$ συνεχής το σύνολο $\tilde{F}\big(\{0\} \times \mathbb{I}\big)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, άρα $\tilde{F}\big(\{0\} \times \mathbb{I}\big) = \{0\}$, επειδή $\tilde{F}(0,0) = 0$. Συνεπώς $\tilde{\beta}(0) = \tilde{F}(0,1) = 0$, άρα ο $\tilde{\beta}$ είναι η μοναδική ανόρθωση του β, με $\tilde{\beta}(0) = 0$. Άρα $t(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$ και $t(\beta) = \tilde{\beta}(1)$.
Η F απεικονίζει την κατακόρυφη γραμμή $\big\{(1,s)/s \in \mathbb{I}\big\}$ στο $\mathbf{1}$, συνεπώς η $\tilde{F}$ απεικονίζει την ίδια γραμμή σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του $r^{-1}\big(\mathbf{1}\big)$, δηλαδή σε έναν ακέραιο αριθμό, ας πούμε τον n. Άρα έχουμε $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1,0) = n$ και $\tilde{\beta}(1) = \tilde{F}(1,1) = n$, άρα $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, επομένως $t(\alpha) = t(\beta)$. □

Παραδείγματα 13.1.1.

1. Η μοναδική ανόρθωση του βρόχου $\alpha(t) = e^{4\pi i t}, t \in \mathbb{I}$ είναι ο δρόμος $\tilde{\alpha}(t) = 2t$, $t \in \mathbb{I}$, άρα $t(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = 2$.

2. Η μοναδική ανόρθωση του βρόχου $\beta(t) = \begin{cases} e^{\pi i t}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ e^{\pi i(1-t)}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ είναι ο δρόμος

$$\tilde{\beta}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1-t}{2}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases},$$

άρα $t(\beta) = \tilde{\beta}(1) = 0$.

3. Η μοναδική ανόρθωση του βρόχου $\gamma(t) = \begin{cases} e^{2\pi i t}, & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ e^{\pi i(1-2t)}, & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ e^{8\pi i(1-2t)}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ είναι ο δρόμος

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1-2t}{2}, & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 4(1-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

άρα $t(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) = -4$.

Παρατήρηση: Επειδή οι ομοτοπικοί βρόχοι έχουν τον ίδιο χαρακτηριστικό ακέραιο (πρόταση 13.1.4), μπορούμε να ορίσουμε χαρακτηριστικό ακέραιο της κλάσης $[\alpha]$ των βρόχων τον $t([\alpha]) = t(\alpha)$.

Πρόταση 13.1.5. *Η απεικόνιση* $t : \pi_1(\mathbb{S}^1, \mathbf{1}) \to (\mathbb{Z}, +)$, *με* $[\alpha] \xrightarrow{t} t([\alpha])$ *είναι ισομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη:

α΄) Έστωσαν $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, \mathbf{1})$ και $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ οι ανορθώσεις των α, β, αντιστοίχως, με $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$. Ορίζουμε δρόμο ω στον $\mathbb{R}$, με
$\omega(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} (r \circ \omega)(t) &= \begin{cases} (r \circ \tilde{\alpha})(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ r(\tilde{\alpha}(1))(r \circ \tilde{\beta})(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta)(t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα ο ω είναι η μοναδική ανόρθωση του $\alpha*\beta$, με $\omega(0) = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} t([\alpha][\beta]) &= t([\alpha * \beta]) \\ &= \omega(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) \\ &= t([\alpha]) + t([\beta]) \,, \end{aligned}$$

άρα η t είναι ομομορφισμός.

β΄) Έστω ότι $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1\big(\mathbb{S}^1, \mathbf{1}\big)$, με $t([\alpha]) = t([\beta])$. Αν $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ είναι οι ανορθώσεις των α, β, με $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$, τότε $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Θεωρούμε την $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, με $H(t,s) = (1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t)$, η οποία είναι μια ομοτοπία μεταξύ των $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$, γιατί είναι συνεχής, με

- $H(0,s) = (1-s)\tilde{\alpha}(0) + s\tilde{\beta}(0) = \tilde{a}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$,
- $H(1,s) = (1-s)\tilde{\alpha}(1) + s\tilde{\beta}(1) = \tilde{a}(1) = \tilde{\beta}(1)$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$,
- $H(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $H(t,1) = \tilde{\beta}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Για την $r \circ H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ έχουμε

- $(r \circ H)(t, 0) = r(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$,
- $(r \circ H)(t, 1) = r(\tilde{\beta}(t)) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$,
- $(r \circ H)(0, s) = r(0) = \mathbf{1}$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $(r \circ H)(1, s) = r(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \mathbf{1}$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

Άρα η $r \circ H$ είναι μια ομοτοπία μεταξύ των α και β, άρα $\alpha \approx_p \beta$, άρα $[\alpha] = [\beta]$. Επομένως η t είναι 1-1.

γ΄) Έστω $n \in \mathbb{Z}$, τότε $t([\gamma]) = n$, όπου $\gamma(t) = e^{2\pi n t i}$. Άρα η t είναι επί. Επομένως η t είναι ισομορφισμός. □

Παρατήρηση: Ο $\mathbb{S}^1$ είναι δρομοσυνεκτικός, συνεπώς η θεμελιώδης ομάδα του δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου βάσης. Για τον λόγο αυτόν, εφεξής αντί του $\pi_1(\mathbb{S}^1, \mathbf{1})$, θα γράφουμε απλούστερα $\pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Πόρισμα. *Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι ισόμορφη με την* $(\mathbb{Z}, +)$.

Πρόταση 13.1.6. *Η θεμελιώδης ομάδα του τρυπημένου επιπέδου είναι ισόμορφη με την* $(\mathbb{Z}, +)$.

Απόδειξη: Όπως έχουμε δει στα παραδείγματα των δρομοσυνεκτικών χώρων, το τρυπημένο επίπεδο είναι δρομοσυνεκτικός χώρος, επομένως η θεμελιώδης ομάδα του δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου βάσης. Επιπλέον $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathbb{S}^1$ (βλέπε παραδείγματα 10.2.1). Επομένως

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq (\mathbb{Z}, +).$$

Πρόταση 13.1.7. *Η θεμελιώδης ομάδα της σπείρας* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *είναι ισόμορφη με την* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Η σπείρα, ως τοπολογικό γινόμενο δύο δρομοσυνεκτικών χώρων είναι δρομοσυνεκτικός χώρος. Επιπλέον, από την πρόταση 12.1.20 έχουμε ότι

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Πρόταση 13.1.8. *Ο* $\mathbb{S}^1$ *δεν είναι συσταλτός. χώρος*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, τότε, επειδή οι συσταλτοί χώροι έχουν τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα έχουμε

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \{e\},$$

άτοπο. □

13.2 Κυκλικές απεικονίσεις

Ορισμός 13.2.1. Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ονομάζεται **κυκλική απεικόνιση**.

Ορισμός 13.2.2. Ο ακέραιος n ονομάζεται **βαθμός της κυκλικής απεικόνισης** f, αν και μόνον, αν $f_*([e^{2\pi ti}]) = [e^{2\pi nti}]$, όπου $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ είναι ο ομομορφισμός που επάγεται από την f. Ο βαθμός της κυκλικής απεικόνισης f συμβολίζεται με $\deg(f)$.[2]

Παρατήρηση: Η $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των ακεραίων, συνεπώς ένας ομομορφισμός $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ είναι κατ' ουσίαν ένας ομομορφισμός $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Όμως οι τελευταίοι ομομορφισμοί είναι της μορφής

$$f_*(k) = nk$$

για έναν μοναδικό ακέραιο n, όπου $n = f_*(1)$. Ο μοναδικός αυτός ακέραιος n είναι ο βαθμός της f.

Πρόταση 13.2.1. *Έστω f μια κυκλική απεικόνιση, με $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{S}^1$ και $n \in \mathbb{Z}$, τότε*

$$\deg(f) = n.$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) = z^n &\Rightarrow f_*([e^{2\pi it}]) = [f(e^{2\pi it})] = [e^{2\pi nit}] \\ &\Rightarrow \deg(f) = n\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 13.2.2. *Αν οι f και g είναι ομοτοπικές κυκλικές απεικονίσεις, τότε*

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Απόδειξη: Οι f, g είναι ομοτοπικές, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε

$$H(x, 0) = f(x) \text{ και } H(x, 1) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{S}^1.$$

Έστω $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$, με $\alpha(t) = e^{2\pi it}$, $t \in \mathbb{I}$. Τότε για τη συνεχή απεικόνιση $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $G(t, s) = H(\alpha(t), s)$ ισχύουν τα

$$\begin{aligned} G(0, s) &= H(\alpha(0), s) \\ &= H(\alpha(1), s) \\ &= G(1, s) \end{aligned}$$

για κάθε $s \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} G(t, 0) &= H(\alpha(t), 0) \\ &= (f \circ \alpha)(t)\,, \end{aligned}$$

[2]Κατά την πραγμάτευση του βαθμού των κυκλικών απεικονίσεων, όπου χρειαστεί, θα θεωρούμε ότι σημείο βάσης της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου είναι το **1**.

και

$$\begin{aligned} G(t,1) &= H(\alpha(t),1) \\ &= (g\circ\alpha)(t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$, επομένως

$$\begin{aligned} f\circ\alpha \approx_p g\circ\alpha &\Rightarrow [f\circ\alpha] = [g\circ\alpha] \\ &\Rightarrow f_*([\alpha]) = g_*([\alpha]) \\ &\Rightarrow f_*([e^{2\pi it}]) = g_*([e^{2\pi it}]) \\ &\Rightarrow \deg(f) = \deg(g)\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 13.2.3. *Η $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $f(z) = x_0 \in \mathbb{S}^1$ έχει βαθμό 0.*

Απόδειξη: Η f καθώς και η $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $g(x) = \mathbf{1} = e^{2\pi i0x}$ είναι μηδενοτοπικές (βλέπε τα παραδείγματα των ομοτοπικών απεικονίσεων στο κεφάλαιο 10). Άρα

$$\begin{aligned} f \approx g &\Rightarrow f_* = g_* \\ &\Rightarrow \deg(f) = \deg(g) = 0\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 13.2.4. *Αν η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ δεν είναι επί, τότε*

$$\deg(f) = 0.$$

Απόδειξη: Η f είναι μηδενοτοπική (4η περίπτωση των παραδειγμάτων 10.1.1), επομένως ομοτοπικά ισοδύναμη με μια σταθερή, άρα, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $deg(f) = 0$. □

Παρατήρηση: Οι απεικονίσεις

$$f, g, h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \text{ με } f(z) = z^n,\ g(z) = z^{n+\frac{1}{2}} \text{ και } h(z) = z^{n+\frac{3}{4}}$$

έχουν βαθμό n.

- Για την απεικόνιση g έχουμε: έστω ότι για κάποιο $z = e^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ισχύει $z^n = -z^{n+\frac{1}{2}}$, τότε

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} = -1 &\Rightarrow e^{i\frac{\phi}{2}} = e^{i\pi} \\ &\Rightarrow \frac{\phi}{2} - \pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \pi < \pi \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k < 0\,, \end{aligned}$$

άτοπο, συνεπώς για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$ τα σημεία $f(z)$ και $g(z)$ δεν είναι αντιδιαμετρικά, άρα $(1-t)f(z)+tg(z) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Άρα η $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $H(z,t) = \frac{(1-t)f(z)+tg(z)}{\|(1-t)f(z)+tg(z)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και, προφανώς συνεχής. Επιπλέον $H(z,0) = f(z)$ και $H(z,1) = g(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Δηλαδή $f \approx g$, άρα $\deg(f) = \deg(g) = n$.

- Για την απεικόνιση h έχουμε: έστω ότι για κάποιο $z = e^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ισχύει $z^{n+\frac{1}{2}} = -z^{n+\frac{3}{4}}$, τότε

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{4}} = -1 &\Rightarrow e^{i\frac{\phi}{4}} = e^{i\pi} \\ &\Rightarrow \frac{\phi}{4} - \pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{\phi}{4} = 2k\pi + \pi \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k < -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

άτοπο, συνεπώς για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$ τα σημεία $h(z)$ και $g(z)$ δεν είναι αντιδιαμετρικά. Άρα $(1-t)h(z)+tg(z) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Άρα η $G : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $G(z,t) = \frac{(1-t)h(z)+tg(z)}{\|(1-t)h(z)+tg(z)\|}$, είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $G(z,0) = h(z)$ και $G(z,1) = g(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Δηλαδή $h \approx g$, άρα $deg(h) = deg(g) = n$.

Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να δούμε τη φυσική σημασία του βαθμού της συνεχούς απεικόνισης $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Αν $z = e^{2\pi it}, 0 \leq t \leq 1$, δηλαδή το z διαγράφει μία φορά ολόκληρο τον κύκλο έχουμε $f(z) = e^{2\pi nit}$, δηλαδή το $f(z)$ διαγράφει n φορές τον κύκλο θετικά, αν $n > 0$ και $-n$ φορές αρνητικά αν $n < 0$. Το ίδιο ισχύει και για τις g και h.
Επομένως όσες κυκλικές απεικονίσεις προκύπτουν από την f, με την επιπρόσθετη διαγραφή ενός γνησίου μέρους του κύκλου έχουν τον ίδιο βαθμό με την f. Με άλλα λόγια ο βαθμός δείχνει το πόσες φορές και με ποιον τρόπο (θετικά ή αρνητικά) το $f(z)$ διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο, όταν το z τον διαγράφει μία φορά θετικά.

Πρόταση 13.2.5. *Αν οι κυκλικές απεικονίσεις f και g έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned} \deg(f) = \deg(g) = n \Rightarrow f([e^{2\pi it}]) = g([e^{2\pi it}]) &= [e^{2\pi nit}] \\ \Rightarrow [f(e^{2\pi it})] &= [g(e^{2\pi it})] \\ \Rightarrow f \circ \alpha &\approx_p g \circ \alpha, \end{aligned}$$

όπου $\alpha(t) = e^{2\pi it}, t \in \mathbb{I}$. Άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε

$$H(t,0) = f(\alpha(t)) \text{ και } H(t,1) = g(\alpha(t))$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Αλλά για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$ υπάρχει μοναδικό $t(z) \in [0,1)$, ώστε $z = \alpha(t(z))$. Συνεπώς ορίζουμε συνεχή απεικόνιση $G : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ με $G(z,s) = H(t(z),s)$, για την οποία έχουμε

$$G(z,0) = H(t(z),0)$$
$$= f(\alpha(t(z))) = f(z)\,,$$

για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$ και

$$G(z,1) = H(t(z),1)$$
$$= g(\alpha(t(z))) = g(z)\,,$$

για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, άρα $f \approx g$. □

Πρόταση 13.2.6. *Αν f, g είναι κυκλικές απεικονίσεις, τότε*

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\deg(f) = n$ και $\deg(g) = m$. Τότε $f \approx h$, με $h(z) = z^n$, $z \in \mathbb{S}^1$ και $g \approx r$, με $r(z) = z^m$, $z \in \mathbb{S}^1$. Άρα $f \circ g \approx h \circ r$. Αλλά $(h \circ r)(z) = h(r(z)) = z^{nm}$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, άρα

$$\deg(f \circ g) = \deg(h \circ r) = nm = \deg(f)\deg(g).$$

□

Πρόταση 13.2.7. *Αν η κυκλική απεικόνιση f διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, δηλαδή*

$$f(-z) = -f(z)$$

για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, τότε είναι περιττού βαθμού.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $deg(f) = n = 2k$, άρα

$$f(e^{2\pi it}) = e^{4k\pi it}.$$

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ή

$$z = e^{2\pi it},\ 0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

ή

$$z = e^{2\pi it},\ \tfrac{1}{2} < t \le 1.$$

Αν ισχύει το πρώτο, τότε

$$-z = e^{2\pi(t+\frac{1}{2})i} \Rightarrow f(-z) = e^{4k\pi(t+\frac{1}{2})i}$$
$$= e^{4k\pi it}e^{2k\pi i} = e^{4k\pi it}\mathbf{1}$$
$$= f(z)\,,$$

άρα $f(-z) = f(z) = -f(-z)$, άρα $f(-z) = 0$, άτοπο.
Αν ισχύει το δεύτερο, τότε

$$-z = e^{2\pi(t-\frac{1}{2})i} \Rightarrow f(-z) = e^{4k\pi(t-\frac{1}{2})i}$$
$$= e^{4k\pi it}e^{-2k\pi i} = e^{4k\pi it}\mathbf{1}$$
$$= f(z)\,,$$

άτοπο. □

Πόρισμα. *Αν μία κυκλική απεικόνιση διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, τότε δεν είναι μηδενοτοπική.*

Πρόταση 13.2.8. *Αν f είναι μια κυκλική απεικόνιση, τότε*

$$\deg(f) = \deg(-f).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathrm{a} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $\mathrm{a}(z) = -z$ (**αντιποδική απεικόνιση**). Έχουμε $\mathrm{a} \circ \mathrm{a} = i_{\mathbb{S}^1}$, άρα $\big(\deg(\mathrm{a})\big)^2 = \deg((\mathrm{a} \circ \mathrm{a})) = \deg(i_{\mathbb{S}^1}) = 1$, άρα $\deg(\mathrm{a}) = \pm 1$. Υποθέτουμε ότι το z κινείται στον κύκλο κατά τη θετική φορά. Αν η a διατηρεί τη θετική φορά, τότε $\deg(\mathrm{a}) = 1$, ενώ, αν η a αντιστρέφει τη φορά, τότε $\deg(\mathrm{a}) = -1$. Είναι

$$\mathrm{a}(z) = \begin{cases} z + \pi, & 0 \leq z < \pi \\ z - \pi, & \pi \leq z < 2\pi \end{cases},$$

άρα η a διατηρεί τη θετική φορά του z, επομένως $\deg(\mathrm{a}) = 1$. Τέλος,

$$\begin{aligned} -f = \mathrm{a} \circ f \Rightarrow \deg(-f) &= \deg(\mathrm{a}) \deg(f) \\ &= \deg(f)\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 13.2.9. *Οι ανακλάσεις $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{S}^1$ και $g(z) = -\overline{z}$, $z \in \mathbb{S}^1$ έχουν βαθμό -1.*

Απόδειξη: Είναι $f([e^{2\pi i t}]) = [e^{-2\pi i t}]$, άρα $\deg(f) = -1$. Για το δεύτερο έχουμε $g = -f$, άρα $\deg(g) = \deg(-f) = -1$. □

13.3 Εφαρμογές της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου

Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας είναι μια από τις μαθηματικές προτάσεις που έλκουν τους μαθηματικούς να τις αποδείξουν με διαφορετικούς τρόπους από εκείνους με τους οποίους έχουν ήδη αποδειχθεί. Μέχρι σήμερα έχουν δοθεί πάνω από 200 αποδείξεις, οι οποίες συνδυάζουν μεθόδους από σχεδόν όλους τους κλάδους των μαθηματικών.

Λίγες από αυτές είναι συγκεντρωμένες στο βιβλίο των B. Fine και G. Rossemberger: The Fundamental theorem of Algebra, το οποίο κυκλοφορεί από τις εκδόσεις Leader Books μεταφρασμένο στα Ελληνικά.

Πρόταση 13.3.1. ***(Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας)*** *Κάθε μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο έχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι για το πολυώνυμο

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ n \geq 1$$

ισχύει $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Στην περίπτωση αυτή προφανώς $a_0 \neq 0$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $G : \mathbb{I} \times [0, \infty) \to \mathbb{S}^1$, με $G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi i t})}{|p(re^{2\pi i t})|}$, η οποία είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Ακολούθως θεωρούμε την $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}), & (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1) \\ e^{2\pi n i t}, & (t, s) \in [0, 1] \times \{1\} \end{cases}.$$

Η F είναι προφανώς συνεχής στο $[0,1]\times[0,1)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1} F(t,s) &= \lim_{r\to\infty} G(t,r)\\ &= e^{2\pi n i t} = F(t,1)\,,\end{aligned}$$

επομένως η F είναι συνεχής και στο $[0,1]\times\{1\}$, άρα η F είναι συνεχής. Έχουμε

$$F(t,0) = G(t,0) = \tfrac{a_0}{|a_0|} \text{ για κάθε } t\in\mathbb{I}$$

και

$$F(t,1) = e^{2\pi n i t} = \beta(t) \text{ για κάθε } t\in\mathbb{I}.$$

Άρα ο βρόχος β είναι μηδενοτοπικός, άτοπο, γιατί $\deg(\beta) = n \geq 1$. □

Μία εναλλακτική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας είναι η ακόλουθη:

Απόδειξη: Έστω η εξίσωση

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \tag{13.1}$$

όπου $a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{C}$ και $n>1$. Με τον μετασχηματισμό $z = cy$, όπου c ένας θετικός πραγματικός η (13.1) μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$$\begin{aligned}&c^n y^n + a_{n-1}c^{n-1}y^{n-1} + \cdots + c a_1 y + a_0 = 0\\ \Leftrightarrow\ & y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0\,.\end{aligned}$$

Επειδή η επιλογή του c είναι αυθαίρετη, μπορούμε να πάρουμε το c αρκούντως μεγάλο, ώστε

$$\frac{|a_{n-1}|}{c} + \cdots + \frac{|a_1|}{c^{n-1}} + \frac{|a_0|}{c^n} < 1.$$

Επομένως, αρκεί να αποδειχθεί ότι η (13.1) έχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα με την υπόθεση ότι

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1.$$

Δουλεύοντας με απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \neq 0$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $G:\mathbb{D}^2\to\mathbb{S}^1$, με $G(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$, η οποία έχει ως περιορισμό στον $\mathbb{S}^1$ τη συνεχή απεικόνιση $g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, με $g(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$. Επειδή η g επεκτείνεται συνεχώς στην G είναι μηδενοτοπική (πρόταση 10.1.3), άρα $\deg(g) = 0$. Όμως

$$\begin{aligned}0\leq t\leq 1 \Rightarrow |z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)|&\\ \geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)|&\\ \geq |z|^n - t(|a_{n-1}||z|^{n-1} \cdots + |a_1||z| + |a_0|)&\\ = 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) > 0\,,&\end{aligned}$$

άρα η $H:\mathbb{S}^1\times\mathbb{I}\to\mathbb{S}^1$, με $H(z,t) = \frac{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{|z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)|}$, είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον, $H(z,0) = z^n$ και $H(z,1) = g(z)$ για κάθε $z\in\mathbb{S}^1$, άρα η $h:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, με $h(z) = z^n$ είναι ομοτοπική με την g, επομένως $n = \deg(h) = \deg(g) = 0$, άτοπο. □

Πρόταση 13.3.2. ***(Θεώρημα μη συστολής)*** *Δεν υπάρχει συστολή του δίσκου $\mathbb{D}^2$ στο σύνορό του, $\mathbb{S}^1$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ μια συστολή. Τότε η απεικόνιση $H : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^2$, με $H(x,t) = (1-t)x+tr(x)$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον, $H(x,0) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{D}^2$, $H(x,1) = r(x) \in \mathbb{S}^1$ για κάθε $x \in \mathbb{D}^2$ και $H(a,t) = a$ για κάθε $a \in \mathbb{S}^1$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Άρα ο $\mathbb{S}^1$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{D}^2$, επομένως $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{D}^2)$, δηλαδή $\mathbb{Z} \simeq \{e\}$, άτοπο. □

Μία εναλλακτική απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο είναι η ακόλουθη:

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει συστολή $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$, τότε

$$r \circ i = i_{\mathbb{S}^1}, \tag{13.2}$$

όπου $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ η ένθεση. Από την (13.2), συμπεραίνουμε ότι $(r \circ i)_* = (i_{\mathbb{S}^1})_*$, άρα

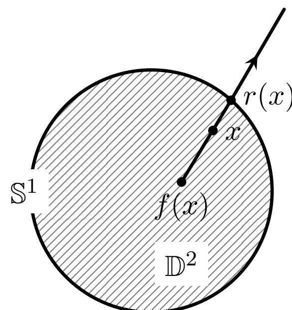
$$r_* \circ i_* = (i_{\mathbb{S}^1})_*. \tag{13.3}$$

Είναι $\pi_1(\mathbb{D}^2) \simeq 0$, άρα $r_* = \hat{0}$, γιατί η r_* είναι ομομορφισμός από την τετριμμένη ομάδα $\pi_1(\mathbb{D}^2)$ στην ομάδα $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Από την (13.3), συμπεραίνουμε ότι $(i_{\mathbb{S}^1})_* = \hat{0}$, άρα $1 = \deg(i_{\mathbb{S}^1})_* = \deg \hat{0} = 0$, άτοπο.

Πρόταση 13.3.3. ***(θεώρημα σταθερού σημείου ή Θεώρημα Brouwer)***[3] *Αν η απεικόνιση $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{D}^2$, ώστε $f(x) = x$. (Κάθε συνεχής απεικόνιση από τον μοναδιαίο δίσκο στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο).*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{D}^2$. Θεωρούμε την ημιευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο x και έχει αρχή το σημείο $f(x)$ (σχήμα 13.2) και υποθέτουμε ότι η ημιευθεία αυτή τέμνει τον $\mathbb{S}^1$ στο σημείο $r(x)$.
Αν $\|x\| < 1$, τότε τα διανύσματα $x - f(x)$ και $r(x) - x$ είναι ομόρροπα, άρα υπάρχει θετικός πραγματικός λ, ώστε

$$r(x) = x + \lambda(x - f(x)) \tag{13.4}$$



Σχήμα 13.2

[3]Luitzen Brouwer (1881-1966): Ολλανδός μαθηματικός.

Η (13.4) συνεπάγεται την [4]

$$1 = \|r(x)\| = \|x + \lambda(x - f(x))\|,$$

άρα

$$\lambda^2\|x - f(x)\|^2 + 2\langle x, x - f(x)\rangle\lambda + \|x\|^2 - 1 = 0. \tag{13.5}$$

Συνεπώς το λ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης (13.5), δηλαδή

$$\lambda = \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}.$$

Κατά συνέπεια, αν $\|x\| < 1$, τότε

$$r(x) = x + \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}(x - f(x)).$$

Όταν το $\mathbb{B}^2 \ni x \to z \in \mathbb{S}^1$, τότε $x = (x_1, x_2) \to z = (z_1, z_2)$, άρα $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 1$. Επιπλέον $f(x) \to f(z) = (y_1, y_2)$. Επομένως

$$\begin{aligned}\langle x, x - f(x)\rangle &\to \langle z, z - f(z)\rangle \\ &= z_1^2 + z_2^2 - (z_1y_1 + z_2y_2).\end{aligned}$$

- Αν $z_1y_1 + z_2y_2 < 0$, τότε $\langle z, z - f(z)\rangle > 0$.
- Αν $z_1y_1 + z_2y_2 \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned}1 \geq (z_1^2 + z_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (z_1y_1 + z_2y_2)^2 &\Rightarrow z_1y_1 + z_2y_2 \leq 1 \\ &\Rightarrow \langle z, z - f(z)\rangle \geq 0\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $\langle z, z - f(z)\rangle \geq 0$, άρα

$$\lim_{x\to z}\left[-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}\right] = 0,$$

άρα $\lim\limits_{x\to z} r(x) = x$. Επομένως η απεικόνιση $\phi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$, με

$$\phi(x) = \begin{cases} r(x), & x \in \mathbb{B}^2 \\ x, & x \in \mathbb{S}^1 \end{cases},$$

είναι συνεχής, με $\phi(x) = x$, αν $x \in \mathbb{S}^1$, άρα η ϕ είναι συστολή του $\mathbb{D}^2$ στον $\mathbb{S}^1$, άτοπο. □

Μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Brouwer, χωρίς χρήση γεωμετρίας και του θεωρήματος μη συστολής είναι η ακόλουθη:

[4]Το $\langle \ldots, \ldots \rangle$ σημαίνει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο, άρα $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{D}^2$, επομένως η απεικόνιση $g : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$, με $g(x) = \frac{f(x)-x}{\|f(x)-x\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Αν $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ είναι η ένθεση, τότε για την $h = g \circ i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $h = g \circ i$ έχουμε:

$$x \neq f(x) \wedge 0 \leq t < 1 \Rightarrow \|x\| = 1 > t \geq t\|f(x)\| = \|tf(x)\|$$
$$\Rightarrow x \neq tf(x),$$

άρα η $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $F(x,t) = \frac{x-tf(x)}{\|x-tf(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $F(x,0) = x$ και $F(x,1) = (g \circ i)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^1$, άρα $g \circ i \approx i_{\mathbb{S}^1}$, επομένως για τους επαγόμενους ομομορφισμούς έχουμε

$$g_* \circ i_* = (i_{\mathbb{S}^1})_* \tag{13.6}$$

Αλλά η $g_* : \pi_1(\mathbb{D}^2) \to \pi_1(\mathbb{D}^2)$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, γιατί $\pi_1(\mathbb{D}^n) \simeq \{0\}$, επομένως η (13.6) δίνει την σχέση $\hat{0} = \hat{0} \circ i_* = (i_{\mathbb{S}^1})_*$, άτοπο. □

Το θεώρημα Brouwer γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 13.3.4. *Αν K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με μη κενό εσωτερικό και $f : K \to K$ συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in K$, ώστε $f(x) = x$.*

Απόδειξη: Από την πρόταση 7.2.13 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{D}^2 \to K$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D}^2 \\ \downarrow g & & \uparrow g^{-1} \\ K & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

Η $\phi = g^{-1} \circ f \circ g$ είναι μία συνεχής απεικόνιση του $\mathbb{D}^2$ στον $\mathbb{D}^2$, άρα (θεώρημα Brouwer), υπάρχει $y \in \mathbb{D}^2$, ώστε $\phi(y) = y$. Έχουμε

$$\phi(y) = y \Rightarrow g^{-1}(f(g(y))) = y$$
$$\Rightarrow f(g(y)) = g(y)\,.$$

Το $g(y)$ είναι το ζητούμενο x της f. □

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα Brouwer στη διάσταση 1 είναι το γνωστό από τον απειροστικό λογισμό: Αν η $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{I}$, ώστε $f(x) = x$.

2. Η απαίτηση το K να είναι συμπαγές δεν μπορεί να παραληφθεί. Για παράδειγμα η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x,y) = (x+1, y+1)$ δεν έχει σταθερό σημείο.

Πρόταση 13.3.5. *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση*

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1,\ \text{ώστε}\ f(-x) = -f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$, με $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$. Θεωρούμε τον ισημερινό S της $\mathbb{S}^2$, για τον οποίον ισχύει $S \cong \mathbb{S}^1$. Είναι γνωστόν (παραδείγματα 2.3.1) υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^2_+$, τέτοιος ώστε $h/\mathbb{S}^1 = i_{\mathbb{S}^1}$. Επιπλέον θεωρούμε τον περιορισμό r της $(f/\mathbb{S}^1) \circ h$ στον $\mathbb{S}^1$.

$$\mathbb{D}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{S}^2_+ \xrightarrow{f/\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1 .$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow r(-x) &= (f/\mathbb{S}^1)\big[(h/\mathbb{S}^1)(-x)\big] \\ &= (f/\mathbb{S}^1)(-x) \\ &= -(f/\mathbb{S}^1)(x) \\ &= -(f/\mathbb{S}^1)\big[(h/\mathbb{S}^1)(x)\big] \\ &= -r(x)\,. \end{aligned}$$

Άρα η $r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, άρα δεν είναι μηδενοτοπική (πόρισμα της πρότασης 13.2.7), άτοπο, γιατί επεκτείνεται συνεχώς στην $(f/\mathbb{S}^1) \circ h : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ (πρόταση 10.1.3). □

Μία ενδιαφέρουσα εναλλακτική απόδειξη είναι η:

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει τέτοια απεικόνιση f. Θεωρούμε την ένθεση $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$, με

$$\mathbb{S}^1 \ni (x_1, x_2) \xrightarrow{i} (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{S}^2 .$$

Για την απεικόνιση $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $g = f \circ i$ ($\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^1$) για κάθε $x \in \mathbb{S}^1$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(i(-x)) \\ &= f(-x) = -f(x) \\ &= -f(i(x)) = -g(x)\,, \end{aligned}$$

άρα από την πρόταση 13.2.7 συμπεραίνουμε ότι $\deg(g) = 2k+1$. Αφετέρου η i επάγει στις θεμελιώδεις ομάδες ομομορφισμό $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^2)$.
Επειδή $\pi_1(\mathbb{S}^2) \simeq \{e\}$ είναι $i_* = \hat{0}$. Επομένως, αν g_* είναι ο ομομορφισμός που επάγει η g, τότε $g_* = i_* \circ f_* = \hat{0}$, άρα $\deg(g) = 0$, δηλαδή $2k+1 = 0$, άτοπο. □

Πρόταση 13.3.6. ***(Θεώρημα των Borsuk-Ulam)***[5] *Αν η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{S}^2$, ώστε $f(-x) = f(x)$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f(-x) \neq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$. Θεωρούμε την απεικόνιση $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$, με $h(x) = \frac{f(-x)-f(x)}{\|f(-x)-f(x)\|}$, η οποία είναι καλώς ορισμένη και συνεχής και για την οποία ισχύει $h(-x) = -h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$, το οποίο, από την πρόταση 13.3.5 είναι άτοπο. □

[5]Karol Borsuk (1905-1982): Πολωνός μαθηματικός. Stanislaw Ulam(1909-1984): Αυστροαμερικανός μαθηματικός.

Πρόταση 13.3.7. ***(Θεώρημα του μετεωρολόγου)*** *Ανά πάσα χρονική στιγμή στην γήινη επιφάνεια υπάρχουν αντιποδικά σημεία, τα οποία έχουν την ίδια θερμοκρασία και πίεση.*

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τη γήινη επιφάνεια, ως τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο της σφαίρας το διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών θερμοκρασία-πίεση, τότε η f είναι συνεχής, γιατί για κοντινά σημεία έχουμε ανεπαίσθητες μεταβολές της θερμοκρασίας και της πίεσης. Επομένως το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος των Borsuk -Ulam. □

Πρόταση 13.3.8. *Η $\mathbb{S}^2$ δεν εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^2$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, για το οποίο ισχύει $\mathbb{S}^2 \cong A$ και $f : \mathbb{S}^2 \to A$ ένας ομοιομορφισμός. Θεωρούμε $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $g(x) = f(x)$. Από το θεώρημα των Borsuk- Ulam υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^2$, ώστε $g(-x_0) = g(x_0)$, άρα $f(-x_0) = f(x_0)$, άρα $-x_0 = x_0$, άρα $x_0 = \mathbf{0}$, άτοπο. □

Πρόταση 13.3.9. ***(Θεώρημα Schnirelmann)***[6] *Αν το $\{A_1, A_2, A_3\}$ είναι ένα κάλυμμα της $\mathbb{S}^2$ με κλειστά υποσύνολα της, τότε κάποιο από τα A_i περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων της σφαίρας.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι τα A_1 και A_2 δεν περιέχουν αντιποδικά σημεία και θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x) = (d(x, A_1), (d(x, A_2))$. Από το θεώρημα των Borsuk- Ulam, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^2$, ώστε $f(-x_0) = f(x_0)$, άρα $d(x_0, A_1) = d(-x_0, A_1)$ και $d(x_0, A_2) = d(-x_0, A_2)$. Είναι για $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} x_0 \in A_i &\Leftrightarrow d(x_0, A_i) = d(-x_0, A_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x_0 \in A_i \quad \forall i = 1, 2\,, \end{aligned}$$

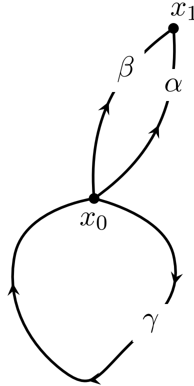
άρα $x_0, -x_0 \notin A_1 \cup A_2$, άρα $x_0, -x_0 \in A_3$. □

[6] Lev Genrikhovich Schnirelmann (1905-1938): Λευκορώσος μαθηματικός.

13.4 Ασκήσεις

1. Έστω X τοπολογικός χώρος και α, β δρόμοι, με αρχή το x_0 και πέρας το x_1 (σχήμα 13.3). Αν η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, να δειχθεί ότι

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}.$$



Σχήμα 13.3

Απόδειξη: Έστω $\gamma \in L(X, x_0)$. Είναι $\alpha * \overline{\beta} \in L(X, x_0)$. Επειδή η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή έχουμε

$$\begin{aligned}
[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) &\Rightarrow [\gamma][\alpha * \overline{\beta}] = [\alpha * \overline{\beta}][\gamma] \\
&\Rightarrow \gamma * \alpha * \overline{\beta} \approx_p \alpha * \overline{\beta} * \gamma \\
&\Rightarrow \overline{\alpha} * \gamma * \alpha * \overline{\beta} * \beta \approx_p \overline{\alpha} * \alpha * \overline{\beta} * \gamma * \beta \\
&\Rightarrow \overline{\alpha} * \gamma * \alpha \approx_p \overline{\beta} * \gamma * \beta \\
&\Rightarrow \hat{\alpha}([\gamma]) = \hat{\beta}([\gamma]),
\end{aligned}$$

άρα $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

2. Έστωσαν A ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, X τοπολογικός χώρος και $h : A \to X$ συνεχής απεικόνιση, η οποία επεκτείνεται συνεχώς στην $f : \mathbb{R}^n \to X$. Να αποδειχθεί ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός $h_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$, όπου $x_0 \in A$ και $y_0 = h(x_0)$ είναι ο τετριμμένος.

Απόδειξη: Έχουμε $A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} X$, όπου $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ η ένθεση. Άρα

$$f \circ i = h. \tag{13.7}$$

Για τους επαγόμενους ομομορφισμούς έχουμε:

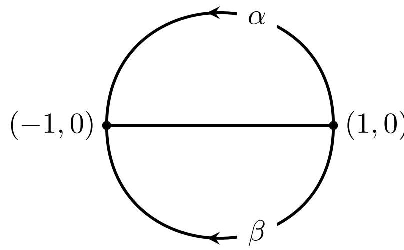
$$\pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, y_0).$$

Από την (13.7), λόγω της συναρτησιακότητας έχουμε:

$$f_* \circ i_* = h_*. \tag{13.8}$$

Αλλά $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{0\}$, επομένως από την (13.8) συμπεραίνουμε ότι $f_* = \hat{0}$, άρα $h_* = \hat{0}$, δηλαδή το ζητούμενο.

3. Να αποδειχθεί ότι οι δρόμοι $\alpha(t) = e^{i\pi t}$, $t \in \mathbb{I}$ και $\beta(t) = e^{-i\pi t}$, $t \in \mathbb{I}$ δεν είναι ομοτοπικοί στο τρυπημένο επίπεδο (σχήμα 13.4).



Σχήμα 13.4

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Θεωρούμε ότι η βάση των βρόχων του κύκλου είναι το σημείο $(1,0) = \mathbf{1}$. Έστω ότι $\alpha \approx_p \beta$, άρα

$$\alpha * \overline{\beta} \approx_p \beta * \overline{\beta} \Rightarrow \alpha * \overline{\beta} \approx_p e,$$

όπου e ο βρόχος, με $e(t) = \mathbf{1}$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Αν θέσουμε $\gamma = \alpha * \overline{\beta} = e^{2\pi i t}$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma \approx e &\Rightarrow [\gamma] = [e] \\ &\Rightarrow t(\gamma) = t(e) \\ &\Rightarrow 1 = 0\,, \end{aligned}$$

άτοπο. (Βλέπε την παρατήρηση στα παραδείγματα 10.1.1).

4. Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_0 \in X$ και $x_0 \in Y$, όπου Y είναι η συνεκτική συνιστώσα, στην οποία ανήκει το x_0. Να δειχθεί ότι $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)$.
Απόδειξη: Θεωρούμε τον ομομορφισμό $k_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, που επάγει η ένθεση $k : Y \hookrightarrow X$. Επιπλέον θεωρούμε τον ομομορφισμό $p : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$, με $p\big([\alpha]\big) = [\alpha]$. Η απεικόνιση p είναι καλώς ορισμένη, γιατί ο α είναι ένας δρόμος στον Y, επειδή το $\alpha\big(\mathbb{I}\big)$ είναι δρομοσυνεκτικό και $x_0 \in \alpha\big(\mathbb{I}\big) \cap Y$, άρα $\alpha\big(\mathbb{I}\big) \subseteq Y$. Για τους δύο ομομορφισμούς k_* και p έχουμε $k_* \circ p = i_{\pi_1(X,x_0)}$ και $p \circ k_* = i_{\pi_1(Y,x_0)}$, άρα ο k_* είναι ισομορφισμός, επομένως $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)$.

5. Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου X που προκύπτει από τον $\mathbb{R}^3$ με την αφαίρεση του άξονα των z είναι ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων.
Απόδειξη: Έστω $A = \big\{(x, y, 0)/x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \neq 0\big\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to X$, με

$$H((x,y,z),t) = (x,y,(1-t)z)$$

για την οποία έχουμε

- $H((x,y,z),0) = (x,y,z)$ για κάθε $(x,y,z) \in X$,
- $H((x,y,z),1) = (x,y,0) \in A$ για κάθε $(x,y,z) \in X$ και
- $(x,y,0) \in A \Rightarrow H((x,y,0),t) = (x,y,0)$ $t \in \mathbb{I}$.

Άρα το A είναι συστολή παραμόρφωσης του X, επομένως

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(A) \simeq \pi_1(X).$$

6. Να δειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα του κυλίνδρου $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ είναι ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων.
Απόδειξη: Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, με $H((x,t),s) = (x,(1-s)t+s)$. Έχουμε

   - $H((x,t),0) = (x,t)$ για κάθε $(x,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$,
   - $H((x,t),1) = (x,1) \in A = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ για κάθε $(x,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ και
   - $H(x,1),s) = (x,1)$ για κάθε $(x,1) \in A$ και για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Άρα το $A = \mathbb{S}^1 \times \{1\} \cong \mathbb{S}^1$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, επομένως

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

7. Να υπολογισθεί η θεμελιώδης ομάδα της λωρίδας του Moebius.
Λύση: Η λωρίδα Moebius είναι χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο, που προκύπτει από την ταύτιση των σημείων $(0,y)$ και $(1,1-y)$ για κάθε $y \in \mathbb{I}$. Ο υπόχωρος $S = \{\big[(x,\frac{1}{2})\big] \,/\, 0 \leq x \leq 1\}$ της $\mathbb{M}$ είναι ο κύκλος που προκύπτει από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $A(0,\frac{1}{2})$ και $B(1,\frac{1}{2})$, όταν ταυτίσουμε τα άκρα του. Επομένως $S \cong \mathbb{S}^1$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : \mathbb{M} \times \mathbb{I} \to \mathbb{M}$, με $H\big(\big[(x,y)\big],t\big) = \big[(x,(1-t)y+\frac{t}{2})\big]$, για την οποία έχουμε

   - $H\big(\big[(x,y)\big],0\big) = \big[(x,y)\big]$ για κάθε $[(x,y)] \in \mathbb{M}$,
   - $H\big(\big[(x,y)\big],1\big) = \big[(x,\frac{1}{2})\big]$ για κάθε $[(x,y)] \in \mathbb{M}$ και
   - $H\big(\big[(x,\frac{1}{2})\big],t\big) = \big[(x,\frac{1}{2})\big]$ για κάθε $\big[(x,\frac{1}{2})\big] \in S$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

   Άρα ο S είναι συστολή παραμόρφωσης της $\mathbb{M}$, επομένως

$$\pi_1(\mathbb{M}) \simeq \pi_1(S) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

8. Αν $p \in \mathbb{S}^1$, να αποδειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{S}^1 \times \{p\}$ είναι συστολή του χώρου $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, αλλά δεν είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Για το πρώτο, θεωρήστε τη συνεχή απεικόνιση $r : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \{p\}$, με $r(x,y) = (x,p)$, η οποία είναι συστολή.
Για το δεύτερο με απαγωγή σε άτοπο. Έχουμε ότι $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \{p\}$, άρα $\pi_1\big(\mathbb{S}^1 \times \{p\}\big) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Αν ο $\mathbb{S}^1 \times \{p\}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, τότε

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \{p\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

άτοπο.

9. Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα της γεμάτης σπείρας $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ είναι ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων.

   Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) &\simeq \pi_1(\mathbb{D}^2) \times \pi_1(\mathbb{S}^1)\\ &\simeq \{e\} \oplus \mathbb{Z}\\ &\simeq \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

10. Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $A = \{z \in \mathbb{R}^2/\|z\| \geq 1\}$ είναι ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων.

    Υπόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι συστολή παραμόρφωσης του A.

11. Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $A = \{z \in \mathbb{R}^2/\|z\| > 1\}$ είναι ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων.
    Υπόδειξη: Έχουμε ότι $A \cong \mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Η απεικόνιση $A \ni \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \mapsto (\rho - 1)(\cos\theta + i\sin\theta)$, με $\rho > 1$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ είναι ομοιομορφισμός μεταξύ του A και του $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

12. Δύο χώροι με ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι;
    Απάντηση: Όχι απαραίτητα. Για τους χώρους $\mathbb{S}^2$ και $\mathbb{R}^2$ έχουμε $\pi_1(\mathbb{S}^2) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$, αλλά δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, γιατί ο δεύτερος είναι συσταλτός, άρα ομοτοπικά ισοδύναμος με έναν μονοσημειακό χώρο, ενώ ο πρώτος δεν είναι συσταλτός (θα το αποδείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο).

13. Έστω $f, g, \phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ συνεχείς απεικονίσεις, με $\deg f = m$, $\deg g = n$ και $\phi(z) = f(z)g(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, να δειχθεί ότι $\deg\phi = m + n$.
    Απόδειξη: Έχουμε $\deg f = m$, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $H(z, 0) = f(z)$ και $H(z, 1) = z^m$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Επίσης $\deg f = n$, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $G(z, 0) = g(z)$, και $G(z, 1) = z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $F(z, t) = H(z, t)G(z, t)$ και έχουμε

$$F(z, 0) = H(z, 0)G(z, 0) = \phi(z) \text{ και } F(z, 1) = H(z, 1)G(z, 1) = z^{m+n}$$

    για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$. Επομένως $\phi \approx h$, όπου $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $h(z) = z^{m+n}$, άρα $\deg\phi = \deg h = m + n$.

14. Αν $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο, το οποίο δεν έχει ρίζα μέτρου 1 και έχει k διακεκριμένες ρίζες μέτρου <1, να αποδειχθεί ότι ο βαθμός της απεικόνισης $\overline{p} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $\overline{p}(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|}$ είναι ίσος με k.
    Απόδειξη: Έστωσαν $z_1, ..., z_k$ οι ρίζες του p με μέτρο μικρότερο της μονάδας και w_1, ..., w_m οι ρίζες του p με μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας. Θεωρούμε τον αριθμό

$$b = \frac{(-1)^m w_1 \cdots w_m}{|w_1 \cdots w_m|}.$$

Είναι $b \in \mathbb{S}^1$. Ακολούθως θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με

$$H(z,t) = \frac{(z-tz_1)\cdots(z-tz_k)(tz-w_1)\cdots(tz-w_m)}{|(z-tz_1)\cdots(z-tz_k)(tz-w_1)\cdots(tz-w_m)|},$$

για την οποία έχουμε

$$H(z,0) = bz^k \text{ και } H(z,1) = \overline{p}(z).$$

Συνεπώς $q \approx \overline{p}$, όπου $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $q(z) = bz^k$, άρα, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $\deg(\overline{p}) = \deg(q) = k$.

15. Αν η για την συνεχή απεικόνιση $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ισχύει $g(-x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$, τότε η g είναι επί.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι η g δεν είναι επί, άρα, υπάρχει $a \in \mathbb{S}^2$, ώστε $g(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$. Συνεπώς η απεικόνιση $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$, με $h(x) = g(x)$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Είναι $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^2$. Αν $f : \mathbb{S}^2 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^2$ ένας ομοιομορφισμός, θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f \circ h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$. Από το θεώρημα Borsuk-Ulam έχουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{S}^2$, ώστε

$$\begin{aligned} f(h(x)) = f(h(-x)) &\Rightarrow h(x) = h(-x) \\ &\Rightarrow g(x) = g(-x)\,, \end{aligned}$$

άτοπο.

16. Αν η συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ είναι μηδενοτοπική, να δειχθεί ότι έχει σταθερό σημείο.
Απόδειξη: Επειδή η f είναι μηδενοτοπική επεκτείνεται συνεχώς σε μια απεικόνιση

$$g : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2.$$

Από το θεώρημα Brouwer, η g έχει ένα σταθερό σημείο, ας πούμε το x. Άρα

$$g(x) = x \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow f(x) = g(x) = x.$$

17. Έστω A ένας 3×3 πίνακας, τα στοιχεία του οποίου είναι θετικοί πραγματικοί, να δειχθεί ότι ο A έχει μία τουλάχιστον θετική ιδιοτιμή.
Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο B, το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, όπου $x_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, 3$. Προφανώς κάποιο από τα x_i είναι θετικό και επιπλέον, $B \cong \mathbb{D}^2$. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση, της οποίας πίνακας, ως προς την ορθοκανονική βάση είναι ο A. Αν $x \in B$, τότε $T(x) = Ax$, άρα, από την υπόθεση που κάναμε για τον A, $T(x) = (y_1, y_2, y_3)$, με $y_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, 3$ και κάποιο από τα y_i να είναι θετικό. Επομένως η απεικόνιση $S : B \to B$, με $S(x) = \frac{T(x)}{\|T(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Άρα, επειδή $B \cong \mathbb{D}^2$ υπάρχει $x_0 \in B$, ώστε $S(x_0) = x_0$, δηλαδή $T(x_0) = \|T(x_0)\| x_0$, επομένως ο θετικός αριθμός $\|T(x_0)\|$ είναι η ζητούμενη θετική ιδιοτιμή του A.

18. (Θεώρημα Borsuk-Ulam στη διάσταση 1) Αν η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι, υπάρχει $x \in \mathbb{S}^1$, ώστε $f(-x) = f(x)$.
Απόδειξη: Αποδεικνύεται με επιχειρήματα συνολοθεωρητικής τοπολογίας. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - f(-x)$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι συμπαγής και συνεκτικός, το σύνολο $h(\mathbb{S}^1)$ είναι ένα μη κενό συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα ένα μη τετριμμένο διάστημα της μορφής $[a, b]$.
Επιπλέον για κάποιο $x \in \mathbb{S}^1$ είναι
$$h(x)h(-x) = (f(x) - f(-x))(f(-x) - f(x)) \leq 0,$$
άρα $0 \in [a, b]$, συνεπώς το ζητούμενο αποδείχθηκε.

19. (Θεώρημα Schnirelmann στη διάσταση ένα) Αν το $\{A_1, A_2\}$ είναι ένα κάλυμμα του $\mathbb{S}^1$ με κλειστά υποσύνολά του, τότε κάποιο από τα A_i περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων του $\mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Έστω ότι το A_1 δεν περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, με $f(x) = d(x, A_1)$. Από την προηγούμενη άσκηση υπάρχει $x \in \mathbb{S}^1$, με $f(x) = f(-x)$, άρα $d(x, A_1) = d(-x, A_1)$. Έχουμε
$$\begin{aligned} x \in A_1 &\Rightarrow d(x, A_1) = 0 \\ &\Rightarrow d(-x, A_1) = 0 \\ &\Rightarrow -x \in A_1\,, \end{aligned}$$
το οποίο, εξ υποθέσεως είναι αδύνατο. Επομένως είναι $x, -x \notin A_1$. Επειδή όμως το $\{A_1, A_2\}$ είναι κάλυμμα του $\mathbb{S}^1$ θα είναι $x, -x \in A_2$.

20. Αν η $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ είναι ομοιομορφισμός, να δειχθεί ότι $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathbb{S}^1$, με $f(x) \in \mathbb{B}^2$, τότε
$$\mathbb{D}^2 \setminus \{x\} \cong \mathbb{D}^2 \setminus \{f(x)\}.$$
Ο χώρος $\mathbb{D}^2 \setminus \{x\}$ είναι συσταλτός, άρα $\pi_1(\mathbb{D}^2 \setminus \{x\}) \simeq \{e\}$ και $\mathbb{D}^2 \setminus \{f(x)\} \approx \mathbb{B}^2 \setminus \{f(x)\} \approx \mathbb{S}^1$,[7] άρα $\{e\} \simeq \pi_1(\mathbb{D}^2 \setminus \{f(x)\}) \simeq \mathbb{Z}$, άτοπο. Επομένως $f(\mathbb{S}^1) \subseteq \mathbb{S}^1$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathbb{S}^1 \subseteq f(\mathbb{S}^1)$, άρα $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

21. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συστολή του $\mathbb{R}^3$ σε ένα υποσύνολο του A, με $A \cong \mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $r : \mathbb{R}^3 \to A$ μια συστολή, τότε $r \circ i = i_A$, όπου $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ η ένθεση. Επομένως,
$$r_* \circ i_* = (i_A)_*. \tag{13.9}$$
Αλλά $\pi_1(\mathbb{R}^3) \simeq \{e\}$, συνεπώς η r_* είναι η μηδενική. Από την (13.9) έχουμε $(i_A)_* = \hat{0}$, άρα $1 = \deg i_{\mathbb{S}^1} = 0$, άτοπο.

[7] Ο χώρος $\mathbb{B}^2$ μείον ένα σημείο είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\mathbb{R}^2$ μείον ένα σημείο, ο οποίος με τη σειρά του είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{S}^1$.

22. Αν A ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, να υπολογίσετε την $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A)$.
Λύση: Υποθέτουμε ότι $\mathbf{0} \in A$. Αλλιώς παίρνουμε την $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με $f(x) = x - x_1$ για κάποιο $x_1 \in A$ και έχουμε $\mathbb{R}^3 \setminus A \cong \mathbb{R}^3 \setminus f(A)$, με $\mathbf{0} \in f(A)$. Το σύνολο $A' = \{\|z\|/z \in A\}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $[0, \infty)$. Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $r \in (0, \infty) \setminus A'$. Ακολούθως θεωρούμε τη σφαίρα $S = \{z \in \mathbb{R}^3 / \|z\| = r\}$. Είναι $A \cap S = \varnothing$ και $S \cong \mathbb{S}^2$, άρα

$$\pi_1(S) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^2) \simeq \{e\}.$$

Στο επόμενο βήμα θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $H : (\mathbb{R}^3 \setminus A) \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3 \setminus A$, με $H(z,t) = t(r\frac{z}{\|z\|}) + (1-t)z$, για την οποία έχουμε

- $H(z, 0) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^3 \setminus A$,
- $H(z, 1) = r\frac{z}{\|z\|} \in S$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^3 \setminus A$ και
- $z \in S \Rightarrow \|z\| = r \Rightarrow H(z,t) = tz + (1-t)z = z$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Επομένως ο S είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{R}^3 \setminus A$, άρα

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) \simeq \pi_1(S) \simeq \{e\}.$$

23. Να βρεθεί η θεμελιώδης ομάδα του συνόλου X των 2×2 πινάκων με θετική ορίζουσα.
Λύση: Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1 \right\},$$

το οποίο εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$. Επομένως $\pi_1(A) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Ακολούθως θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : X \times \mathbb{I} \to X$, με

$$f\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), t\big) = \begin{pmatrix} a(1-t) + t\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & b(1-t) - t\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ c(1-t) + t\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & d(1-t) + t\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix},$$

για την οποία έχουμε

- $H(Z, 0) = Z$ για κάθε $Z \in X$,
- $H(Z, 1) \in A$ για κάθε $Z \in X$, και
- $Z \in A \Rightarrow H(Z, t) = Z$.

Άρα το A είναι μια συστολή παραμόρφωσης του X, επομένως $\pi_1(X) \simeq \pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}$.

13.5 Ομάδα Bruschlinsky

Αρκετοί μαθηματικοί ορίζουν τους βρόχους σε έναν τοπολογικό χώρο X με έναν διαφορετικό τρόπο σε σχέση με αυτόν που έχουμε ήδη γνωρίσει. Έως τώρα ορίσαμε τον βρόχο γ, ως μια συνεχή απεικόνιση του $\mathbb{I}$ στον X, ώστε $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$. Έχουμε δει στο κεφάλαιο που πραγματεύεται τους χώρους πηλίκα ότι ο $\mathbb{S}^1$, προκύπτει ως χώρος πηλίκο στον $\mathbb{I}$ από την ταύτιση των άκρων του 0 και 1, δηλαδή $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{I}/\{0,1\}$. Στη θέση λοιπόν της απεικόνισης γ, μπορούμε να πάρουμε την $\gamma' : \mathbb{S}^1 \to X$, με $\gamma'\big(e^{2\pi i t}\big) = \gamma(t)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\gamma} & X \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \nearrow_{\gamma'} & \\ \mathbb{S}^1 & & \end{array}$$

Αντί της θεμελιώδους ομάδας, η οποία ορίζεται στις κλάσεις ομοτοπίας των βρόχων $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$ μπορούμε να ορίσουμε μία διαφορετική ομάδα, η οποία ορίζεται στις κλάσεις ομοτοπίας των συνεχών απεικονίσεων του X στον $\mathbb{S}^1$. Η ομάδα αυτή, όπως θα διαπιστώσουμε είναι αβελιανή πάντοτε, δηλαδή ανεξάρτητα από την επιλογή του χώρου X.

Ορισμός 13.5.1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ονομάζουμε **αντιβρόχο** στον X κάθε συνεχή απεικόνιση $a : X \to \mathbb{S}^1$. Το σύνολο των αντιβρόχων στο X συμβολίζουμε με $E(X)$.

Αν $a, b \in E(X)$ ορίζουμε την απεικόνιση $c = a \bullet b : X \to \mathbb{S}^1$, με $c(t) = a(t)b(t)$, όπου ο πολλαπλασιασμός στο δεύτερο μέλος της ισότητας είναι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, αν δούμε τα $a(t)$ και $b(t)$, ως στοιχεία του $\mathbb{C}^*$. Επίσης ορίζουμε την απεικόνιση $a^{-1} : X \to \mathbb{S}^1$, ως $a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)}$, όπου η διαίρεση στο δεύτερο μέλος της ισότητας είναι διαίρεση στο $\mathbb{C}^*$. Αφήνουμε ως άσκηση της απόδειξη της ακόλουθης πρότασης

Πρόταση 13.5.1. *Αν X είναι τοπολογικός χώρος και $a, b \in E(X)$, τότε*

α΄) $a \bullet b \in E(X)$.

β΄) $a^{-1} \in E(X)$.

Επίσης αφήνουμε ως άσκηση την απόδειξη της πρότασης

Πρόταση 13.5.2. *Αν X είναι τοπολογικός χώρος, τότε το σύνολο $E(X)$, με την πράξη $\bullet$, όπως την ορίσαμε παραπάνω είναι αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο την συνεχή απεικόνιση $i : X \to \mathbb{S}^1$, με $i(x) = \mathbf{1}$ και αντίστροφο του αντιβρόχου a, τον αντιβρόχο a^{-1}.*

Πρόταση 13.5.3. *Αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, όπου X και Y τοπολογικοί χώροι, τότε η απεικόνιση $f^\diamond : E(Y) \to E(X)$, με $f^\diamond(a) = a \circ f$ είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη: Έστωσαν $x \in X$ και $a, b \in E(Y)$, τότε

$$\begin{aligned} \big(f^\diamond(a \bullet b)\big)(x) = \big((a \bullet b) \circ f\big)(x) &= (a \bullet b)\big(f(x)\big) \\ &= a(f(x))b(f(x)) \\ &= (a \circ f)(x)(b \circ f)(x) \\ &= \big(f^\diamond(a)\big)(x)\big(f^\diamond(b)\big)(x) \\ &= \big(f^\diamond(a) \bullet f^\diamond(b)\big)(x)\,, \end{aligned}$$

άρα $f^\diamond(a \bullet b) = f^\diamond(a) \bullet f^\diamond(b)$, δηλαδή η απεικόνιση $f^\diamond$ είναι ομομορφισμός ομάδων. □

Ορισμός 13.5.2. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Ο ομομορφισμός $f^\diamond : E(Y) \to E(X)$ που περιγράψαμε στην προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **επαγόμενος από την f ομομορφισμός**.

Πρόταση 13.5.4. *Αν X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ συνεχείς απεικονίσεις, τότε*

α΄) $(g \circ f)^\diamond = f^\diamond \circ g^\diamond$

β΄) $(i_X)^\diamond = i_{E(X)}$.

Απόδειξη:

α΄)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{g\circ f} & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E(Z) & \xrightarrow{g^\diamond} & E(Y) \\ & \searrow^{f^\diamond\circ g^\diamond} & \downarrow f^\diamond \\ & & E(X) \end{array} .$$

Έστω $a \in E(Z)$, τότε

$$\begin{aligned} (f^\diamond \circ g^\diamond)(a) &= f^\diamond\big(g^\diamond(a)\big) \\ &= f^\diamond\big(a \circ g\big) \\ &= (a \circ g) \circ f \\ &= a \circ (g \circ f) \\ &= (g \circ f)^\diamond(a)\,, \end{aligned}$$

άρα $(g \circ f)^\diamond = f^\diamond \circ g^\diamond$.

β΄) Έστω $a \in E(X)$ και $x \in X$, τότε

$$\begin{aligned} \big((i_X)^\diamond(a)\big)(x) &= (a \circ i_X)(x) = a\big(i_X(x)\big) \\ &= a(x) = \big(i_{E(X)}(a)\big)(x)\,, \end{aligned}$$

άρα $(i_X)^\diamond = i_{E(X)}$.

□

Πρόταση 13.5.5. *Αν X, Y τοπολογικοί χώροι και $X \cong Y$, τότε $E(X) \simeq E(Y)$.*

Απόδειξη: Έστω $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και $f^\diamond : E(Y) \to E(X)$ ο επαγόμενος από την f ομομορφισμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} = i_Y &\Rightarrow (f \circ f^{-1})^\diamond = (i_Y)^\diamond \\ &\Rightarrow (f^{-1})^\diamond \circ f^\diamond = i_{E(Y)}, \end{aligned}$$

άρα η $f^\diamond$ είναι 1-1. Επίσης

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f = i_X &\Rightarrow (f^{-1} \circ f)^\diamond = (i_X)^\diamond \\ &\Rightarrow f^\diamond \circ (f^{-1})^\diamond = i_{E(X)}, \end{aligned}$$

άρα η $f^\diamond$ είναι επί, συνεπώς είναι ισομορφισμός. Επομένως $E(X) \simeq E(Y)$. □

Σχόλιο: Άμεση συνέπεια της πρότασης 13.5.5 είναι το ότι η ομάδα $E(X)$ είναι τοπολογικό αναλλοίωτο. Όμως, παρότι η ομάδα αυτή είναι ένα τοπολογικό αναλλοίωτο, λόγω της μεγάλης της έκτασης είναι εξαιρετικά δύσκολο να την χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη τοπολογικών χώρων. Μπορούμε όμως να την συμμαζέψουμε με την γνωστή από την άλγεβρα τεχνική των πηλίκων. Τα επόμενα στοχεύουν σ' αυτό.

Πρόταση 13.5.6. *Αν $a, a', b, b' \in E(X)$, ώστε $a \approx a'$ και $b \approx b'$, τότε $a \bullet b \approx a' \bullet b'$.*

Απόδειξη: Είναι $a \approx a'$, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε $H(x,0) = a(x)$ και $H(x,1) = a'(x)$ για κάθε $x \in X$. Επίσης είναι $b \approx b'$, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε $G(x,0) = b(x)$ και $G(x,1) = b'(x)$ για κάθε $x \in X$. Για την συνεχή απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $F(x,t) = H(x,t)G(x,t)$ (ο πολλαπλασιασμός στο δεύτερο μέλος είναι πολλαπλασιασμός μιγαδικών) έχουμε $F(x,0) = H(x,0)G(x,0) = a(x)b(x) = (a \bullet b)(x)$ για κάθε $x \in X$ και $F(x,1) = H(x,1)G(x,1) = a'(x)b'(x) = (a' \bullet b')(x)$ για κάθε $x \in X$, επομένως $a \bullet a' \approx b \bullet b'$.

Ορισμός 13.5.3. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει στην ομάδα $E(X)$ η σχέση ισοδυναμίας $\approx$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(X)$. Για κάθε $a \in E(X)$ είναι

$$[a] \in \mathcal{H}(X) \Leftrightarrow [a] = \{b \in E(X) / b \approx a\}.$$

Στο σύνολο $\mathcal{H}(X)$ ορίζουμε την πράξη $+$, ως εξής:

$$[a] + [b] = [a \bullet b].$$

Συνέπεια της πρότασης 13.5.6 είναι το ότι η πιο πάνω πράξη + είναι καλώς ορισμένη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $\mathcal{H}(X)$, με την πράξη $+$ είναι αβελιανή ομάδα. Το μηδενικό στοιχείο της ομάδας είναι το $[i_{E(X)}]$ και το αντίθετο του $[a]$ είναι το $-[a] = [a^{-1}]$. Η ομάδα $\mathcal{H}(X)$ ονομάζεται **ομάδα Bruschlinski** του χώρου X.

Παρατηρήσεις:

1. Μια σημαντική διαφορά της ομάδας Bruschlinski από την θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου, εκτός του ότι η πρώτη είναι πάντα αβελιανή είναι το ότι δεν εξαρτάται από κάποιο σημείο του χώρου, το οποίο στη θεμελιώδη ομάδα ονομάσαμε σημείο βάσης.

2. Όπως θα δούμε σε επόμενη πρόταση, η ομάδα Bruschlinski προκύπτει από την ομάδα των αντιβρόχων με το "σκότωμα" των μηδενοτοπικών αντιβρόχων, δηλαδή με την διαίρεση της ομάδας των αντιβρόχων δια της υποομάδας της που αποτελείται από τους μηδενοτοπικούς αντιβρόχους.

Πρόταση 13.5.7. *Το υποσύνολο $B(X)$ της ομάδας $E(X)$, το οποίο περιέχει τους μηδενοτοπικούς αντιβρόχους είναι υποομάδα της $E(X)$.*

Απόδειξη: Είναι $B(X) \neq \varnothing$, γιατί κάθε σταθερή απεικόνιση από τον X στον $\mathbb{S}^1$ είναι μηδενοτοπική. Έστω ότι $a, b \in B(X)$. Άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε $H(x,0) = a(x)$ και $H(x,1) = z \in \mathbb{S}^1$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον υπάρχει συνεχής απεικόνιση $G : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε $G(x,0) = b(x)$ και $G(x,1) = w \in \mathbb{S}^1$ για κάθε $x \in X$. Για την συνεχή απεικόνιση $F : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $F(x,t) = \frac{H(x,t)}{G(x,t)}$ έχουμε $F(x,0) = \frac{H(x,0)}{G(x,0)} = a(x)(b(x))^{-1} = (a \bullet b^{-1})(x)$ και $F(x,1) = \frac{H(x,1)}{G(x,1)} = \frac{z}{w} \in \mathbb{S}^1$ για κάθε $x \in X$, άρα η $a \bullet b^{-1}$ είναι ομοτοπική με την σταθερή $\frac{z}{w}$, επομένως μηδενοτοπική, άρα $a \bullet b^{-1} \in B(X)$. Συνεπώς η $B(X)$ είναι υποομάδα της $E(X)$. □

Λήμμα 13.5.8. *Αν $c : X \to \mathbb{S}^1$, με $c(x) = z \in \mathbb{S}^1$ και $b \in E(X)$, τότε $c \bullet b \approx b$.*

Απόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{S}^1$ είναι δρομοσυνεκτικός, άρα, αν $x \in X$ υπάρχει δρόμος $\gamma_x : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, ώστε $\gamma_x(0) = b(x)$ και $\gamma_x(1) = zb(x)$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $H(x,t) = \gamma_x(t)$. Τότε

$$\begin{aligned} H(x,0) &= \gamma_x(0) = b(x) \\ H(x,1) &= \gamma_x(1) = zb(x) = (c \bullet b)(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$, άρα $c \bullet b \approx b$. □

Πρόταση 13.5.9. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε*

$$\mathcal{H}(X) \simeq E(X)/B(X).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathcal{H}(X) \to E(X)/B(X)$, με $F([a]) = a \bullet B(X)$. Έχουμε

i.

$$\begin{aligned} F\big([a] + [b]\big) &= F\big([a \bullet b]\big) = (a \bullet b) \bullet B(X) \\ &= \big(a \bullet B(X)\big) \bullet \big(b \bullet B(X)\big) \\ &= F\big([a]\big) \bullet F\big([b]\big)\,, \end{aligned}$$

άρα η F είναι ομομορφισμός.

ii.

$$\begin{aligned} F\big([a]\big) = F\big([b]\big) &\Rightarrow a \bullet B(X) = b \bullet B(X) \\ &\Rightarrow a \bullet b^{-1} \in B(X) \\ &\Rightarrow \exists c \in B(X); \quad c(x) = z \quad \forall x \in X \wedge a \bullet b^{-1} \approx c \\ &\Rightarrow a = (a \bullet b^{-1}) \bullet b \approx c \bullet b \approx b \\ &\Rightarrow a \approx b \\ &\Rightarrow [a] = [b]\,, \end{aligned}$$

άρα η F είναι 1-1.

iii. Έστω $a \bullet B(X) \in E(X)/B(X)$, τότε $F\big([a]\big) = a \bullet B(X)$, άρα η F είναι επί.

Επομένως η F είναι ισομορφισμός, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Αποδεικνύεται όπως η πρόταση 13.5.3 η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 13.5.10. *Αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, όπου X και Y τοπολογικοί χώροι, τότε η απεικόνιση $f^* : \mathcal{H}(Y) \to \mathcal{H}(X)$, με $f^*\big([a]\big) = [a \circ f]$ είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Ορισμός 13.5.4. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Ο ομομορφισμός $f^* : \mathcal{H}(Y) \to \mathcal{H}(X)$ που περιγράψαμε στην προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **επαγόμενος από την f ομομορφισμός**.

Αποδεικνύεται όπως η πρόταση 13.5.4 η ακόλουθη

Πρόταση 13.5.11. *Αν X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ συνεχείς απεικονίσεις, τότε*

α΄) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

β΄) $(i_X)^* = i_{\mathcal{H}(X)}$.

Πρόταση 13.5.12. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι, $f, g : X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις, ώστε $f \approx g$, τότε $f^* = g^*$.*

Απόδειξη: Είναι $f \approx g$, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $[a] \in \mathcal{H}(Y)$, τότε η $a \circ H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ είναι συνεχής, με $\big(a \circ H\big)(x,0) = \big(a \circ f\big)(x)$ και $\big(a \circ H\big)(x,1) = \big(a \circ g\big)(x)$, για κάθε $x \in X$, άρα

$$\begin{aligned} a \circ f \approx a \circ g &\Rightarrow [a \circ f] = [a \circ g] \\ &\Rightarrow f^*\big([a]\big) = g^*\big([a]\big)\,, \end{aligned}$$

άρα $f^* = g^*$. □

Πρόταση 13.5.13. *Αν οι χώροι X και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, τότε $\mathcal{H}(X) \simeq \mathcal{H}(Y)$.*

Απόδειξη: Έστω $f : X \to Y$ μια ομοτοπική ισοδυναμία με αντίστροφη την $g : Y \to X$. Είναι $g \circ f \approx i_X$, άρα $f^* \circ g^* = i_{\mathcal{H}(X)}$, άρα η f^* είναι επί. Επίσης $f \circ g \approx i_Y$, άρα $g^* \circ f^* = i_{\mathcal{H}(Y)}$, άρα η f^* είναι 1-1. Επομένως η f^* είναι ισομορφισμός, άρα $\mathcal{H}(X) \simeq \mathcal{H}(Y)$. □

Πρόταση 13.5.14. *Οι μονοσημειακοί χώροι έχουν τετριμμένη ομάδα Bruschlinski.*

Απόδειξη: Έστωσαν c, d αντιβρόχοι του μονοσημειακού χώρου X, με $c(x) = z_1$ και $d(x) = z_2$. Αν γ είναι ένας δρόμος στον $\mathbb{S}^1$ με αρχή το σημείο z_1 και πέρας το σημείο z_2, τότε η απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, με $H(x,t) = \gamma(t)$ είναι συνεχής, με $H(x,0) = \gamma(0) = z_1 = c(x)$ και $H(x,1) = \gamma(1) = z_2 = d(x)$, άρα $c \approx d$, άρα $[c] = [d]$, επομένως η ομάδα $\mathcal{H}(X)$ έχει μόνον ένα στοιχείο, άρα είναι η τετριμμένη. □

Πρόταση 13.5.15. *Η ομάδα Bruschlinski του κύκλου είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των ακεραίων.*

Απόδειξη: Για να κατανοήσουμε την απόδειξη πρέπει να θυμηθούμε τη θεωρία των κυκλικών απεικονίσεων που πραγματεύεται η παράγραφος 13.2. Αν $[a] \in \mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$, τότε η $a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ είναι μια κυκλική απεικόνιση. Αν $\deg(a) = n$, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a(x) = x^n$ και θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathcal{H}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$, με $F\big([a]\big) = \deg(a)$. Αν $\deg(a) = n$ και $\deg(b) = m$, τότε $a \bullet b = a(x)b(x) = x^{n+m}$, άρα $\deg(a \bullet b) = n + m$. Επομένως

$$\begin{aligned} F\big([a] + [b]\big) &= F\big([a \bullet b]\big) \\ &= n + m = F\big([a]\big) + F\big([b]\big), \end{aligned}$$

άρα η F είναι ομομορφισμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} F\big([a]\big) = F\big([b]\big) &\Rightarrow \deg(a) = \deg(b) \\ &\Rightarrow a \approx b \\ &\Rightarrow [a] = [b]\,, \end{aligned}$$

άρα η F είναι 1-1.
Αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε για τον αντιβρόχο a, με $a(x) = x^n$ έχουμε $f\big([a]\big) = n$, άρα η F είναι επί. Επομένως η F είναι ισομορφισμός, δηλαδή $\mathcal{H}(\mathbb{S}^1) \simeq (\mathbb{Z}, +)$. □

14 ΚΑΛΥΠΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

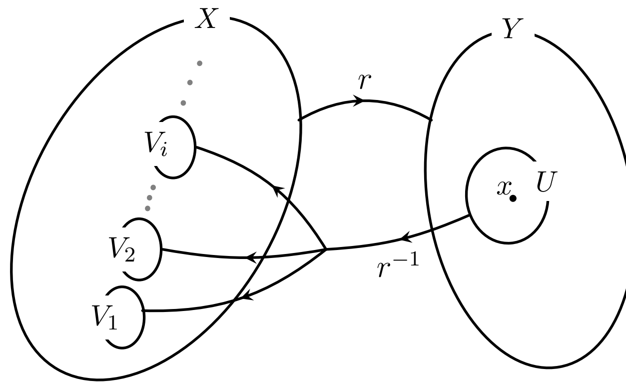
Για τη μελέτη της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου χρησιμοποιήσαμε την πραγματική ευθεία με τέτοιο τρόπο, ώστε οι κλάσεις ομοτοπίας των βρόγχων με βάση το $(1,0)$ να μετατρέπονται σε δρόμους στην ευθεία με αρχή το 0. Μετά από τη μετατροπή αυτή, με φυσικό τρόπο η πράξη του γινομένου των κλάσεων ομοτοπίας των βρόχων του κύκλου μετατρέπεται σε άθροισμα ακεραίων και έτσι προκύπτει η ισομορφία μεταξύ της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου και της προσθετικής των ακεραίων. Στο παρόν κεφάλαιο με τη μελέτη των καλυπτικών χώρων επιχειρούμε μία επέκταση του παραπάνω εγχειρήματος και σε άλλους χώρους πέραν του κύκλου. Η μελέτη των καλυπτικών χώρων που κάνουμε εδώ είναι , βέβαια στοιχειώδης, γιατί μία εξαντλητική μελέτη τους θα ήταν ίσως αντικείμενο ενός ξεχωριστού βιβλίου, με δεδομένο και το ότι η χρήση τους επεκτείνεται και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών πέραν της τοπολογίας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό του καλυπτικού χώρου και της καλυπτικής προβολής, θα εξετάσουμε τις βασικές ιδιότητές τους και θα καταλήξουμε στον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας των πραγματικών προβολικών χώρων με τη βοήθεια των καλυπτικών χώρων.

Ορισμός 14.0.1. Έστωσαν X, Y τοπολογικοί χώροι και $r : X \to Y$ συνεχής και επί απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in Y$ υπάρχει περιοχή U_y του y, ώστε το $r^{-1}(U_y)$ να γράφεται ως ξένη ένωση μιας οικογένειας V_i, $i \in I$ ανοικτών υποσυνόλων του X και ότι ο περιορισμός r/V_i της r σε κάθε ένα από τα σύνολα V_i να είναι ένας ομοιομορφισμός των V_i και U_y. Στην περίπτωση αυτή ο X ονομάζεται **καλυπτικός χώρος** του Y και η απεικόνιση r **καλυπτική προβολή**. Την περιοχή U_y ονομάζουμε **στοιχειώδη περιοχή** και κάθε στοιχείο της οικογένειας V_i ονομάζουμε **συνιστώσα ή φέτα** της U_y (σχήμα 14.1). Η οικογένεια $\{U_y, y \in Y\}$ ονομάζεται **ομοιόμορφο κάλυμμα** του Y μέσω της r.

Παραδείγματα 14.0.1.

1. Ο $\mathbb{R}$ είναι καλυπτικός χώρος του $\mathbb{S}^1$ και η $r : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, με $r(t) = e^{2\pi i t}$ καλυπτική προβολή.
   Ένα "οικονομικό" ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{S}^1$ αποτελείται από τα ανοικτά υποσύνολα του $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ και $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$. Είναι



Σχήμα 14.1

$$r^{-1}(U) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (k, k+1) \text{ και } r^{-1}(V) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\tfrac{1}{2}+k, \tfrac{1}{2}+k)\,.$$

2. Ο $\mathbb{S}^1$ είναι καλυπτικός χώρος του εαυτού του και η $r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, με $r(z) = z^n$, όπου n ακέραιος ≥ 2 είναι καλυπτική προβολή. Πράγματι, θεωρούμε τα ανοικτά υποσύνολα $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$, $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$, $U_3 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ και $U_4 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,-1)\}$ του $\mathbb{S}^1$, τα οποία συνιστούν ένα κάλυμμα του $\mathbb{S}^1$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο του ανωτέρω καλύμματος αντιστρέφεται μέσω της r σε ξένη ένωση n ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{S}^1$ τέτοιων, ώστε ο περιορισμός της r σε κάθε ένα από αυτά να είναι ένας ομοιομορφισμός με το U_i, $i = 1,2,3,4$.
Θα εξετάσουμε το U_1 και ομοίως θα μπορούμε να εργαστούμε και στα υπόλοιπα. Εργαζόμενοι σε πολικές συντεταγμένες, θεωρούμε τα $V_k = \{(1,\theta)/\frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{2(k+1)\pi}{n}\}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, τα οποία είναι προφανώς ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{S}^1$. Αν $r_k = r/V_k$, τότε

α′) Η r_k είναι συνεχής, ως περιορισμός της συνεχούς r.

β′)

$$\begin{aligned} r_k(1,\theta_1) = r_k(1,\theta_2) &\Rightarrow (1, n\theta_1) = (1, n\theta_1) \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ &\Rightarrow (1,\theta_1) = (1,\theta_2)\,, \end{aligned}$$

άρα η r_k είναι 1-1.

γ′) Αν $(1,\phi) \in U_1$, τότε $(1, \frac{\phi}{n}) \in V_k$ και $r_k(1, \frac{\phi}{n}) = (1,\phi)$, άρα η $r_k : V_k \to U_1$ είναι επί.

δ′) Με επιχειρήματα ανάλογα εκείνων της πρότασης 13.1.1 αποδεικνύεται ότι η r_k είναι ανοικτή.

Επομένως η r_k είναι ομοιομορφισμός.

3. Ο $\mathbb{S}^n$ είναι ένας καλυπτικός χώρος του $P\mathbb{R}^n$ με καλυπτική προβολή τη φυσική προβολή $pr : \mathbb{S}^n \to P\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω $[x] \in P\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύνολο $V = \{z \in \mathbb{S}^n \,/\, \|z - x\| < 1\}$ και το $U = pr(V)$. Προφανώς $[x] \in U$. Επειδή το V είναι ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$ και η pr είναι ανοικτή απεικόνιση (λήμμα 15.3.11) το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$. Επιπλέον $pr^{-1}(U) = V \cup (-V)$. Υποθέτουμε ότι $V \cap (-V) \neq \varnothing$ και, έστω $w \in \mathbb{S}^n$, με $w \in V \cap (-V)$, τότε $-w \in V \cap (-V)$ και

$$\begin{aligned} 2 = \|x - (-x)\| &\leq \|x - w + w - (-z)\| \\ &\leq \|x - w\| + \|x - (-w)\| < 2\,, \end{aligned}$$

άτοπο, άρα $V \cap (-V) = \varnothing$. Επιπλέον το $-V$ είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$, γιατί είναι εικόνα του V, μέσω του ομοιομορφισμού $\mathbb{S}^n \ni x \mapsto -x \in \mathbb{S}^n$. Επομένως το $pr^{-1}(U)$ γράφεται ως ξένη ένωση δύο ανοικτών υποσυνόλων της $\mathbb{S}^n$ των V και $-V$. Θα δείξουμε ότι η $pr/V : V \to U$ είναι ομοιομορφισμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1,\, x_2 \in V \wedge pr(x_1) = pr(x_2) &\Rightarrow [x_1] = [x_2] \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_2 = -x_1, \end{aligned}$$

Όμως $x_2 \in V$, άρα $-x_2 \in -V$, συνεπώς η $x_1 = -x_2$ είναι αδύνατη, επομένως $x_1 = x_2$. Άρα η pr/V είναι 1-1.

Η pr/V είναι επί, γιατί $pr(V) = U$. Επιπλέον, για την pr/V είναι γνωστό ότι είναι συνεχής και ανοικτή, άρα είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του V στον U. Ομοίως έχουμε ότι η $pr/(-V)$ είναι ένας ομοιομορφισμός του $-V$ στον U. Άρα ο $\mathbb{S}^n$ είναι ένας καλυπτικός χώρος του $P\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ και η pr μια καλυπτική προβολή. Σε κάθε σύνολο U του ομοιόμορφου καλύμματος, όπως το περιγράψαμε πιο πάνω, αντιστοιχούν δύο ακριβώς στοιχεία (συνιστώσες) τα V και $-V$ του καλυπτικού χώρου $\mathbb{S}^n$.

4. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ο χώρος $X \times \mathbb{Z}$, όπου ο $\mathbb{Z}$ είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία είναι ένας καλυπτικός χώρος του X με καλυπτική προβολή την $r : X \times \mathbb{Z} \to X$, με $r(x,k) = x$. Το ομοιόμορφο κάλυμμα του X στην περίπτωση αυτή είναι το $\{X\}$ και $r^{-1}(X) = \bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big(X \times \{k\}\big)$.

5. Αν $Y \cong X$, τότε ο X είναι καλυπτικός χώρους του Y, με καλυπτική προβολή τον οποιονδήποτε ομοιομορφισμό $r : X \to Y$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν X_1, X_2 είναι καλυπτικοί χώροι των Y, Z, αντιστοίχως, με καλυπτικές προβολές τις p, q, αντιστοίχως, τότε ο $X_1 \times X_2$ είναι καλυπτικός χώρος του $Y \times Z$, με καλυπτική προβολή την $p \times q : X_1 \times X_2 \to Y \times Z$, με

$$(p \times q)(t,s) = (p(t), q(s)).$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση.

Ορισμός 14.0.2. Αν $r : X \to Y$ μια καλυπτική προβολή. Το σύνολο $r^{-1}(y)$ ονομάζεται **ίνα** του $y \in Y$.

Πρόταση 14.0.1. *Αν $r : X \to Y$ είναι μια καλυπτική προβολή και $y \in Y$, τότε η επαγόμενη από τον X τοπολογία στο σύνολο $r^{-1}(y)$ είναι η διακριτή.*

Απόδειξη: Έστω U το στοιχείο του ομοιόμορφου καλύμματος, για το οποίο $y \in U$. Έχουμε $r^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, όπου τα V_i είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Έχουμε ότι $r^{-1}(y) = \{x_i / i \in I\}$, με $x_i \in V_i$ για κάθε $i \in I$. Επιπλέον, επειδή $V_i \cap V_j = \varnothing$ για κάθε $i, j \in I$, με $i \neq j$ έχουμε $\{x_i\} = V_i \cap r^{-1}(y)$. Άρα το $\{x_i\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $r^{-1}(y)$, ως προς την επαγόμενη από το X τοπολογία, επομένως η τοπολογία αυτή είναι η διακριτή. □

Πρόταση 14.0.2. *Αν X είναι ένας καλυπτικός χώρος του τοπολογικού χώρου Y, τότε η καλυπτική προβολή r είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Απόδειξη: Έστω A ένα ανοικτό υποσύνολο του X, $x \in A$ και U το στοιχείο του ομοιόμορφου καλύμματος, για το οποίο $r(x) \in U$. Αν V_x είναι η συνιστώσα του $r^{-1}(U)$, η οποία περιέχει το x, τότε το $A \cap V_x$ είναι ανοικτό υποσύνολο του V_x και $x \in A \cap V_x$. Έστω r_x ο περιορισμός της r στο V_x. Τότε, λόγω του ομοιομορφισμού το $r_x(A \cap V_x) = r(A \cap V_x)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του U, άρα και ανοικτό υποσύνολο του Y, αφού το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Επιπλέον $r(x) \in r(A \cap V_x) \subseteq r(A)$. Άρα το $r(A) = \bigcup_{x \in A} r(A \cap V_x)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, συνεπώς η r είναι ανοικτή. □

Πρόταση 14.0.3. *Έστωσαν*

- *X καλυπτικός χώρος του χώρου Y με καλυπτική προβολή την $r : X \to Y$,*
- *Z τοπολογικός χώρος και*
- *$f, g : Z \to X$ συνεχείς απεικονίσεις, ώστε $r \circ f = r \circ g$.*

Τότε το σύνολο $A = \{z \in Z / f(z) = g(z)\}$ είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του Z.

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ {\scriptstyle g}\downarrow{\scriptstyle f} & \searrow^{r \circ f = r \circ g} & \\ X & \xrightarrow{\ r\ } & Y \end{array} .$$

Απόδειξη:

- Έστω $z \in A$. Αν U είναι μια στοιχειώδης περιοχή του $r(f(z)) = r(g(z))$ και V η συνιστώσα της U, στην οποία ανήκει το $f(z)$ και το $g(z)$, αφού $g(z) = f(z)$. Τότε τα $f^{-1}(V)$, $g^{-1}(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Z, άρα το $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z, με $z \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$. Αν $w \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$, τότε $f(w)$, $g(w) \in V$. Επομένως $r(f(w)) = r(g(w))$ και, επειδή ο περιορισμός της r στο V είναι 1-1 έχουμε

$$\begin{aligned} f(w) = g(w) &\Rightarrow w \in A \\ &\Rightarrow f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V) \subseteq A, \end{aligned}$$

συνεπώς $z \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V) \subseteq A$, άρα το A είναι ανοικτό υποσύνολο του Z.

- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το A δεν είναι κλειστό, άρα υπάρχει οριακό σημείο y του A, με $y \notin A$, επομένως $f(y) \neq g(y)$. Έχουμε $r(f(y)) = r(g(y)) = a$. Αν U είναι η στοιχειώδης περιοχή, στην οποία ανήκει το a, τότε, εξ ορισμού της καλυπτικής απεικόνισης, τα $f(y)$, $g(y)$ ανήκουν σε διαφορετικές, άρα ξένες συνιστώσες V_1 και V_2 της U, αντιστοίχως. Τα $f^{-1}(V_1)$ και $g^{-1}(V_2)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Z, άρα το $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z, με $y \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$. Επειδή το y είναι οριακό σημείο του A υπάρχει $w \in A$, ώστε $w \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$, άρα $f(w) \in V_1$ και $g(w) \in V_2$. Όμως $w \in A$, άρα $f(w) = g(w)$, άρα $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, άτοπο. □

Πρόταση 14.0.4. *Έστωσαν*

- *X καλυπτικός χώρος του χώρου Y και $r : X \to Y$ μια καλυπτική προβολή,*
- *Z τοπολογικός χώρος και*
- *$f, g : Z \to X$ συνεχείς απεικονίσεις, ώστε $r \circ f = r \circ g$,*
- *Ο Z είναι συνεκτικός και υπάρχει $z \in Z$, ώστε $f(z) = g(z)$.*

Τότε

$$f = g.$$

Απόδειξη: Το σύνολο $A = \{z \in Z \,/\, f(z) = g(z)\}$ είναι μη-κενό και από την προηγούμενη πρόταση είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του Z συγχρόνως. Επειδή ο Z είναι συνεκτικός χώρος, έπεται ότι $A = Z$, άρα $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in Z$, επομένως $f = g$. □

Ορισμός 14.0.3. Έστωσαν X καλυπτικός χώρος του χώρου Y, με καλυπτική προβολή την απεικόνιση $r : X \to Y$. Επιπλέον Z τοπολογικός χώρος και $f : Z \to Y$ απεικόνιση. Η απεικόνιση

$$\tilde{f} : Z \to X$$

ονομάζεται **ανόρθωση** της f, αν και μόνον, αν $r \circ \tilde{f} = f$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα

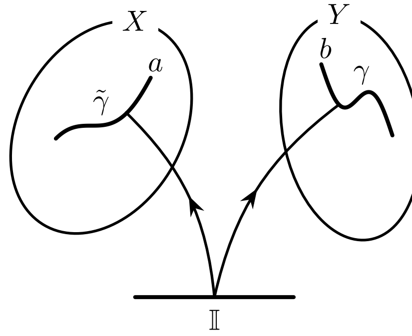
$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow r \\ Z & \xrightarrow{\ f\ } & Y \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Πρόταση 14.0.5. *Έστω X καλυπτικός χώρος του χώρου Y, με καλυπτική προβολή την $r : X \to Y$. Αν $a \in X$ και $r(a) = b \in Y$, τότε κάθε δρόμος γ στον Y, με αρχή το σημείο b έχει μοναδική ανόρθωση έναν δρόμο $\tilde{\gamma}$ στον X, με αρχή το a (σχήμα 14.2).*

Απόδειξη: Έστω $\{U_i,\, i \in I\}$ ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του Y. Το $\mathcal{G} = \{\gamma^{-1}(U_i),\, i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου $\mathbb{I}$. Αν ε είναι ο αριθμός Lebesque του καλύμματος $\mathcal{G}$, τότε θεωρούμε τη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ του διαστήματος $\mathbb{I}$, ώστε $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
Από το λήμμα Lebesque, συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει $k \in I$, ώστε

$$[0, t_1] \subseteq \gamma^{-1}(U_k) \Rightarrow \gamma([0, t_1]) \subseteq \gamma(\gamma^{-1}(U_k)) \subseteq U_k.$$



Σχήμα 14.2

Έστω V η συνιστώσα του U_k, για την οποία $a \in V$ και r_1 ο περιορισμός της r στο V, ο οποίος είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των V και U_k. Ορίζουμε $\tilde{\gamma}_1 : [0, t_1] \to X$, ώστε $\tilde{\gamma}_1 = r_1^{-1} \circ \gamma$, άρα $r \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma/[0, t_1]$.
Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει για κάθε $j = 1, \ldots, i$ συνεχείς απεικονίσεις $\tilde{\gamma}_j : [t_{j-1}, t_j] \to X$, με

$$\tilde{\gamma}_{j-1}(t_{j-1}) = \tilde{\gamma}_j(t_{j-1}) \text{ και } r_j \circ \tilde{\gamma}_j = \gamma/[t_{j-1}, t_j].$$

Υπάρχει $s \in I$, ώστε $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_s$. Έστω W η συνιστώσα του U_s, για την οποία $\tilde{\gamma}_i(t_i) \in W$ και r_{i+1} ο περιορισμός της r στο W, ο οποίος είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του W και του U_s. Ορίζουμε $\tilde{\gamma}_{i+1} : [t_i, t_{i+1}] \to X$, ώστε $\tilde{\gamma}_{i+1} = r_{i+1}^{-1} \circ \gamma$, άρα $r \circ \tilde{\gamma}_{i+1} = \gamma$ και $\tilde{\gamma}_{i+1}(t_i) = \tilde{\gamma}_i(t_i)$. Συνεπώς έχουμε ορίζει επαγωγικά την $\tilde{\gamma}_i$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ώστε

$$\tilde{\gamma}_i(t_i) = \tilde{\gamma}_{i-1}(t_{i-1}) \text{ και } r \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma/[t_{i-1}, t_i]$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επομένως η απεικόνιση $\tilde{\gamma} : \mathbb{I} \to X$, με

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots & \\ \tilde{\gamma}_n(t), & t_{n-1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής (πρόταση 2.1.8), με $\tilde{\gamma}(0) = a$. Επίσης, αν $t \in \mathbb{I}$, τότε $t \in [t_{i-1}, t_i]$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, άρα

$$(r \circ \tilde{\gamma})(t) = (r \circ \tilde{\gamma}_i)(t) = \gamma(t).$$

Επομένως η ύπαρξη της $\tilde{\gamma}$, με τις ιδιότητες που θέλουμε αποδείχθηκε.
Η μοναδικότητα της $\tilde{\gamma}$ είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 14.0.4. □

Πρόταση 14.0.6. *Έστω X είναι ένας καλυπτικός χώρος του χώρου Y, με καλυπτική προβολή την απεικόνιση $r : X \to Y$. Αν $r(a) = b$ και $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$ συνεχής απεικόνιση, με $F(0,0) = b$, τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με*

$$\tilde{F}(0,0) = a \text{ και } r \circ \tilde{F} = F.$$

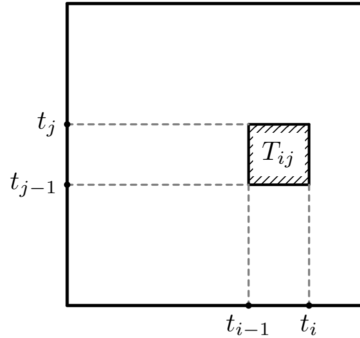
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}\times\mathbb{I} & \xrightarrow{F} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{F}} & \nearrow{\scriptstyle r} & \\ X & & \end{array} ,$$

Αν, επιπλέον η F είναι ελεύθερη ομοτοπία δρόμων στον Y, τότε η $\tilde{F}$ είναι ελεύθερη ομοτοπία δρόμων στον X.

Απόδειξη: Έστω $\{U_i,\, i \in I\}$ ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του Y. Τότε το

$$\mathcal{G} = \{F^{-1}(U_i),\, i \in I\}$$

είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$. Αν ε είναι ο αριθμός Lebesque του καλύμματος $\mathcal{G}$, θεωρούμε την διαμέριση $0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ του διαστήματος $\mathbb{I}$, ώστε η διάμετρος του $T_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ να είναι μικρότερη του ε (σχήμα 14.3).



Σχήμα 14.3

Από το λήμμα Lebesque, αν $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ υπάρχει $F^{-1}(U_m) \in \mathcal{G}$, ώστε

$$T_{ij} \subseteq F^{-1}(U_m) \Rightarrow F(T_{ij}) \subseteq F(F^{-1}(U_m)) \subseteq U_m.$$

Μετονομάζουμε το ανοικτό $F^{-1}(U_m)$ σε $F^{-1}(U_{ij})$. Αρχίζουμε από το T_{11} και επιλέγουμε εκείνη τη συνιστώσα V του U_{11}, για την οποία $a \in V$. Αν r_{11} είναι ο περιορισμός της r στο V, τότε ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $\tilde{F} : T_{11} \to X$, με

$$\tilde{F} = r_{11}^{-1} \circ F.$$

Άρα για την $\tilde{F}$ έχουμε $\tilde{F}(0,0) = a$ και $(r \circ \tilde{F})(t,s) = F(t,s)$ για κάθε $(t,s) \in T_{11}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i \leq k$ και για κάθε $j \leq l$ έχουμε ορίσει συνεχή απεικόνιση

$$\tilde{F}_{ij} : T_{ij} \to X, \text{ με } (r \circ \tilde{F}_{ij})(t,s) = F(t,s)$$

για κάθε $(t,s) \in T_{ij}$ και

$$\tilde{F}_{ij}(t,s) = \tilde{F}_{mn}(t,s),$$

αν $(t,s) \in T_{ij} \cap T_{mn}$, $m \leq k$, $n \leq l$. Έστω ότι

$$T_{(k+1)l} \subseteq F^{-1}(U_{(k+1)l}).$$

Επιλέγουμε τη συνιστώσα R του $U_{(k+1)l}$, για την οποία $F(T_{cd}) \subseteq R$, αν $c \leq k+1, d \leq l$ και $T_{cd} \cap T_{(k+1)l} \neq \varnothing$. Ονομάζουμε $r_{(k+1)l}$ τον περιορισμό της r στην R και ορίζουμε την $\tilde{F}_{(k+1)l} : T_{(k+1)l} \to X$, με

$$\tilde{F}_{(k+1)l} = r^{-1}_{(k+1)l} \circ F_{(k+1)l}.$$

Για την $\tilde{F}_{(k+1)l}$ έχουμε

$$(\tilde{F}_{(k+1)l})(t,s) = \big(r \circ F_{(k+1)l}\big)(t,s)$$

για κάθε $(t,s) \in T_{(k+1)l}$ και

$$\tilde{F}_{(k+1)l}(t,s) = \tilde{F}_{cd}(t,s)$$

για κάθε $(t,s) \in T_{(k+1)l} \cap T_{cd}$, αν $c \leq k+1$, $d \leq l$ και $(t,s) \in T_{(k+1)l} \cap T_{cd} \neq \varnothing$. Ομοίως ορίζουμε και την $\tilde{F}_{k(l+1)}$. Συνεπώς επαγωγικά έχουμε ορίσει συνεχείς απεικονίσεις $\tilde{F}_{ij} : T_{ij} \to X$, με

$$(r \circ \tilde{F}_{ij})(t,s) = F(t,s)$$

για κάθε $(t,s) \in T_{ij}$ και

$$\tilde{F}_{ij}(t,s) = \tilde{F}_{kl}(t,s),$$

αν $(t,s) \in T_{ij} \cap T_{kl}$. Άρα η $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, με

$$\tilde{F}(t,s) = \tilde{F}_{ij}(t,s) \quad \Leftrightarrow \quad (t,s) \in T_{ij}$$

είναι συνεχής (πρόταση 2.1.8). Επιπλέον $\tilde{F}(0,0) = a$ και $r \circ \tilde{F} = F$.
Η μοναδικότητα της $\tilde{F}$ αποδεικνύεται όπως στην προηγούμενη πρόταση.
Τέλος, αν η F είναι ελεύθερη ομοτοπία δρόμων στον Y, τότε $F(0,t) = b$ και $F(1,t) = b_1$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$. Επομένως

$$F(\{0\} \times \mathbb{I}) = \{b\} \Rightarrow (r \circ \tilde{F})(\{0\} \times \mathbb{I}) = \{b\}$$
$$\Rightarrow \tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I}) = r^{-1}(\{b\})\,.$$

Αν U είναι το στοιχείο του ομοιόμορφου καλύμματος του Y για το οποίο $b \in U$, τότε

$$r^{-1}(\{b\}) \in \bigsqcup_{j \in J} V_j,$$

όπου $\{V_j, j \in J\}$ η οικογένεια των συνιστωσών του U. Έστω V_k η συνιστώσα της πιο πάνω οικογένειας για την οποία $a \in V_k$. Επειδή το $\{0\} \times \mathbb{I}$ είναι συνεκτικό και η $\tilde{F}$ συνεχής έχουμε

$$\tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I}) \subseteq V_k \Rightarrow \tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I}) \in V_k \cap r^{-1}(\{b\}) = \{a\}$$
$$\Rightarrow \tilde{F}\big(\{0\} \times \mathbb{I}\big) = \{a\}\,.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει $a_1 \in X$, ώστε $\tilde{F}\big(\{1\} \times \mathbb{I}\big) = \{a_1\}$.
Άρα η $\tilde{F}$ είναι ελεύθερη ομοτοπία δρόμων στον X. □

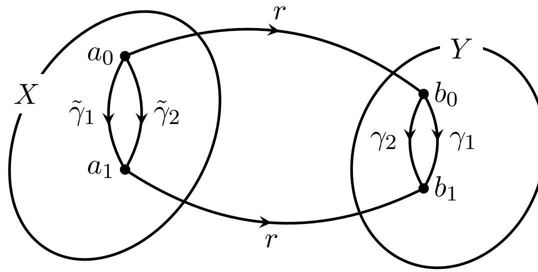
Ορισμός 14.0.4. Την μοναδική απεικόνιση $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ της προηγούμενης πρότασης ονομάζουμε **ανόρθωση** της F.

Πρόταση 14.0.7. *Έστωσαν*

- X *καλυπτικός χώρος του χώρου* Y, *με καλυπτική προβολή την* r,
- $r(a_0) = b_0,\ r(a_1) = b_1$,
- γ_1, γ_2 *δρόμοι στον* Y, *με αρχή το σημείο* b_0 *και πέρας το σημείο* b_1 *και*
- $\tilde{\gamma}_1$ *και* $\tilde{\gamma}_2$ *είναι οι ανορθώσεις στον* X *των* $\gamma_1,\ \gamma_2$, *αντιστοίχως, με* $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = a_0$,

τότε

$$\gamma_1 \approx_p \gamma_2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_1 \approx_p \tilde{\gamma}_2 \text{ και } \tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1) = a_1.$$



Σχήμα 14.4

Απόδειξη: Αν $\gamma_1 \approx_p \gamma_2$, τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε

- $F(t, 0) = \gamma_1(t)$ και $F(t, 1) = \gamma_2(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $F(0, s) = b_0$ και $F(1, s) = b_1$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

Έστω $\tilde{F}$ η μοναδική ανόρθωση της F, με $\tilde{F}(0,0) = a_0$. Τότε, επειδή η $\tilde{F}$ ελεύθερη ομοτοπία δρόμων στον X έχουμε $\tilde{F}(0, s) = a_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Ομοίως συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $a_1 \in X$, ώστε $\tilde{F}(1, s) = a_1$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$. Η συνεχής απεικόνιση $\gamma_1' : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma_1'(t) = \tilde{F}(t, 0)$, $t \in \mathbb{I}$ είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το $\tilde{F}(0,0) = a_0$ και πέρας το $\tilde{F}(1, 0) = a_1$. Για τον δρόμο αυτόν έχουμε

$$\begin{aligned}(r \circ \gamma_1')(t) &= r(\gamma_1'(t)) = r(\tilde{F}(t, 0)) \\ &= F(t, 0) = \gamma_1(t)\end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και $\gamma_1'(0) = \tilde{F}(0, 0) = a_0$, άρα ο $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1'$ είναι η μοναδική ανόρθωση του γ_1 στον X, με $\gamma_1'(0) = a_0$. Επίσης η συνεχής απεικόνιση $\gamma_2' : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma_2'(t) = \tilde{F}(t, 1)$ είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το $\tilde{F}(0, 1) = a_0$ και πέρας το $\tilde{F}(1, 1) = a_1$, άρα ο $\gamma_2' = \tilde{\gamma}_2$ είναι η μοναδική ανόρθωση στον X του γ_2, με $\tilde{\gamma}_2(0) = a_0$. Η $\tilde{F}$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ των δρόμων $\tilde{\gamma}_1$ και $\tilde{\gamma}_2$, άρα $\tilde{\gamma}_1 \approx_p \tilde{\gamma}_2$. Τέλος

$$\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{F}(1, 0) = a_1 \text{ και } \tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{F}(1, 1) = a_1.$$

□

Πρόταση 14.0.8. *Έστω ότι ο X είναι καλυπτικός χώρος του Y, με καλυπτική προβολή την r. Αν ο Y είναι δρομοσυνεκτικός και $b_0, b_1 \in Y$, τότε $|r^{-1}(b_0)| = |r^{-1}(b_1)|$.*

Απόδειξη: Έστω α ένας δρόμος στον Y, με αρχή το σημείο b_0 και πέρας το σημείο b_1 και $\tilde{\alpha}_x$ η μοναδική ανόρθωση του α, με αρχή το σημείο $x \in r^{-1}(b_0)$. Τότε $\tilde{\alpha}_x(1) \in r^{-1}(b_1)$. Συνεπώς ορίζεται μια απεικόνιση $f : r^{-1}(b_0) \to r^{-1}(b_1)$, με $f(x) = \tilde{\alpha}_x(1) = y$. Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $g : r^{-1}(b_1) \to r^{-1}(b_0)$, ώστε $g(y) = \tilde{\bar{\alpha}}_x(1) = x$. Για τις απεικονίσεις αυτές ισχύουν οι σχέσεις $g \circ f = i_{r^{-1}(b_0)}$ και $f \circ g = i_{r^{-1}(b_1)}$, άρα η f είναι 1-1 και επί, επομένως $|r^{-1}(b_0)| = |r^{-1}(b_1)|$. □

Συνεπώς έχουμε τον επόμενο ορισμό

Ορισμός 14.0.5. Αν ο χώρος Y είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ο πληθάριθμος $|r^{-1}(b)|$, ο οποίος είναι ανεξάρτητος του $b \in Y$ λέγεται **αριθμός των συνιστωσών ή φετών του καλυπτικού χώρου**.

Παραδείγματα 14.0.2.

1. Ο $\mathbb{S}^n$ είναι καλυπτικός χώρος του $P\mathbb{R}^n$, με καλυπτική προβολή την pr, για την οποία έχουμε $pr^{-1}([x]) = \{x, -x\}$, άρα ο αριθμός των συνιστωσών του καλυπτικού χώρου είναι 2.
2. Ο $\mathbb{R}$ είναι καλυπτικός χώρος του $\mathbb{S}^1$, με καλυπτική προβολή την $r(t) = e^{2\pi i t}$, για την οποία έχουμε $r^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}$, άρα ο αριθμός των συνιστωσων του καλυπτικού χώρου είναι $\aleph_0$.

Ορισμός 14.0.6. Έστωσαν X ένας καλυπτικός χώρος του χώρου Y με καλυπτική προβολή την $r : X \to Y$, ώστε $r(a_0) = b_0$. Επιπλέον, έστω $[\gamma] \in \pi_1(Y, b_0)$ και $\tilde{\gamma}$ η ανόρθωση της γ στον X, με $\tilde{\gamma}(0) = a_0$, τότε το $\tilde{\gamma}(1) \in r^{-1}(b_0)$ είναι μοναδικό (πρόταση 14.0.7), δηλαδή, αν $\gamma' \in [\gamma]$, τότε $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Επομένως η απεικόνιση

$$G : \pi_1(Y, b_0) \to r^{-1}(b_0) \in X, \text{ με } G([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$$

είναι καλώς ορισμένη και ονομάζεται **ανορθωτική απεικόνιση της θεμελιώδους ομάδας** $\pi_1(Y, b_0)$.

Πρόταση 14.0.9. *Έστω X ένας καλυπτικός χώρος του χώρου Y, με καλυπτική προβολή την $r : X \to Y$, ώστε $r(a_0) = b_0$. Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε η ανορθωτική απεικόνιση G της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(Y, b_0)$ είναι επί.*

Απόδειξη: Έστω $a_1 \in r^{-1}(b_0)$ και $\tilde{\gamma}$ ένας δρόμος στον X, με αρχή το a_0 και πέρας το a_1. Αν $\gamma : \mathbb{I} \to Y$, με $\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$, τότε

$$\gamma(0) = (r \circ \tilde{\gamma})(0) = r\big(\tilde{\gamma}(0)\big) = r(a_0) = b_0$$

και

$$\gamma(1) = (r \circ \tilde{\gamma})(1) = r\big(\tilde{\gamma}(1)\big) = r(a_1) = b_0,$$

επομένως ο γ είναι ένας βρόχος στον Y με βάση το b_0, ο οποίος έχει μοναδική ανόρθωση τον δρόμο $\tilde{\gamma}$. Άρα $G\big([\gamma]\big) = \tilde{\gamma}(1) = a_1$ και $[\gamma] \in \pi_1(Y, b_0)$, δηλαδή η G είναι επί. □

Πρόταση 14.0.10. *Έστω X ένας καλυπτικός χώρος του χώρου Y, με καλυπτική προβολή την $r : X \to Y$, ώστε $r(a_0) = b_0$. Αν ο X είναι απλά συνεκτικός, τότε η ανορθωτική απεικόνιση G της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(Y, b_0)$ είναι 1-1 και επί.*

Απόδειξη: Έστω ότι $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(Y, b_0)$ και $G([\alpha]) = G([\beta])$. Άρα $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = a_1 \in r^{-1}(b_0)$. Επειδή ο X είναι απλά συνεκτικός, θα είναι $\tilde{\alpha} \approx_p \tilde{\beta}$.
Επομένως, υπάρχει ομοτοπία $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, ώστε

$$\tilde{F}(0, s) = a_0,\ \tilde{F}(1, s) = a_1$$

για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και

$$\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t),\ \tilde{F}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Η απεικόνιση $F = r \circ \tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$ είναι συνεχής, με

- $F(0, s) = r\big(\tilde{F}(0, s)\big) = r(a_0) = b_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$ και
- $F(1, s) = r\big(\tilde{F}(1, s)\big) = r(a_1) = b_0$ για κάθε $s \in \mathbb{I}$.

Επίσης

- $F(t, 0) = r\big(\tilde{F}(t, 0)\big) = r(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και
- $F(t, 1) = r\big(\tilde{F}(t, 1)\big) = r(\tilde{\beta}(t)) = \beta(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Επομένως η F είναι μια ομοτοπία μεταξύ του βρόχου α και του βρόχου β, άρα $[\alpha] = [\beta]$. Συνεπώς η G είναι 1-1. Επειδή ο χώρος X είναι δρομοσυνεκτικός το επί της G είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. □

Πρόταση 14.0.11. *Για $n \geq 2$ η θεμελιώδης ομάδα του προβολικού χώρου $P\mathbb{R}^n$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2$.*

Απόδειξη: Ο καλυπτικός χώρος $\mathbb{S}^n$ του $P\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικός, άρα η βασική απεικόνιση

$$G : \pi_1(P\mathbb{R}^n, [x]) \to r^{-1}([x])$$

είναι 1-1 και επί. Επιπλέον, $r^{-1}([x]) = \{x, -x\}$, άρα η $\pi_1(P\mathbb{R}^n, [x])$ είναι ομάδα τάξης δύο, συνεπώς ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2$. □

Οι θεμελιώδεις ομάδες που συναντήσαμε έως τώρα ήταν όλες αβελιανές. Υπάρχουν, όμως χώροι, των οποίων οι θεμελιώδεις ομάδες δεν είναι αβελιανές;

Ας πάρουμε τον χώρο

$$\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1 \cong \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / x = \mathbf{1} \vee y = \mathbf{1}\},$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι το σημείο $(1, 0)$ του $\mathbb{S}^1$. Ένας καλυπτικός χώρος του $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$ είναι ο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, με καλυπτική απεικόνιση την $r(t, s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$, $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Αν γ είναι ένας βρόχος στον $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$ και $\tilde{\gamma}$ η μοναδική ανόρθωσή του, τότε $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ας πάρουμε τον βρόχο α, ο οποίος διατρέχει θετικά τρεις φορές τον πρώτο κύκλο και τον βρόχο β, ο οποίος διατρέχει θετικά τέσσερις φορές τον δεύτερο κύκλο, τότε, έστω $[\alpha * \beta] = [\gamma_1]$ και $[\beta * \alpha] = [\gamma_2]$. Έχουμε $\tilde{\gamma}_1(1) = (3, 4)$ και $\tilde{\gamma}_2(1) = (4, 3)$, άρα $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$. Επομένως **η ομάδα** $\pi_1(\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1)$ **δεν είναι αβελιανή**.

Περισσότερα για τις μη αβελιανές θεμελιώδεις ομάδες θα δούμε στην παράγραφο 19.1.

15 ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΟΜΟΛΟΓΙΑ

Η θεμελιώδης ομάδα είναι ένα σημαντικό εργαλείο με τη χρήση του οποίου καταλήγουμε σε αποτελέσματα, που δεν μπορούμε να έχουμε με τα εργαλεία της γενικής τοπολογίας, όπως για παράδειγμα το θεώρημα της μη συστολής του δίσκου $\mathbb{D}^2$ στο σύνορό του. Όμως στους χώρους μεγάλων διαστάσεων η θεμελιώδης ομάδα δεν είναι αποτελεσματική. Για παράδειγμα για $n > m > 2$ έχουμε $\pi_1(\mathbb{S}^n) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^m) \simeq \{0\}$, ενώ είναι διαισθητικά αντιληπτό ότι οι χώροι $\mathbb{S}^n$ και $\mathbb{S}^m$ δεν είναι ομοιόμορφοι. Το κενό της θεμελιώδους ομάδας στη μελέτη των τοπολογικών χώρων φιλοδοξούν να καλύψουν οι ομάδες ομοτοπίας τάξης μεγαλύτερης του ένα, στις οποίες θα αναφερθούμε σε ειδική παράγραφο στο επίμετρο. Όμως οι ομάδες αυτές, παρότι ορίζονται εύκολα υπολογίζονται πολύ δύσκολα.

Σε αντίθεση με τις ομάδες ομοτοπίας, οι ομάδες ομολογίας, ορίζονται με μεγαλύτερη δυσκολία, υπολογίζονται όμως σχετικά εύκολα. Για τον λόγο αυτό είναι προτιμητέες. Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε μία εισαγωγική γνωριμία με την ομολογία. Δεν φιλοδοξούμε να καλύψουμε την θεωρία ομολογίας σε όλο της το εύρος, κάτι που άλλωστε θα ήταν αδύνατο να γίνει στα πλαίσια μιας στοιχειώδους μελέτης. Έτσι περιοριζόμαστε στη μελέτη της ιδιάζουσας ομολογίας, ώστε να έχουμε εκείνες τις πληροφορίες που μας χρειάζονται, προκειμένου να αντιμετωπίσουμε μερικά βασικά προβλήματα της τοπολογίας, όπως οι σφαιρικές απεικονίσεις, τα διανυσματικά πεδία στις σφαίρες, το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer για κλειστούς δίσκους διάστασης μεγαλύτερης του δύο, το αναλλοίωτο της διάστασης, το θεώρημα διαχωρισμού του Jordan [1] και, τέλος, το αναλλοίωτο του χωρίου.

Στόχος της ιδιάζουσας ομολογίας είναι η επισύναψη σε κάθε τοπολογικό χώρο X, μίας ακολουθίας αβελιανών ομάδων $H_n(X), n \geq 0$ έτσι, ώστε σε κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ να αντιστοιχεί, με "φυσικό τρόπο" ένας και μοναδικός ομομορφισμός $f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$ για κάθε $n \geq 0$. Ο ομομορφισμός αυτός είναι ισομορφισμός, όταν οι χώροι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι. Αυτό είναι ένα ισχυρό κριτήριο μη ομοιομορφίας των τοπολογικών χώρων, γιατί, αν για κάποιον δείκτη οι αντίστοιχες ομάδες δεν είναι ισόμορφες, τότε οι χώροι δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, άρα κατά μείζονα λόγο δεν είναι ομοιόμορφοι.

Στην παράγραφο 15.1 εξετάζονται οι γεωμετρικές έννοιες και στην παράγραφο 15.2 οι αλγεβρικές έννοιες, οι οποίες χρειάζονται για τον ορισμό και την απόδειξη των ιδιοτήτων

[1] Camille Jordan: Γάλλος μαθηματικός (1838-1922)

της ιδιάζουσας ομολογίας των τοπολογικών χώρων.

15.1 Γεωμετρικά προαπαιτούμενα

Στην παράγραφο 4.2 δώσαμε τον ορισμό του κυρτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^k, k \geq 1$. Επειδή τα κυρτά σύνολα θα τα συναντήσουμε συχνά στην πραγμάτευση που ακολουθεί θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες.

Πρόταση 15.1.1. *Αν το A είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$, τότε $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.
Για $n = 2$ η πρόταση ισχύει προφανώς.
Δεχόμαστε ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ και για κάθε $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i = 1$ ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i x_i \in A$. Έστω ότι $x_1, \ldots, x_n \in A$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$.

- Αν $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i = 0$, τότε $t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0$, άρα $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i = x_n \in A$.

- Αν $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i \neq 0$, τότε $\frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i} \in \mathbb{I}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$ και $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i} = 1$, άρα $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i} x_i = y \in A$. Είναι $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i\Big) y + t_n x_n$ και, επειδή $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i + t_n = 1$ έχουμε $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$, επομένως η επαγωγή ολοκληρώθηκε.

□

Πρόταση 15.1.2. *Αν $A_i, i \in I$ είναι μία οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$, τότε το $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 15.1.1. Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Το ίδιο το $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό υποσύνολο του εαυτού του, άρα η οικογένεια $A_i, i \in I$ των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το A είναι μη κενή. Το κυρτό σύνολο $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ ονομάζεται **κυρτή θήκη** του A και συμβολίζεται με $Conv(A)$.

Ορισμός 15.1.2. **Κυρτός συνδυασμός** των $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$ είναι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^k$ της μορφής $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i$, όπου $t_i \in \mathbb{I}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Πρόταση 15.1.3. *Αν $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$, τότε η κυρτή θήκη του A είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των $x_1, \ldots, x_n$.*

Απόδειξη: Έστω B το σύνολο των κυρτών συνδυασμών των $x_1, \ldots, x_n$. Έχουμε ότι $x_1, \ldots, x_n \in Conv(A)$, άρα, από την πρόταση 15.1.1, επειδή το σύνολο $Conv(A)$ είναι κυρτό συμπεραίνουμε ότι $x \in Conv(A)$ για τον οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό x των $x_1, \ldots, x_n$. Επομένως

$$B \subseteq Conv(A) \tag{15.1}$$

Έστω ότι $x = \sum_{i=1}^{n} t_i p_i$ και $y = \sum_{i=1}^{n} t_i p_i$ δύο στοιχεία του B. Τότε $t_i, t_i' \in \mathbb{I}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i' = 1$.
Αν $t \in \mathbb{I}$, τότε

$$\begin{aligned} z = (1-t)x + ty &= (1-t)\sum_{i=1}^{n} t_i x_i + t\sum_{i=1}^{n} t_i' x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big((1-t)t_i + tt_i'\big)x_i. \end{aligned}$$

Έχουμε $(1-t)t_i + tt_i' \in \mathbb{I}$ και

$$\sum_{i=1}^{n} \big((1-t)t_i + tt_i'\big) = (1-t)\sum_{i=1}^{n} t_i + t\sum_{i=1}^{n} t_i' = 1,$$

άρα $z \in B$. Δηλαδή το B είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, το οποίο περιέχει τα $x_1, ..., x_n$, επομένως, από τον ορισμό του $Conv(A)$ έχουμε ότι

$$Conv(A) \subseteq B \tag{15.2}$$

Από τις (15.1) και (15.2) έπεται το ζητούμενο. □

Έστω ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$. Θεωρώντας γνωστή την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας k διανυσμάτων ($0 < k \leq n$) δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 15.1.3. Το υποσύνολο $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$, $m > 1$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **αφινικώς ανεξάρτητο**, αν και μόνον, αν το σύνολο $\{p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συμπληρώνουμε τον ορισμό θεωρώντας ότι κάθε μονομελές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο.

Παρατήρηση: Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι και αφινικώς ανεξάρτητο. Το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί, αν το $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε το $\{0, p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο χωρίς να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παραδείγματα 15.1.1.

1. Το $\{p_0, p_1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο, αν και μόνον, αν $p_0 \neq p_1$.

2. Το $\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο, αν και μόνον, αν τα p_0, p_1, p_2 δεν ανήκουν σε κάποια ευθεία του $\mathbb{R}^n$.
   Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από τα σημεία $a, b \in \mathbb{R}^n$, με $a \neq b$ είναι το σύνολο $\{(1-t)a + tb / t \in \mathbb{R}\}$.

3. Το $\{p_0, p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο, αν και μόνον, αν τα p_0, p_1, p_2, p_3 δεν ανήκουν σε κάποιο επίπεδο του $\mathbb{R}^n$.
   Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ορίζεται από τα τρία μη συνευθειακά σημεία a, b, c είναι το σύνολο $\{t_1 a + t_2 b + t_3 c / t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \wedge t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$.

Επιχειρώντας μια γενίκευση των προηγούμενων παραδειγμάτων για ένα πλήθος m στοιχείων του $\mathbb{R}^n$, $m < n$, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 15.1.4. Ένα υποσύνολο H του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται m-**υπερεπίπεδο στον** R^n **(**$m < n$**)**, αν και μόνον, αν είναι μεταφορά ενός m-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου V του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $H = x + V$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.

Η αφινική ανεξαρτησία συνδέεται με τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$, όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση

Πρόταση 15.1.4. *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Το σύνολο $\{p_0, \ldots, p_m\}$ είναι ένα αφινικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, όπου $1 \leq m \leq n$.

β΄) Τα $p_0, \ldots, p_m$ δεν ανήκουν σε κάποιο $(m-1)$-υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι τα $p_0, \ldots, p_m$ ανήκουν σε κάποιο $(m-1)$-υπερεπίπεδο $H = x + V$ του $\mathbb{R}^n$, όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και V ένας $(m-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι $p_0 - x, \ldots, p_m - x \in V$, άρα (αφαιρώντας το πρώτο διάνυσμα από όλα τα υπόλοιπα) $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0 \in V$. Τα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως ο V περιέχει m γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, άτοπο, γιατί η διάσταση του V είναι $m - 1$.
β') $\Rightarrow$ α'): Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι τα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγουν έχει διάσταση $\leq m - 1$. Μπορούμε να προσθέσουμε σε αυτά, αν χρειάζεται ένα πλήθος διανυσμάτων, ώστε μαζί με τα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ να παράγεται ένας υπόχωρος V διάστασης $m - 1$. Θεωρούμε το $(m-1)$-υπερεπίπεδο $H = p_0 + V$. Προφανώς $p_0 \in H$. Επιπλέον $p_i - p_0 \in V \quad \forall i = 1, \ldots, m$, άρα $p_i - p_0 + p_0 = p_i \in H \quad \forall i = 1, \ldots, m$, άρα $p_0, p_1, \ldots, p_m \in H$, άτοπο. □

Πρόταση 15.1.5. *Αν $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ($1 \leq m \leq n$), τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

α΄) Το σύνολο $\{p_0, \ldots, p_m\}$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο.

β΄) $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, \ldots, m$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Τα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big(-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big) p_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (p_i - p_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Επιπλέον, επειδή $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ θα έχουμε και $\lambda_0 = 0$, άρα $\lambda_i = 0$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m$.
β') $\Rightarrow$ α'): Έστω ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (p_i - p_0) = 0$, τότε $\big(-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\big) p_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = 0$. Θέτοντας $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = 0$ και $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$, άρα $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, \ldots, m$, άρα $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$, επομένως τα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως το σύνολο $\{p_0, \ldots, p_m\}$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο. □

Πρόταση 15.1.6. *Έστω ότι το σύνολο $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο. Τότε, υπάρχει μοναδικό m-υπερεπίπεδο H του $\mathbb{R}^n$, ώστε $A \subseteq H$.*

Απόδειξη: Ο υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ έχει διάσταση m. Το σύνολο $H = p_0 + V$ είναι ένα m-υπερεπίπεδο, το οποίο περιέχει ολόκληρο το σύνολο A, επομένως η ύπαρξη του υπερεπιπέδου αποδείχθηκε. Μένει να αποδειχθεί και η μοναδικότητα. Έστωσαν H και F δύο m-υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$, με $A \subseteq H$ και $A \subseteq F$. Επομένως υπάρχουν υπόχωροι V και U διάστασης m του $\mathbb{R}^n$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$, ώστε $H = x + V$ και $F = y + U$.

$$p_0, p_1, \ldots, p_m \in H \Rightarrow p_0 - x, p_1 - x, \ldots, p_m - x \in V$$

$$\Rightarrow p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0 \in V.$$

Τα m διανύσματα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του m-διάστατου διανυσματικού χώρου V, άρα το σύνολο $\{p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0\}$ είναι μια βάση του V.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\{p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0\}$ είναι μια βάση του U, άρα $V = U = W$. Τα H, F είναι δύο σύμπλοκα του υποχώρου W του $\mathbb{R}^n$, επομένως ή είναι ξένα ή ταυτίζονται. Επειδή $p_0 \in H \cap F$ τα H και F ταυτίζονται, επομένως αποδείχθηκε και η μοναδικότητα του υπερεπιπέδου. □

Ορισμός 15.1.5. Το υπερεπίπεδο H της πιο πάνω πρότασης ονομάζεται **υπερεπίπεδο που παράγεται από το αφινικώς ανεξάρτητο σύνολο** A.

Πρόταση 15.1.7. *Έστω $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ ένα αφινικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε διάνυσμα x του μοναδικού υπερεπιπέδου H για το οποίο ισχύει $A \subseteq H$ υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί λ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, ώστε $x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i$ και $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.*

Απόδειξη: Όπως έχουμε δει στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, τα $p_0, p_1, \ldots, p_m$ ανήκουν στο μοναδικό υπερεπίπεδο $H = p_0 + V$, όπου V είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$.
Επομένως, αν $x \in H$, υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί μ_i, $i = 1, \ldots, m$, ώστε

$$\begin{aligned} x &= p_0 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (p_i - p_0) \\ &= \Big(1 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i\Big) p_0 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i p_i. \end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i$ και $\lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 15.1.6. Έστω $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ ένα αφινικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq m \leq n)$ και x ένα διάνυσμα του μοναδικού m-υπερεπιπέδου που περιέχει το A. Η μοναδική διατεταγμένη $(m + 1)$-άδα, $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, για την οποία ισχύουν τα $x = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i p_i$ και $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ ονομάζεται $(m + 1)$-άδα **βαρυκεντρικών συντεταγμένων του** x.

Ορισμός 15.1.7. Αν το υποσύνολο $A = \{p_0, \ldots, p_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητο, τότε και μόνον, τότε το

$$[p_0, \ldots, p_m] = \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \;/\; \lambda_i \in \mathbb{I} \quad \forall i = 0, \ldots, m \wedge \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\Big\}$$

ονομάζεται m-**πλέγμα**.[2] Το σημείο p_i ονομάζεται i-**κορυφή** του πλέγματος. Το σύνολο των σημείων του πλέγματος, τα οποία έχουν την k- βαρυκεντρική συντεταγμένη ίση με μηδέν ονομάζεται k- **όψη** του πλέγματος ή όψη απέναντι από την k- κορυφή και συμβολίζεται με F_k, δηλαδή

$$F_k = \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \;/\; \lambda_i \in \mathbb{I} \quad \forall i = 0, 1, \ldots, m,\ \lambda_k = 0 \wedge \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Βαρύκεντρο του πλέγματος $[p_0, p_1, \ldots, p_m]$ είναι το σημείο του $b = \frac{1}{m+1} \sum\limits_{i=0}^{m} p_i \in [p_0, p_1, ..., p_m]$.

Παραδείγματα 15.1.2.

1. Το $p_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα 0-πλέγμα.

2. Αν $p_0 \neq p_1$, τότε το $[p_0, p_1] = \big\{(1-t)p_0 + tp_1 / t \in \mathbb{I}\big\}$ είναι ένα 1-πλέγμα. Γεωμετρικά είναι το ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα τα σημεία p_0 και p_1. Τα μονοσύνολα $\{p_0\}$ και $\{p_1\}$ είναι οι κορυφές του πλέγματος, οι οποίες ταυτίζονται με τις όψεις του πλέγματος.

[2] Η λέξη πλέγμα είναι ελεύθερη απόδοση της λέξης simplex που συναντάμε στην Αγγλική βιβλιογραφία. Στα Ελληνικά συνηθέστατα η λέξη simplex αποδίδεται με τη λέξη άπλοκο.

3. Αν τα p_0, p_1, p_2 δεν είναι συνευθειακά, δηλαδή τα $p_1 - p_0, p_2 - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το $[p_0, p_1, p_2] = \big\{t_0p_0 + t_1p_1 + t_2p_2/t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{I} \wedge t_0 + t_1 + t_2 = 1\big\}$ είναι ένα 2-πλέγμα. Γεωμετρικά είναι το τρίγωνο, με κορυφές τα p_0, p_1 και p_2 μαζί με το εσωτερικό του. Τα σημεία p_0, p_1 και p_2 είναι οι κορυφές του πλέγματος. Η 0-όψη του πλέγματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[p_1, p_2] = \big\{(1-t)p_1 + tp_2/t \in [0,1]\big\}$. Η 1-όψη του πλέγματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[p_2, p_0] = \big\{(1-t)p_2 + tp_0/t \in [0,1]\big\}$. Η 2- όψη του πλέγματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[p_1, p_0] = \big\{(1-t)p_1 + tp_0/t \in [0,1]\big\}$.

4. Αν τα p_0, p_1, p_2, p_3 δεν είναι συνεπίπεδα, δηλαδή τα $p_1 - p_0, p_2 - p_0, p_3 - p_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το $[p_0, p_1, p_2, p_3] = \big\{t_0p_0 + t_1p_1 + t_2p_2 + t_3p_3/t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{I} \wedge t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 1\big\}$ είναι ένα 3-πλέγμα. Γεωμετρικά είναι το τετράεδρο, με κορυφές τα p_0, p_1, p_2 και p_3 μαζί με το εσωτερικό του. Τα σημεία p_0, p_1, p_2 και p_3 είναι οι κορυφές του πλέγματος. Η 0- όψη του πλέγματος είναι το τρίγωνο $[p_1, p_2, p_3]$ και το εσωτερικό του. Η 1- όψη του πλέγματος είναι το τρίγωνο $[p_2, p_3, p_0]$ και το εσωτερικό του. Η 2- όψη του πλέγματος είναι το τρίγωνο $[p_3, p_0, p_1]$ και το εσωτερικό του. Η 3-όψη του πλέγματος είναι το τρίγωνο $[p_0, p_1, p_2]$ και το εσωτερικό του.

Ορισμός 15.1.8. Αν $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ και $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1$, τότε και μόνον, τότε το $\sum\limits_{i=1}^{m} t_ip_i$ ονομάζεται **αφινικός συνδυασμός** των $p_1, \ldots, p_m$.

Ορισμός 15.1.9. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **αφινικώς κλειστό**, αν και μόνον, αν μαζί με τα οποιαδήποτε στοιχεία του περιέχει και όλους του αφινικούς συνδυασμούς τους.

Πρόταση 15.1.8. *Κάθε m-πλέγμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι αφινικώς κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη: Αν τα $q_1, \ldots, q_k$ είναι σημεία του πλέγματος $[p_0, p_1, \ldots, p_m]$ και $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$ θα αποδείξουμε ότι το σημείο $q = \sum\limits_{i=1}^{k} t_iq_i$ είναι σημείο του πλέγματος $[p_0, p_1, \ldots, p_m]$. Έστω $i \in \{1, \ldots, k\}$. Επειδή $q_i \in [p_0, p_1, \ldots, p_m]$ υπάρχουν $r_0^i, \ldots, r_m^i \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{j=0}^{m} r_j^i = 1$, ώστε $q_i = \sum\limits_{j=0}^{m} r_j^ip_j$. Επομένως

$$q = \sum_{i=1}^{k} t_iq_i = \sum_{i=1}^{k} t_i \sum_{j=0}^{m} r_j^ip_j = \sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{k} t_ir_j^i\Big)p_j.$$

Έχουμε $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{k} t_ir_j^i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$. Επιπλέον

$$\sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{k} t_ir_j^i\Big) = \sum_{i=1}^{k} t_i\Big(\sum_{j=0}^{m} r_j^i\Big) = \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,$$

άρα $q \in [p_0, p_1, \ldots, p_m]$. □

Ορισμός 15.1.10. Έστω ότι $A = [p_0, p_1, \ldots, p_m]$ και $B = [q_0, q_1, \ldots, q_n]$ είναι δύο πλέγματα στον $\mathbb{R}^k$. Μία απεικόνιση $T : A \to B$ ονομάζεται **αφινική**, αν και μόνον, αν για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq \{0, 1, \ldots, m\}$ έχουμε , αν $t_j \in \mathbb{I}$ και $\sum\limits_{j \in J} t_i = 1$, τότε $T\Big(\sum\limits_{j \in J} t_jp_j\Big) = \sum\limits_{j \in J} t_jT(p_j)$.

Πρόταση 15.1.9. *Αν το* $[p_0, p_1, \dots, p_m]$ *είναι ένα* m*-πλέγμα,* $[q_0, q_1, \dots, q_n]$ *ένα* n*-πλέγμα και* $f : \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \to [q_0, q_1, \dots, q_n]$ *μια απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδική αφινική απεικόνιση* $T : [p_0, p_1, \dots, p_m] \to [q_0, q_1, \dots, 1_m]$*, ώστε* $T(p_i) = f(p_i)$ *για κάθε* $i \in \{0, 1, \dots, m\}$*.*

Απόδειξη: Για την ύπαρξη: Έστω $\varnothing \neq J \subseteq \{0, 1, \dots, .m\}$. Αν $t_j \in \mathbb{I}$ για κάθε $j \in J$ και $\sum_{j \in J} t_j = 1$, τότε ορίζουμε $T\Big(\sum_{j \in J} t_j p_j\Big) = \sum_{j \in J} t_j f(p_j)$. Λόγω της προηγούμενης πρότασης, η T είναι καλώς ορισμένη. Προφανώς $T(p_j) = f(p_j)$ για κάθε $j \in J$,
άρα $T\Big(\sum_{j \in J} t_j p_j\Big) = \sum_{j \in J} t_j T(p_j)$. Επομένως η T είναι αφινική.
Για την μοναδικότητα: Έστω $T' : [p_0, p_1, \dots, p_m] \to [q_0, q_1, \dots, q_n]$ μια αφινική απεικόνιση, ώστε $T'(p_i) = f(p_i)$. Τότε

$$\begin{aligned} T'\Big(\sum_{j \in J} t_j p_j\Big) &= \sum_{j \in J} t_j T'(p_j) \\ &= \sum_{j \in J} t_j f(p_j) \\ &= \sum_{j \in J} t_j T(p_j) \\ &= T\Big(\sum_{j \in J} t_j p_j\Big), \end{aligned}$$

άρα $T' = T$. □

Η ακόλουθη πρόταση, η οποία αφορά στην διάμετρο των πλεγμάτων είναι απαραίτητη στην απόδειξη του θεωρήματος εκτομής, το οποίο είναι από τις σημαντικότερες προτάσεις της αλγεβρική τοπολογίας.

Πρόταση 15.1.10. *Αν* $A = [p_0, p_1, \dots, p_m]$*, τότε*

α΄) $u, v \in A \Rightarrow \|u - v\| \leq \sup_i \|u - p_i\|$.

β΄) $\operatorname{diam} A = \sup_{i,j} \|p_i - p_j\|$.

γ΄) Αν b *είναι τα βαρύκεντρο του* A*, τότε* $\|b - p_i\| \leq \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}(A)$.

Απόδειξη: α′) Είναι $v = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i$, με $t_i \in \mathbb{I}$ και $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$. Άρα

$$\begin{aligned}
\|u - v\| &= \Big\| u - \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \Big\| \\
&= \Big\| \Big(\sum_{i=0}^{m} t_i \Big) u - \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i=0}^{m} t_i (u - p_i) \Big\| \\
&\leq \Big(\sum_{i=0}^{m} t_i \Big) \|u - p_i\| \\
&\leq \Big(\sum_{i=0}^{m} t_i \Big) \sup_i \|u - p_i\| \\
&= \sup_i \|u - p_i\|.
\end{aligned}$$

β′) Από το α') έχουμε $\|u - v\| \leq \sup_i \|u - p_i\|$, άρα

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|u - v\| / u, v \in A\} \leq \sup_{i,j} \|p_i - p_j\|.$$

Αφ' ετέρου $\|p_i - p_j\| \leq \operatorname{diam}(A)$ για κάθε $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, άρα $\sup \|p_i - p_j\| \leq \operatorname{diam}(A)$, επομένως $\operatorname{diam}(A) = \sup_{i,j} \|p_i - p_j\|$.

γ′) Είναι $b = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} p_j$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|b - p_i\| &= \Big\| \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} p_j - p_i \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1} p_j - \Big(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m+1} \Big) p_i \Big\| \\
&= \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1} \Big) (p_j - p_i) \Big\| \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \|p_j - p_i\| \\
&\leq \frac{m}{m+1} \sup_{i,j} \|p_j - p_i\| \leq \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}(A).
\end{aligned}$$

Ορισμός 15.1.11. Κανονικό n-πλέγμα $(n \geq 0)$ ονομάζεται ο υπόχωρος

$$\Delta^n = \Big\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; t_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, n \wedge \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\Big\}$$

του $\mathbb{R}^{n+1}$ ή αλλιώς το n-πλέγμα $[e_0, e_1, \ldots, e_n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, όπου $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η ορθοκανονική βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$.

Παραδείγματα 15.1.3.

1. Κανονικό 0-πλέγμα Δ^0 είναι το σημείο 1 του $\mathbb{R}$.
2. Κανονικό 1-πλέγμα Δ^1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το (1,0) και πέρας το (0,1) ή αλλιώς το σύνολο $\Delta^1 = \{(1-t, t) \in \mathbb{R}^2 / t \in \mathbb{I}\}$.
3. Κανονικό 2-πλέγμα Δ^2 είναι το ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (1,0,0) (0,1,0) και (0,0,1) και το εσωτερικό του ή αλλιώς το υποσύνολο Δ^2 του $\mathbb{R}^3$, το οποίο αποτελείται από τα σημεία (t_0, t_1, t_2), με $t_i \geq 0$ για $i = 0, 1, 2$ και $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.
4. Κανονικό 3-πλέγμα είναι το τετράεδρο με κορυφές τα σημεία (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) και (0,0,0,1) και το εσωτερικό του κ.ο.κ.

Παρατηρήσεις:

1. Το σημείο $(t_0, \ldots, t_n)$, με $t_i = 1$ και $t_k = 0$ για κάθε $k \neq i$ είναι η i-κορυφή του κανονικού πλέγματος Δ^n.
2. Το σύνολο $F_i = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n / t_i = 0\}$ είναι η i-όψη του Δ^n.
3. Η απεικόνιση $f : [0,1]^{n+1} \to \mathbb{R}$, με $f(t_0, \ldots, t_n) = \sum_{i=0}^{n} t_i$ είναι συνεχής και $\Delta^n = f^{-1}(\{1\})$, άρα το Δ^n είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Επιπλέον, αν $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$, τότε $\|(t_0, \ldots, t_n)\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} t_i^2} \leq \sqrt{n+1}$, άρα το Δ^n είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως το Δ^n είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.
4. Το $\Delta^n = [e_0, e_1, \ldots, e_n]$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, επομένως το Δ^n είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.
5. Θεωρούμε τις i-προβολές $p_i : \Delta^n \to \mathbb{I}$, με $p_i(t_0, t_1, \ldots, t_n) = t_i$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$. Τα σύνολα $p_i^{-1}\big((0,1)\big)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Δ^n, άρα το $\bigcap_{i=0}^{n} p_i^{-1}\big((0,1)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Δ^n, επομένως

$$\bigcap_{i=0}^{n} p_i^{-1}\big((0,1)\big) \subseteq \big(\Delta^n\big)^0 \tag{15.3}$$

Επιπλέον οι p_i είναι ανοικτές απεικονίσεις, άρα τα σύνολα $p_i\big(\big(\Delta^n\big)^0\big)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{I}$, άρα $p_i\big(\big(\Delta^n\big)^0\big) \subseteq (0,1)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, άρα $\big(\Delta^n\big)^0 \subseteq p_i^{-1}\big(p_i\big(\big(\Delta^n\big)^0\big)\big) \subseteq p_i^{-1}\big((0,1)\big)$, άρα

$$\bigcap_{i=0}^{n} p_i^{-1}\big((0,1)\big) \supseteq \big(\Delta^n\big)^0 \tag{15.4}$$

από τις (15.3) και (15.4) έχουμε ότι

$$\left(\Delta^n\right)^0 = \bigcap_{i=0}^{n} p_i^{-1}\big((0,1)\big) = \left\{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n \,\Big/\, \prod_{i=0}^{n} t_i \neq 0\right\}$$

και

$$\operatorname{Bd}\left(\Delta^n\right) = \Delta^n \setminus \left(\Delta^n\right)^0 = \left\{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n \,\Big/\, \prod_{i=0}^{n} t_i = 0\right\} = \bigcup_{i=0}^{n} F_i.$$

6. Το Δ^n είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, με μη κενό εσωτερικό, επομένως (πρόταση 7.2.13) έχουμε

$$\Delta^n \cong \mathbb{D}^n \text{ και } \operatorname{Bd}\left(\Delta^n\right) \cong \mathbb{S}^{n-1}.$$

Για την απόδειξη της πρότασης 15.4.2 που είναι η πρόταση, στην οποία στηρίζεται ο ορισμός της ιδιάζουσας ομολογίας είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις απεικονίσεις όψης.

Ορισμός 15.1.12. Ορίζουμε ως $(i, n-1)$- **απεικόνιση όψης**, με $n \geq 1$ και $0 \leq i \leq n-1$, την οποία συμβολίζουμε με d_i^{n-1} την απεικόνιση

$$d_i^{n-1} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n,$$

η οποία απεικονίζει την n-άδα $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ στην $(n+1)$- άδα που προκύπτει, αν στην $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ ακριβώς πριν την i-θέση επισυνάψουμε το 0. Για παράδειγμα η $d_0^2 : \Delta^2 \to \Delta^3$ δίνεται από τη σχέση $d_0^2(t_0, t_1, t_2) = (0, t_0, t_1, t_2)$. Η $d_1^2 : \Delta^2 \to \Delta^3$ δίνεται από τη σχέση $d_1^2(t_0, t_1, t_2) = (t_0, 0, t_1, t_2)$ και η $d_2^2 : \Delta^2 \to \Delta^3$ δίνεται από τη σχέση $d_2^2(t_0, t_1, t_2) = (t_0, t_1, 0, t_2)$.

Πρόταση 15.1.11. *Οι απεικονίσεις όψης είναι ομοιόμορφα συνεχείς.*

Απόδειξη: Έστωσαν $t = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in \Delta^{n-1}$ και $\varepsilon > 0$. Είναι

$$\|t - s\| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - s_i)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\delta_i^{n-1}(t) - \delta_i^{n-1}(s)\| < \varepsilon.$$

Άρα η δ_i^{n-1} είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Λήμμα 15.1.12. *Για κάθε i, j, με $0 \leq j < i \leq n$ οι απεικονίσεις $d_i^n \circ d_j^{n-1}$ και $d_j^n \circ d_{i-1}^{n-1}$ ταυτίζονται.*

Απόδειξη:

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{d_{i-1}^{n-1}} \Delta^n \xrightarrow{d_j^n} \Delta^{n+1}$$

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{d_j^{n-1}} \Delta^n \xrightarrow{d_i^n} \Delta^{n+1}$$

- Αν $j = i - 1$, τότε

$$\begin{aligned} d_i^n\big(d_j^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_i^n(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} d_j^n\big(d_{i-1}^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_j^n(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

- Αν $j = i - 2$, τότε

$$\begin{aligned} d_i^n\big(d_j^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_i^n(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} d_j^n\big(d_{i-1}^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_j^n(t_0, \dots, t_{j-1}, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

- Αν $j < i - 2$, τότε

$$\begin{aligned} d_i^n\big(d_j^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_i^n(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} d_j^n\big(d_{i-1}^{n-1}(t_0, \dots, t_{n-1})\big) &= d_j^n(t_0, \dots, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο αληθεύει. □

Παρατήρηση: Το κανονικό n-πλέγμα Δ^n έχει $(n+1)$-όψεις, τις $F_i = d_i^{n-1}(\Delta^{n-1})$, $i = 0, 1, \dots, n$. Το σύνορο του Δ^n είναι $\mathrm{Bd}(\Delta^n) = \bigcup_{i=0}^{n} F_i = \bigcup_{i=0}^{n} d_i^{n-1}(\Delta^{n-1})$.

15.2 Αλγεβρικά προαπαιτούμενα

Για την κατανόηση της ομολογίας των τοπολογικών χώρων είναι απαραίτητες κάποιες έννοιες και προτάσεις από την άλγεβρα, τις οποίες μελετούμε στην παράγραφο αυτή. Συμφωνούμε η πράξη στις αβελιανές ομάδες να σημειώνεται ως πρόσθεση. Αν G είναι μία αβελιανή ομάδα, n θετικός ακέραιος και $a \in G$, τότε με na συνοπτικά δηλώνουμε το άθροισμα των n-προσθετέων $\underbrace{a + \cdots + a}_{n}$. Αν n αρνητικός ακέραιος, τότε $na = -(-na)$. Συμφωνούμε να είναι $0a = \mathbf{0}$. Με το $\mathbf{0}$ συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.
Για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών της παραγράφου αυτής καλόν είναι να προηγηθεί η μελέτη της παραγράφου 21.4 του παραρτήματος.

Ορισμός 15.2.1. Έστω G αβελιανή ομάδα και A ένα μη κενό υποσύνολο του $G \setminus \{\mathbf{0}\}$. Θα λέμε ότι η G είναι **ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το** A ή **ελεύθερη αβελιανή ομάδα με σύνολο γεννητόρων τα στοιχεία του** A, αν και μόνον, αν ισχύουν τα ακόλουθα

α΄) Για κάθε $a \in G$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$, ώστε $a = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i a_i$, δηλαδή το A παράγει την G και

β΄) Αν $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0.$$

Παρατήρηση: Αν $a \in G \setminus \{0\}$, τότε τα $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, για τα οποία ισχύει $a = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i a_i$, με $a_i \in A$, όπου A μια βάση της G δεν μπορεί να είναι όλα ίσα με 0. Επομένως παραλείποντας εκείνα τα k_i, που είναι ίσα με 0 έχουμε $a = \sum k_i a_i$, με $k_i \in \mathbb{Z}^*$.

Παραδείγματα 15.2.1.

1. Η προσθετική ομάδα των ακεραίων είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο $\{1\}$.

2. Η προσθετική ομάδα $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο $\{n\}$.

3. Η ομάδα $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση των σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $\{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)\}$.

4. Η ομάδα $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο των ακολουθιών, οι οποίες έχουν έναν μόνον όρο τους ίσο με 1 και τους υπόλοιπους ίσους με 0.

5. Η προσθετική ομάδα των ρητών δεν είναι ελεύθερη αβελιανή. Πράγματι, αν υποθέσουμε, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι ισχύει το αντίθετο, τότε η $\mathbb{Q}$ θα έχει μια βάση, ας πούμε το σύνολο A. Αν $a, b \in A$, με $a \neq b$, τότε, εύκολα συμπεραίνουμε

ότι, υπάρχουν μη μηδενικοί ακέραιοι m, n, ώστε $na + mb = 0$, το οποίο, από τον ορισμό της ελεύθερης αβελιανής ομάδας είναι αδύνατο. Άρα το σύνολο A είναι μονοσύνολο. Έστω πως $A = \{a\}, a \neq 0$. Επειδή $a \in \mathbb{Q}$ υπάρχει μη μηδενικός ακέραιος M, πρώτοι $p_1, \ldots, p_k$ και θετικοί ακέραιοι $r_1, \ldots, r_k$, ώστε $a = \frac{M}{p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}}$. Έστω q πρώτος, με $q \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$, τότε $\frac{1}{q} = la$, για κάποιον μη μηδενικό ακέραιο l, άρα $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = lMq$, άρα $q | p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, άτοπο.

Παρατήρηση: Η βάση μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα στο πρώτο από τα παραδείγματα που προαναφέραμε, βάση της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ είναι και το σύνολο $\{-1\}$.

Πρόταση 15.2.1. *Έστω G μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα, A μία βαση της και $a \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε υπάρχουν μοναδικό $n \in \mathbb{N}$, μοναδικά $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^*$ και μοναδικά $a_1, \ldots, a_n \in A$, ώστε $a = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i a_i$.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό της ελεύθερης αβελιανής ομάδας υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^*$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$, ώστε $a = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i a_i$. Έστω ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, με $m \neq n$ υπάρχουν $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{Z}^*$ και $b_1, \ldots, b_m \in A$, ώστε $a = \sum\limits_{i=1}^{m} l_i b_i$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $m > n$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{m} l_i b_i &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i a_i + \sum_{i=1}^{n} (-l_i) b_i + \sum_{i=n+1}^{m} (-l_i) b_i = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = l_1 = \cdots = l_m = 0, \end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως $m = n$. Θεωρούμε τα σύνολα $I = \{1, \ldots, n\}$ και $J = \{i \in I / a_i \neq b_i\}$. Αν υποθέσουμε ότι $J \neq \varnothing$, τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} l_i b_i &\Rightarrow \sum_{i \in J} k_i a_i + \sum_{i \in I \setminus J} k_i a_i = \sum_{i \in J} l_i b_i + \sum_{i \in I \setminus J} l_i b_i \\ &\Rightarrow \sum_{i \in J} k_i a_i + \sum_{i \in J} (-l_i) b_i + \sum_{i \in I \setminus J} (k_i - l_i) a_i = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow k_i = l_i = 0 \quad \forall i \in J, \end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως έχουμε $J = \varnothing$ και $a_i = b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Άρα τα $a_1, \ldots, a_n \in A$ είναι μοναδικά. Επιπλέον

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \sum_{i=1}^{n} l_i a_i &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (k_i - l_i) a_i = 0 \\ &\Rightarrow k_i = l_i \quad \forall i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

άρα τα k_i είναι και αυτά μοναδικά. □

Πρόταση 15.2.2. *Αν G είναι μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα, με βάση το $A \subseteq G$, $r \in \mathbb{Z}^*$ και $a \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε $ra \neq \mathbf{0}$. Δηλαδή η G είναι ελεύθερη στρέψης.*

Απόδειξη: Έστω ότι $a \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^*$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$, ώστε $a = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$. Επομένως

$$\begin{aligned} ra = \mathbf{0} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r k_i a_i = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow r k_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow k_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο, άρα $ra \neq \mathbf{0}$. □

Παρατήρηση: Με χρήση της αμέσως προηγούμενης πρότασης συμπεραίνουμε ότι η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5$ δεν είναι ελεύθερη, γιατί $5(0, [0]_5) = (0, [0]_5) = \mathbf{0}$.

Πρόταση 15.2.3. *Έστω G μια αβελιανή ομάδα και A ένα μη κενό υποσύνολο του $G \setminus \{\mathbf{0}\}$. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Η G είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το A.

β΄) Για κάθε $a \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$ υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$, ώστε το a να γράφεται με μοναδικό τρόπο, ως $a = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$, με $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^*$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Έχει ήδη αποδειχθεί (πρόταση 15.2.1).
β') $\Rightarrow$ α'): Το α') του ορισμού 15.2.1 ικανοποιείται προφανώς. Αρκεί να αποδείξουμε το β') του παραπάνω ορισμού.
Έστω ότι $a_1, \ldots, a_n \in A$ και $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε κάθε ένα από τα k_i, ως άθροισμα δύο μη μηδενικών ακεραίων k_{il} και k_{ir} και έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \mathbf{0} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_{il} a_i + \sum_{i=1}^{n} k_{ir} a_i = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_{il} a_i = \sum_{i=1}^{n} (-k_{ir}) a_i \\ &\Rightarrow k_{il} = -k_{ir} \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Rightarrow k_i = k_{il} + k_{ir} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει και το β!) του ορισμού 15.2.1. □

Πρόταση 15.2.4. *Αν A είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχει ελεύθερη αβελιανή ομάδα G, μια βάση της K και απεικόνιση $\Phi : A \to K$, η οποία είναι 1-1 και επί.*

Απόδειξη: Ονομάζουμε $F(A)$ το σύνολο των απεικονίσεων $f : A \to \mathbb{Z}$, για τις οποίες ισχύει $f(x) \neq 0$ μόνον για πεπερασμένο πλήθος στοιχείων x του A. Το $F(A)$ με πράξη την πρόσθεση απεικονίσεων είναι αβελιανή ομάδα. [3] Για κάθε $a \in A$, θεωρούμε την $f_a \in F(A)$, με

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}.$$

Αν $f \in F(A)$ και $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι το σύνολο των σημείων του A, για τα οποία

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in B,$$

τότε η f γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $f = k_1 f_{a_1} + \cdots + k_n f_{a_n}$, όπου $k_1, \dots, k_n$ μη μηδενικοί ακέραιοι. Άρα η $F(A)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα και το σύνολο $K = \{f_a / a \in A\}$ είναι μια βάση της. Τέλος, εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $\Phi : A \to K$, με $\Phi(a) = f_a$ είναι 1-1 και επί. □

Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση, ακριβώς λόγω της ύπαρξης της Φ, μπορούμε να ταυτίσουμε το K με το A. Δύο σύνολα, τα οποία δεν έχουν κάποια δομή θεωρούμε ότι ταυτίζονται, αν υπάρχει μεταξύ τους μια 1-1 και επί απεικόνιση. Για τον λόγο αυτόν:

Πρόταση 15.2.5. *Για κάθε μη κενό σύνολο A, υπάρχει μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα G, της οποίας μια βάση είναι το A.*

Η πρόταση που ακολουθεί είναι πολύ χρήσιμη για τον ορισμό των ομομορφισμών ομάδων που θα συναντήσουμε στην ιδιάζουσα ομολογία.

Πρόταση 15.2.6. *Αν G ελεύθερη αβελιανή ομάδα, A μια βάση της, H μια οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα και $g : A \to H$ μία απεικόνιση, τότε η g επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε έναν ομομορφισμό $f : G \to H$, δηλαδή $f/A = g$.*

Απόδειξη: Έστω $A = \{a_i, i \in I\}$ μια βάση της G. Το $a \in G$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = \sum_{i \in K} n_i a_i$, όπου K πεπερασμένο υποσύνολο του I, $a_i \in A \quad \forall i \in K$ και n_i, $i \in K$ μη μηδενικοί ακέραιοι. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : G \to H$, με $f\big(\sum_{i \in K} n_i a_i\big) = \sum_{i \in k} n_i g(a_i)$. Αν $a, b \in G$, τότε, υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα K, L του I, ώστε $a = \sum_{i \in K} n_i a_i$ και $b = \sum_{i \in L} m_i a_i$, άρα

$$\begin{aligned} f(a+b) &= \sum_{i \in K \cap L} (n_i + m_i) g(a_i) + \sum_{i \in K \setminus L} n_i g(a_i) + \sum_{i \in L \setminus K} m_i g(a_i) \\ &= f(a) + f(b) \,. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι ομομορφισμός. Το $f/A = \phi$ είναι προφανές.
Για την απόδειξη της μοναδικότητας, θεωρούμε έναν ομομορφισμό $h : G \to H$, με $h/A = g$.

[3] Η απόδειξη είναι θέμα ρουτίνας και αφήνεται ως άσκηση.

Αν $a \in G$, τότε υπάρχει μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο K του I, ώστε $a = \sum_{i \in K} n_i a_i$, με $n_i \in \mathbb{Z}$ και $a_i \in A$ για κάθε $i \in K$, άρα

$$\begin{aligned} h(a) &= \sum_{i \in K} n_i h(a_i) \\ &= \sum_{i \in K} n_i g(a_i) = f(a), \end{aligned}$$

επομένως $g = f$. □

Πρόταση 15.2.7. *Αν η ελεύθερη αβελιανή ομάδα G έχει βάση το σύνολο A, τότε*

$$G \simeq \bigoplus_{i \in A} \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $g : A \to \bigoplus_{i \in A} \mathbb{Z}$, όπου το $i \in A$ μέσω αυτής να απεικονίζεται στην οικογένεια, η οποία έχει στην i θέση το 1 και στις υπόλοιπες θέσεις το 0. Η g επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό $f : G \to \bigoplus_{i \in A} \mathbb{Z}$ (πρόταση 15.2.6).
Έστω ότι $a, b \in G$ τότε υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $K, L \subseteq A$, ώστε $a = \sum_{i \in K} n_i i$ και $b = \sum_{i \in L} m_i i$, όπου $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$. Επομένως

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \sum_{i \in K} n_i f(i) = \sum_{i \in L} m_i f(i) \\ &\Rightarrow \sum_{i \in K} n_i g(i) = \sum_{i \in L} m_i g(i). \end{aligned}$$

Στην ισότητα

$$\sum_{i \in K} n_i g(i) = \sum_{i \in L} m_i g(i) \tag{15.5}$$

στο πρώτο μέλος έχουμε ένα στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Z}^A$, το οποίο έχει στην i-θέση τον αριθμό n_i και στις υπόλοιπες θέσεις το 0. Στο δεύτερο μέλος έχουμε ένα στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Z}^A$, το οποίο έχει στην i-θέση τον αριθμό m_i και στις υπόλοιπες θέσεις το 0. Επομένως, εφ'όσον τα στοιχεία αυτά είναι ίσα θα έχουμε $K = L$ και $n_i = m_i$ για κάθε $i \in K = L$, άρα $a = b$, δηλαδή η f είναι 1-1.
Έστω $a \in \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$, άρα υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο K του I και $n_i \in \mathbb{Z}$, με $i \in K$, ώστε το a να έχει στην i-θέση τον ακέραιο n_i για κάθε $i \in K$ και στις υπόλοιπες το 0. Τότε $f\big(\sum_{i \in K} n_i i\big) = a$, άρα η f είναι επί. Συνεπώς η f είναι ισομορφισμός, δηλαδή $G \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$. □

Όπως φαίνεται από την πρόταση που ακολουθεί οι ελεύθερες αβελιανές ομάδες καθορίζονται πλήρως κατ'ισομορφισμόν από τον πληθάριθμο μιας βάσης τους.

Πρόταση 15.2.8. *Αν G_1, G_2 είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες με βάσεις τις A_1, A_2, αντιστοίχως, τότε αληθεύει η ισοδυναμία*

$$G_1 \simeq G_2 \quad \Leftrightarrow \quad |A_1| = |A_2|.$$

Απόδειξη: ($\Leftarrow$): Επειδή $|A_1| = |A_2|$ υπάρχουν απεικονίσεις $f : A_1 \to A_2$ και $g : A_2 \to A_1$, ώστε $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in A_1$ και $(f \circ g)(y) = y$ για κάθε $y \in A_2$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $f' : A_1 \to G_2$, με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A_1$, η οποία επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό $\Phi : G_1 \to G_2$. Επίσης θεωρούμε την απεικόνιση $g' : A_2 \to G_1$, με $g'(y) = g(y)$ για κάθε $y \in A_2$, η οποία επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό $K : G_2 \to G_1$. Κάθε $x \in G_1$ γράφεται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sum m_i x_i$, με $m_i \in \mathbb{Z}$ και $x_i \in A_1$, επομένως

$$\begin{aligned}\big(K \circ \Phi\big)(x) &= \big(K \circ \Phi\big)\big(\sum m_i x_i\big)\\ &= K\big(\sum m_i \Phi(x_i)\big)\\ &= K\big(\sum m_i f(x_i)\big)\\ &= \sum m_i K(f(x_i))\\ &= \sum m_i g(f(x_i))\\ &= \sum m_i x_i = x,\end{aligned}$$

$$K \circ \Phi = i_{G_1} \tag{15.6}$$

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι

$$\Phi \circ K = i_{G_2} \tag{15.7}$$

Από τις (15.6) και (15.7) προκύπτει ότι ο Φ είναι ισομορφισμός, άρα $G_1 \simeq G_2$.
($\Rightarrow$): Αρχικά υποθέτουμε ότι το σύνολο A_1 είναι πεπερασμένο και θεωρούμε το σύνολο A των ομομορφισμών της G_1 στην $\mathbb{Z}_2$, το οποίο, λόγω της 15.2.6 είναι ισοπληθές με το σύνολο των απεικονίσεων του A_1 στο σύνολο $\mathbb{Z}_2$, άρα

$$|A| = 2^{|A_1|} \tag{15.8}$$

Επειδή $G_2 \simeq G_1$, το σύνολο B των ομομορφισμών της G_2 στην $\mathbb{Z}_2$ είναι ισοπληθές με το A. Αφετέρου, όπως πριν καταλήγουμε στο

$$|B| = 2^{|A_2|} \tag{15.9}$$

Άρα $2^{|A_1|} = 2^{|A_2|}$. Επομένως το A_2 είναι πεπερασμένο και $|A_1| = |A_2|$.
Αν τα A_1 και A_2 είναι απειροσύνολα θέτουμε $|A_1| = a \geq \aleph_0$ και $|A_2| = b \geq \aleph_0$. Τότε η G_1 είναι η ξένη ένωση των συνόλων A^k, με $A^k = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i / \lambda_i \in \mathbb{Z} \wedge a_i \in A_1\}$. Κάθε ένα από τα σύνολα A^k είναι ισοδύναμο με το σύνολο $\mathbb{Z}^k \times A_1^k$, άρα έχει πληθάριθμο $\aleph_0^k a^k = \aleph_0 a = a$. Επομένως $|G_1| = \sum_{k=1}^{\infty} a = \aleph_0 a = a$. Ομοίως $|G_2| = b$.
Έχουμε $G_1 \simeq G_2$, άρα $|G_1| = |G_2|$, άρα $a = b$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Είναι προφανές ότι δύο βάσεις μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, επομένως:

Ορισμός 15.2.2. Αν G είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα και A μια βάση της, τότε τον αριθμό $|A|$ ονομάζουμε **τάξη της ελεύθερης αβελιανής ομάδας** G και συμβολίζουμε με $rank(G)$.

Το τελευταίο που θα μας απασχολήσει στις ελεύθερες αβελιανές ομάδες είναι η απόδειξη του ισχυρισμού ότι οι υποομάδες των ελεύθερων αβελιανών ομάδων είναι επίσης ελεύθερες.

Λήμμα 15.2.9. *Έστω F μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα και B, C αβελιανές ομάδες. Αν ο $h : F \to C$ είναι ομομορφισμός και ο $g : B \to C$ επιμορφισμός, τότε υπάρχει ομομορφισμός $f : F \to B$, ώστε $g \circ f = h$.*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{h} & C \\ f\big\downarrow & \nearrow_{g} & \\ B & & \end{array} .$$

Απόδειξη: Έστω X μια βάση της F. Για κάθε $x \in X$ επιλέγουμε ένα $b_x \in B$, ώστε $g(b_x) = h(x)$. Μια τέτοια επιλογή είναι δυνατή, γιατί η g είναι επί. Ακολούθως ορίζουμε την απεικόνιση $f : X \to B$, με $f(x) = b_x$, η οποία επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα ομομορφισμό $f : F \to B$. Για τον ομομορφισμό f έχουμε $g(f(x)) = g(b_x) = h(x)$ για κάθε $x \in X$. Αν $y \in F$, τότε $y = \sum n_i x_i$, όπου $x_i \in X$, $n_i \in \mathbb{Z}$ και το σύμβολο $\sum$ δηλώνει ένα πεπερασμένο άθροισμα. Επομένως

$$\begin{aligned} g(f(y)) &= g\Big(f\big(\sum n_i x_i\big)\Big) = \sum n_i g(f(x_i)) \\ &= \sum n_i h(x_i) = h\big(\sum n_i x_i\big) \\ &= h(y), \end{aligned}$$

για κάθε $y \in F$, άρα $g \circ f = h$. □

Λήμμα 15.2.10. *Αν η F είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα, η B είναι αβελιανή ομάδα και $g : B \to F$ επιμορφισμός, τότε $B \simeq \operatorname{Ker} g \oplus F$.*

Απόδειξη: Από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός f, ώστε $g \circ f = i_F$, άρα η f είναι 1-1.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i_F} & F \\ f\big\downarrow & \nearrow_{g} & \\ B & & \end{array} .$$

Αν $b \in B$, τότε

$$b = \big(b - f(g(b))\big) + f(g(b)) \tag{15.10}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} g\big(b - f(g(b)\big) &= g(b) - g\big(f(g(b))\big) \\ &= g(b) - g(b) = 0, \end{aligned}$$

άρα $b - f(g(b)) \in \operatorname{Ker} g$, άρα, από την (15.10) συμπεραίνουμε ότι $B \simeq \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$. Έστω $a \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, άρα $g(a) = 0$ και υπάρχει $x \in F$, ώστε $a = f(x)$. Επομένως

$$\begin{aligned} g(f(x)) = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow a = f(0) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, επομένως $B \simeq \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f$. Επειδή η f είναι 1-1 έχουμε $\operatorname{Im} f \simeq F$. □

Πρόταση 15.2.11. *Κάθε υποομάδα B μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας A είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η $\{x_i, i \in I\}$ είναι μια βάση της A και ότι το σύνολο των δεικτών I είναι καλώς διατεταγμένο με την σχέση $<$. Για κάθε $k \in I$ ορίζουμε τις ομάδες $A_k = \bigoplus\limits_{i<k} \langle x_i \rangle$ και $A'_k = \bigoplus\limits_{i \leq k} \langle x_i \rangle$. Θέτουμε $B_k = B \cap A_k$ και $B'_k = B \cap A'_k$. Συνεπώς έχουμε $A = \bigcup\limits_{k \in I} A'_k$ και $B = \bigcup\limits_{k \in I} B'_k$. Επίσης έχουμε $B_k = B \cap A_k = B'_k \cap A_k$. Προφανώς οι A_k, A'_k, B_k και B'_k είναι υποομάδες της A. Έχουμε ότι $\frac{B'_k}{B_k} \simeq \frac{B'_k}{B'_k \cap A_k}$. Από το 2ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $\frac{B'_k}{B'_k \cap A_k} \simeq \frac{B'_k + A_k}{A_k}$, άρα $\frac{B'_k}{B_k} \simeq \frac{B'_k + A_k}{A_k}$ και, επειδή $B'_k + A_k \leq A'_k$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{B'_k + A_k}{A_k} \leq \frac{A'_k}{A_k}$, άρα η $\frac{B'_k}{B_k}$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $\frac{A'_k}{A_k}$, η οποία είναι ελεύθερη αβελιανή με έναν γεννήτορα, δηλαδή ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$. Επομένως $\frac{B'_k}{B_k} \simeq \langle h_k \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Έστω $\phi : B'_k \to B'_k / B_k$ ο φυσικός επιμορφισμός, τότε (λήμμα 15.2.10) έχουμε

$$B'_k \simeq \operatorname{Ker} \phi \oplus \langle h_k \rangle \simeq B_k \oplus \mathbb{Z}, \tag{15.11}$$

Θεωρούμε την ομάδα C, η οποία παράγεται από το σύνολο L των h_k που ορίσαμε προηγούμενα και υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $B \setminus C \neq \varnothing$. Για κάθε $h \in B \setminus C$ ονομάζουμε $r(h)$ τον μικρότερο από τους δείκτες k, για τους οποίους ισχύει $h \in B'_k$. Τέτοιος μικρότερος δείκτης υπάρχει, λόγω της καλής διάταξης του I. Ακολούθως θεωρούμε το σύνολο $J = \{r(h)/h \in B \setminus C\}$, το οποίο είναι μη κενό, άρα έχει μικρότερο στοιχείο, λόγω της καλής διάταξης του I. Ας πούμε το στοιχείο αυτό j. Έστω $h \in B \setminus C$, ώστε $r(h) = j$. Τότε από την (15.11) έχουμε , $h = a + mh_j$, όπου $a \in B_j$ και $m \in \mathbb{Z}$. Για το a έχουμε $a = h - mh_j \in B \setminus C$ και $r(a) < j$, άτοπο. Για να δείξουμε ότι η ομάδα B είναι ελεύθερη αβελιανή μένει να δείξουμε ότι το σύνολο L είναι "γραμμικώς ανεξάρτητο" σε σχέση με το $\mathbb{Z}$. Πράγματι έστω ότι $h_1, ..., h_n \in L$ και $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$, με $\sum m_i h_i = 0$. Αν για κάποιο m_i ισχύει $m_i \neq 0$, τότε $0 \neq m_i h_i \in \langle h_i \rangle \cap B_i = \{0\}$, άτοπο. Επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Στα επόμενα θα εξετάσουμε κάποιες έννοιες και προτάσεις από την ομολογική άλγεβρα, οι οποίες είναι εκ των ων ουκ άνευ για την ιδιάζουσα ομολογία τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 15.2.3. Έστω I ένα σύνολο με τις εξής ιδιότητες:

- $I \subseteq \mathbb{Z}$.
- |I|>2 και
- Αν $n \in I$, τότε ένα τουλάχιστον από τα $n-1$ ή $n+1$ ανήκει στο I.

Θεωρούμε την ακολουθία αβελιανών ομάδων $A_n, n \in I$ και την ακολουθία ομομορφισμών $\partial_n : A_n \to A_{n-1}$, ώστε για κάθε $n-1, n, n+1 \in I$ να ισχύει $\partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0}$.[4] Η ακολουθία ζευγών $(A_n, \partial_n), n \in I$ ονομάζεται **σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων**, ή απλώς, για λόγους συντομίας **σύμπλεγμα**, οι δε ομομορφισμοί ∂_n ονομάζονται **συνοριακοί ομομορφισμοί**.

Παρατήρηση: Εφεξής στις περισσότερες περιπτώσεις, για λόγους ευκολίας στη γραφή μπορούμε να παραλείπουμε τους δείκτες στους συνοριακούς ομομορφισμούς, γιατί η τάξη τους είναι προφανής. Δηλαδή αντί για ∂_n θα γράφουμε απλώς ∂. Τότε εννοείται ότι $\partial^2 = \partial \circ \partial = \partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0}$.

Πρόταση 15.2.12. *Αληθεύει η ισοδυναμία:*

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0} \Leftrightarrow \operatorname{Im} \partial_{n+1} \leq \operatorname{Ker} \partial_n.$$

Απόδειξη: Η συνεπαγωγή $\Leftarrow$, είναι προφανής. Για την απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής έχουμε

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} &\Rightarrow \exists \quad b \in A_{n+1}; a = \partial_{n+1}(b) \\ &\Rightarrow \partial_n(a) = (\partial_n \circ \partial_{n+1})(b) = \hat{0}(b) = 0 \\ &\Rightarrow a \in \operatorname{Ker} \partial_n, \end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$. □

Ορισμός 15.2.4. Έστω $A = (A_n, \partial_n), n \in I$ ένα σύμπλεγμα. Η ομάδα $Z_n(A) = \operatorname{Ker} \partial_n$ ονομάζεται **ομάδα των n-οστών κύκλων του συμπλέγματος** A και η ομάδα $B_n(A) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ ονομάζεται **ομάδα των n -οστών συνόρων του συμπλέγματος** A. Οι ομάδες A_n είναι αβελιανές, επομένως και οι ομάδες $Z_n(A)$, ως υποομάδες των A_n είναι αβελιανές. Επιπλέον οι ομάδες $B_n(A)$ είναι υποομάδες των αβελιανών ομάδων $Z_n(A)$, άρα κανονικές υποομάδες, επομένως έχουν νόημα οι ομάδες πηλίκα $H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$. Η ομάδα πηλίκο

$$H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$$

ονομάζεται **n-οστή ομάδα ομολογίας του συμπλέγματος** A και η ακολουθία $H_*(A) = H_n(A), n \in I$ ονομάζεται **ομολογία του συμπλέγματος** A.

Παραδείγματα 15.2.2.

1. Έστω το σύμπλεγμα $A = (A_n, \partial_n), n \in \mathbb{Z}$, με

[4] Με $\{0\}$ συμβολίζουμε την τετριμμένη ομάδα και με $\hat{0}$ τον μηδενικό ομομορφισμό μεταξύ των ομάδων A και B, δηλαδή $\hat{0}(a) = 0$ για κάθε $a \in A$.

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ \{0\}, & n < 0 \vee n > 1 \end{cases}.$$

Έχουμε:

$$\cdots A_2 \simeq \{0\} \xrightarrow{\partial_2} A_1 \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} A_0 \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} A_{-1} \simeq \{0\} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

Αναγκαστικά θα είναι $\partial_n = \hat{0}$ για κάθε $n \neq 1$. Ο ∂_1 είναι ένας ομομορφισμός του $\mathbb{Z}$ στον εαυτό του, επομένως, αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε ή $\partial_1(x) = 0$ ή $\partial_1(x) = x$ ή $\partial_1(x) = kx$, $k = 2, \ldots$. Σε κάθε περίπτωση είναι $\operatorname{Ker} \partial_0 = \mathbb{Z}$.

- Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\operatorname{Im} \partial_1 = \{0\}$, άρα
$$\begin{aligned} H_0(A) &= \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 \\ &\simeq \mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
- Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $\operatorname{Im} \partial_1 = \mathbb{Z}$, άρα
$$\begin{aligned} H_0(A) &= \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 \\ &\simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \{0\}. \end{aligned}$$
- Στην τρίτη περίπτωση έχουμε $\operatorname{Im} \partial_1 = k\mathbb{Z}$, άρα
$$\begin{aligned} H_0(A) &= \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 \\ &\simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_k. \end{aligned}$$

2. Έστω το σύμπλεγμα $B = (B_n, \partial_n), n \in \mathbb{Z}$, με $B_n = \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και με συνοριακούς ομομορφισμούς τους
$$\partial_n = \begin{cases} i_{\mathbb{Z}}, & n = 2k+1 \\ \hat{0}, & n = 2k \end{cases}.$$
Έχουμε
$$\cdots B_2 \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} B_1 \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} B_0 \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} B_{-1} \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$
Τότε
$$\begin{aligned} H_{2k+1}(B) &= \operatorname{Ker} \partial_{2k+1} / \operatorname{Im} \partial_{2k+2} \\ &\simeq \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}. \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} H_{2k}(B) &= \operatorname{Ker} \partial_{2k} / \operatorname{Im} \partial_{2k+1} \\ &\simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \{0\} \end{aligned}$$
άρα $H_n(B) \simeq \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

3. Έστω το σύμπλεγμα $C = (C_n, \partial_n), n \in \mathbb{Z}$, με $C_n = \mathbb{Z}$ και $\partial_n = \hat{0}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(C) &= \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} \\ &\simeq \mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

1. Τα στοιχεία της $H_n(A)$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας (σύμπλοκα). Για κάθε $a \in Z_n(A)$ έχουμε $H_n(A) \ni [a] = a + B_n(A) = \{a + b / b \in B_n(A)\}$. Το σύμπλοκο $[a]$ ονομάζεται **ομολογική κλάση** του a.
2. Αν σε ένα σύμπλεγμα $A = (A_n, \partial_n), n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $A_n = \{0\}$ για $n > r$, τότε η ομολογία $H_n(A)$ είναι τετριμμένη για $n \geq r+1$, επομένως μπορούμε να παραλείπουμε τους όρους A_n του συμπλέγματος για $n > r+1$. Στην περίπτωση που $A_n = \{0\}$ για $n < r$ παραλείπουμε τους όρους του συμπλέγματος για $n \leq r - 1$.

Ορισμός 15.2.5. Δύο n-κύκλοι a, b ονομάζονται **ομόλογοι** (συμβολισμός: $a \sim b$), αν και μόνον, αν ανήκουν στην ίδια ομολογική κλάση, δηλαδή, αν και μόνον, αν $a - b \in B_n(A)$, που σημαίνει ότι η διαφορά τους είναι το σύνορο μιας $(n+1)$-αλυσίδας.

Ορισμός 15.2.6. Έστωσαν $C = (C_n, \partial_n), n \in I$ και $D = (D_n, \delta_n), n \in I$, δύο συμπλέγματα. Μια ακολουθία $f = f_n, n \in I$ ομομορφισμών $f_n : C_n \to D_n$ λέγεται **ακολουθία αλυσιδωτών ομομορφισμών** από το σύμπλεγμα C στο σύμπλεγμα D, αν, και μόνον, αν για κάθε $n \in I$ το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n \\ {\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ D_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & D_n \end{array}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $\delta \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial$.

Προφανώς η ακολουθία των ταυτοτικών ομομορφισμών $i_n : A_n \to A_n$ είναι μία ακολουθία αλυσιδωτών ομομορφισμών του συμπλέγματος (A_n, ∂_n), $n \in I$ στον εαυτό του.

Αν η f_n είναι ακολουθία αλυσιδωτών ομομορφισμών, τότε

$$\begin{aligned} a \in Z_n(C) &\Rightarrow \partial(a) = 0 \\ &\Rightarrow f_{n-1}(\partial(a)) = 0 \\ &\Rightarrow \delta(f_n(a)) = 0 \\ &\Rightarrow f_n(a) \in Z_n(D)\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή η f_n απεικονίζει τους n-κύκλους του C σε n -κύκλους του D. Επίσης

$$\begin{aligned} b \in B_n(C) &\Rightarrow \exists c \in C_{n+1}; b = \partial(c) \\ &\Rightarrow f_n(b) = f_n(\partial(c)) = \delta(f_{n+1}(c)) \\ &\Rightarrow f_n(b) \in B_n(D)\,, \end{aligned}$$

επειδή η $f_{n+1}(c)$ είναι $(n+1)$- αλυσίδα του D. Δηλαδή ο ομομορφισμός f_n απεικονίζει τα n-σύνορα του C σε n-σύνορα του D. Έστω ότι $[a],[b] \in H_n(C)$, τότε

$$\begin{aligned}
[a]=[b] &\Rightarrow a,b \in Z_n(C) \wedge a-b \in B_n(C)\\
&\Rightarrow f_n(a), f_n(b) \in Z_n(D) \wedge f_n(a)-f_n(b)=f_n(a-b) \in B_n(D)\\
&\Rightarrow f_n(a), f_n(b) \in Z_n(D) \wedge f_n(a)-f_n(b) \in B_n(D)\\
&\Rightarrow [f_n(a)],[f_n(b)] \in H_n(D) \wedge [f_n(a)]=[f_n(b)]\,,
\end{aligned}$$

άρα η ακολουθία απεικονίσεων $(f_n)_*: H_n(A) \to H_n(B)$, με $(f_n)_*([a]) = [f_n(a)]$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον

Πρόταση 15.2.13. *Η απεικόνιση $(f_n)_*$ είναι για κάθε $n \in I$ ένας ομομορφισμός.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
(f_n)_*([a]+[b]) &= (f_n)_*([a+b])\\
&= [f_n(a+b)]\\
&= [f_n(a)+f_n(b)]\\
&= [f_n(a)]+[f_n(b)]\\
&= (f_n)_*([a])+(f_n)_*([b])\,.
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 15.2.7. Για κάθε $n \in I$, ο ομομορφισμός $(f_n)_*$ ονομάζεται **ο επαγόμενος** από την f_n ομολογικός ομομορφισμός από την $H_n(A)$ στην $H_n(B)$.

Πρόταση 15.2.14. *Έστωσαν*

α΄) Τα συμπλέγματα A, B και C.

β΄) Οι ακολουθίες αλυσιδωτών ομομορφισμών $f_n : A_n \to B_n, g_n : B_n \to C_n$ και $g_n \circ f_n : A_n \to B_n, n \in I$.

Τότε για κάθε $n \in I$ ισχύει: $(g_n \circ f_n)_* = (g_n)_* \circ (f_n)_*$.

Απόδειξη: Έστω $[a] \in H_n(A)$, τότε

$$\begin{aligned}
(g_n \circ f_n)_*([a]) &= [(g_n \circ f_n)([a])]\\
&= [g_n(f_n(a))]\\
&= (g_n)_*([f_n(a)])\\
&= (g_n)_*\big((f_n)_*([a])\big)\\
&= \big((g_n)_* \circ (f_n)_*\big)([a])\,.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 15.2.15. *Αν A είναι ένα σύμπλεγμα και $i_n : A_n \to A_n, n \in \mathbb{Z}$ ο ταυτοτικός ομομορφισμός, τότε για κάθε $n \in I$ ο ομομορφισμός $(i_n)_* : H_n(A) \to H_n(A)$ είναι ο ταυτοτικός.*

Απόδειξη: Έστω $[a] \in H_n(A)$, τότε $(i_n)_*([a]) = [i_n(a)] = [a]$. □

Ορισμός 15.2.8. Έστω ότι το I και οι ∂_n είναι όπως στον ορισμό 15.2.3. Αν για κάθε $n \in I$, με $n+1 \in I$ ισχύει

$$\operatorname{Ker} \partial_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1},$$

τότε η ακολουθία των ομομορφισμών $\partial_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$ λέγεται **ακριβής ακολουθία**.

Παρατήρηση: Ειδικά η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\}$$

ονομάζεται **βραχεία ακριβής**. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ και $\operatorname{Im} g = C$.

Πρόταση 15.2.16. *Η ακολουθία των συνοριακών ομομορφισμών ενός συμπλέγματος $A = (A_n, \partial_n)$, $n \in I$ είναι ακριβής, αν και μόνον, αν για κάθε $n \in I$ ισχύει $H_n(A) = \{0\}$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο: Έχουμε $H_n(A) = \operatorname{Ker} f_n / \operatorname{Im} f_{n+1} \simeq \{0\}$.
Το ικανό: Έχουμε $\operatorname{Im} f_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} f_n$. Αν $\operatorname{Im} f_{n+1} \subset \operatorname{Ker} f_n$, τότε υπάρχει $a \in \operatorname{Ker} f_n \backslash \operatorname{Im} f_{n+1}$, άρα $a + \operatorname{Im} f_{n+1} = [a] \neq [0]$, άρα $\operatorname{Ker} f_n / \operatorname{Im} f_{n+1} \neq \{0\}$, άτοπο. Συνεπώς $\operatorname{Im} f_{n+1} = \operatorname{Ker} f_n$, άρα $H_n(A) = \{0\}$. □

Σχόλιο: Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι οι ομάδες ομολογίας ενός συμπλέγματος είναι ένα μέτρο της απόστασης από το οι συνοριακοί ομομορφισμοί του συμπλέγματος να αποτελούν ακριβή ακολουθία.

Πρόταση 15.2.17. *Η ακολουθία $\{0\} \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής, αν και μόνον, αν η f είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 15.2.18. *Η ακολουθία $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \{0\}$ είναι ακριβής, αν και μόνον, αν η f είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση: Αν η ακολουθία $\{0\} \to A \to B \to \{0\}$ είναι ακριβής, τότε $A \simeq B$.

Παραδείγματα 15.2.3.

1. Η ακολουθία $\{0\} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{r} \{0\}$, όπου $f(x) = 2x$ και $g(x) = x(\text{mod}2)$ είναι βραχεία ακριβής.

2. Γενικά, αν A, B είναι δύο αβελιανές ομάδες και $f : A \to B$ ένας ομομορφισμός, τότε η ακολουθία $\{0\} \xrightarrow{h} \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{r} \{0\}$ είναι βραχεία ακριβής.

3. Αν A, B είναι αβελιανές ομάδες, τότε η ακολουθία $\{0\} \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} A \oplus B \xrightarrow{g} B \xrightarrow{r} \{0\}$, όπου $f(a) = (a, 0)$ και $g(a, b) = b$ είναι βραχεία ακριβής, γιατί

$$\begin{aligned}(a,b) \in \operatorname{Ker} g &\Leftrightarrow g(a,b) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in \operatorname{Im} f,\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Το ότι οι ομομορφισμοί h, r είναι 1-1 και επί, αντιστοίχως είναι προφανές.

4. Έστω

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\phi} D \xrightarrow{g} E$$

μία ακριβής ακολουθία, τότε $C \simeq \{0\}$, αν και μόνον, αν η f είναι επί και η g είναι 1-1. Πράγματι

Το αναγκαίο: Είναι $A \xrightarrow{f} B \to \{0\}$, άρα η f είναι επί. Επίσης είναι $\{0\} \to D \xrightarrow{g} E$, άρα η g είναι 1-1.

Το ικανό: Η f είναι επί, άρα $\operatorname{Im} f = B$. Από την δεδομένη ακριβή ακολουθία έχουμε $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} f = B$ και $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \phi = \{0\}$. Από την $\operatorname{Im} \phi = \{0\}$, συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Ker} \phi = C$. Από την $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Im} h$, συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Im} h = C$. Επομένως, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} h \simeq B/\operatorname{Ker} h &\Rightarrow C \simeq B/\operatorname{Ker} h \\ &\Rightarrow C \simeq B/B \\ &\Rightarrow C \simeq \{0\},\end{aligned}$$

άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

5. Αν στην παρακάτω ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} A_n \xrightarrow{h_n} B_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} B_{n-1} \to \cdots$$

οι ομομορφισμοί h_n είναι για κάθε n ισομορφισμοί, τότε $C_n = \{0\}$ για κάθε n. Πράγματι, επειδή οι ομομορφισμοί h_n είναι ισομορφισμοί θα έχουμε $\operatorname{Ker} h_k = \{0\}$ και $\operatorname{Im} h_n = B_n$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας έχουμε $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} h_n = B_n$, άρα, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε $\operatorname{Im} f_n \simeq B_n/\operatorname{Ker} f_n$, δηλαδή $\operatorname{Im} f_n = \{0\}$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας έχουμε $\{0\} = \operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} g_n$ και $\operatorname{Ker} h_{n-1} = \operatorname{Im} g_n = \{0\}$. Άρα από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε

$$C_n \simeq C_n/\operatorname{Ker} g_n \simeq \operatorname{Im} g_n \simeq \{0\}.$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

6. Αν οι ακολουθίες

$$\{0\} \to A_i \xrightarrow{\phi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i \to \{0\}$$

είναι για κάθε $i \in I$ βραχείες ακριβείς, τότε η ακολουθία

$$\{0\} \to \bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i\in I} B_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i\in I} C_i \to \{0\},$$

όπου $\phi(\sum a_i) = \sum \phi_i(a_i)$ και $\psi(\sum b_i) = \sum \psi_i(b_i)$ είναι βραχεία ακριβής.
Η απόδειξη του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Στην πρόταση που ακολουθεί εισάγεται η έννοια του συνδετικού ομομορφισμού, η οποία είναι βασικό εργαλείο στην απόδειξη των προτάσεων της θεωρίας της ομολογίας.

Πρόταση 15.2.19. *Έστωσαν τα συμπλέγματα $A = (A_n, \delta_n)$, $B = (B_n, \partial_n)$, $C = (C_n, \eta_n)$, $n \in I$ και οι ακολουθίες αλυσιδωτών ομομορφισμών $i_n : A_n \to B_n$, $p_n : B_n \to C_n$. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $0 \to A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \to 0$ είναι βραχείες ακριβείς για κάθε $n \in I$.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & A_n & \xrightarrow{\delta} & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle i_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-2}} & & \\
B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots, \\
\downarrow{\scriptstyle p_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_n} & & \downarrow{\scriptstyle p_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{n-2}} & & \\
C_{n+1} & \xrightarrow{\eta} & C_n & \xrightarrow{\eta} & C_{n-1} & \xrightarrow{\eta} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & &
\end{array}$$

τότε η απεικόνιση

$$d_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A), \text{ με } d_n([z]) = [i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z)))]$$

είναι για κάθε n ομομορφισμός.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς πρέπει να αποδείξουμε ότι η d_n είναι καλώς ορισμένη.
Αν $[z] \in H_n(C)$ αρκεί να δείξουμε ότι το $d_n([z])$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Αν $[z] \in H_n(C)$, τότε $z \in C_n$ και $\eta(z) = 0$. Επιπλέον, επειδή η p_n είναι επί υπάρχει $y \in B_n$, ώστε $z = p_n(y)$, άρα

$$\begin{aligned}
0 &= \eta(p_n(y)) \\
&= p_{n-1}(\partial(y)) \\
&\Rightarrow \partial(y) \in \operatorname{Ker} p_{n-1} = \operatorname{Im} i_{n-1}\,,
\end{aligned}$$

άρα υπάρχει $x \in A_{n-1}$, ώστε $i_{n-1}(x) = \partial(y)$. Επειδή η i_n είναι 1-1 έχουμε $x = i_{n-1}^{-1}(\partial(y)) = i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z)))$. Αλλά το $p_n^{-1}(z)$ δεν είναι απαραίτητα, μονοσήμαντα ορισμένο, επομένως

πρέπει να δείξουμε ότι, αν $y' \in B_n$, με $p_n(y') = p_n(y) = z$, τότε $x' = i_{n-1}^{-1}(\partial(y')) \sim x = i_{n-1}^{-1}(\partial(y))$. Κατ' αρχάς έχουμε

$$\begin{aligned} i_{n-1}(x) = \partial(y) &\Rightarrow \partial(i_{n-1}(x)) = \partial(\partial(y)) = 0 \\ &\Rightarrow i_{n-2}(\delta(x)) = \partial(i_{n-1}(x)) = 0(*) \\ &\Rightarrow \delta(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in Z_{n-1}(A)\,. \end{aligned}$$

((*): Γιατί η i_{n-2} είναι 1-1).

Ομοίως έχουμε $x' \in Z_{n-1}(A)$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} p_n(y') = p_n(y) = z &\Rightarrow p_n(y') - p_n(y) = 0 \\ &\Rightarrow p_n(y' - y) = 0 \\ &\Rightarrow y' - y \in \operatorname{Ker} p_n = \operatorname{Im} i_n\,, \end{aligned}$$

άρα υπάρχει $a \in A_n$, με $y' - y = i_n(a)$. Τότε

$$\begin{aligned} i_{n-1}(x + \delta(a)) &= i_{n-1}(x) + i_{n-1}(\delta(a)) \\ &= \partial(y) + \partial(i_n(a)) \\ &= \partial(y + i_n(a)) \\ &= \partial(y') = i_{n-1}(x') \\ &\Rightarrow i_{n-1}(x - x' + \delta(a)) = 0 \end{aligned}$$

και, επειδή η i_{n-1} είναι 1-1 έχουμε

$$\begin{aligned} x - x' + \delta(a) = 0 &\Rightarrow x' - x = \delta(a) \\ &\Rightarrow x' - x \in B_{n-1}(A) \\ &\Rightarrow x' \sim x\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση $d_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ είναι καλώς ορισμένη.

$$\begin{array}{ccc} & & A_{n-1} \\ & & \uparrow{\scriptstyle i_{n-1}^{-1}} \\ B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \\ \uparrow{\scriptstyle p_n^{-1}} & & \\ C_n & & \end{array}$$

Στο επόμενο βήμα, πρέπει να αποδείξουμε ότι η d_n είναι ομομορφισμός. Πράγματι, έστω ότι $d_n([z_1]) = [x_1]$ και $d_n([z_2]) = [x_2]$. Τότε

$$\begin{aligned} x_1 = i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z_1))) \wedge x_2 = i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z_2))) \\ \Rightarrow i_{n-1}(x_1) = \partial(p_n^{-1}(z_1)) \wedge i_{n-1}(x_2) = \partial(p_n^{-1}(z_2)) \\ \Rightarrow i_{n-1}(x_1 + x_2) = \partial(p_n^{-1}(z_1 + z_2)) \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z_1 + z_2))). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} d_n([z_1 + z_2]) &= [x_1 + x_2] \\ &= [x_1] + [x_2] = d_n([z_1]) + d_n([z_2])\,, \end{aligned}$$

άρα η απεικόνιση d_n είναι ομομορφισμός. □

Ορισμός 15.2.9. Οι ομομορφισμοί d_n, όπως ορίστηκαν στην αμέσως προηγούμενη πρόταση ονομάζονται **συνδετικοί ομομορφισμοί**.

Οι συνδετικοί ομομορφισμοί είναι μία έννοια της ομολογικής άλγεβρας, την οποία θα βρίσκουμε σχεδόν παντού στην ιδιάζουσα ομολογία τοπολογικών χώρων. Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν είναι θεμελιώδεις για την ιδιάζουσα ομολογία, γιατί σ' αυτές στηρίζονται τα βασικά θεωρήματα της σχετικής ομολογίας.

Πρόταση 15.2.20. ***(Θεώρημα ακριβούς τριγώνου)*** *Έστωσαν τα συμπλέγματα $A = (A_n, \delta_n)$, $B = (B_n, \partial_n)$ και $C = (C_n, \eta_n)$, με $n \in I$. Αν για κάθε n η ακολουθία $\{0\} \to A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \to \{0\}$, όπου i_n, p_n ακολουθίες αλυσιδωτών απεικονίσεων, είναι βραχεία ακριβής, τότε η ακολουθία*

$$\cdots H_n(A) \xrightarrow{(i_n)_*} H_n(B) \xrightarrow{(p_n)_*} H_n(C) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(i_{n-1})_*} H_{n-1}(B) \cdots$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Για διευκόλυνση του αναγνώστη στη μελέτη της απόδειξης, παραθέτουμε εκ νέου το μεταθετικό διάγραμμα της προηγούμενης πρότασης

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & A_n & \xrightarrow{\delta} & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle i_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-2}} & & \\
B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots\,, \\
\downarrow{\scriptstyle p_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_n} & & \downarrow{\scriptstyle p_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{n-2}} & & \\
C_{n+1} & \xrightarrow{\eta} & C_n & \xrightarrow{\eta} & C_{n-1} & \xrightarrow{\eta} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & &
\end{array}$$

- Έστω $[x] \in H_n(A)$, τότε

$$
\begin{aligned}
p_n(i_n(x)) = 0 &\Rightarrow \big[p_n(i_n(x))\big] = [0] \\
&\Rightarrow (p_n)_*\big[i_n(x)\big] = [0] \\
&\Rightarrow (p_n)_*\big(i_*^n([x])\big) = [0] \\
&\Rightarrow (i_n)_*([x]) \in \operatorname{Ker} p_*^n\,,
\end{aligned}
$$

άρα

$$\operatorname{Im}(i_n)_* \subseteq \operatorname{Ker}(p_n)_*. \tag{15.12}$$

Έστω $[y] \in \operatorname{Ker}(p_n)_*$, τότε $[0] = (p_n)_*([y]) = \big[p_n(y)\big]$, άρα $p_n(y) \in B_n(C)$, άρα υπάρχει $z \in C_{n+1}$, ώστε $\eta(z) = p_n(y)$. Επειδή η p_{n+1} είναι επί, θα έχουμε $z = p_{n+1}(y')$ για κάποιο $y' \in B_{n+1}$, άρα

$$
\begin{aligned}
p_n(y) = \eta(p_{n+1}(y')) = p_n(\partial(y')) &\Rightarrow p_n(y - \partial(y')) = 0 \\
&\Rightarrow y - \partial(y') \in \operatorname{Ker} p_n
\end{aligned}
$$

και, επειδή $\operatorname{Ker} p_n = \operatorname{Im} i_n$, υπάρχει $x \in A_n$, ώστε $y - \partial(y') = i_n(x)$.
Έχουμε ότι $[y] \in H_n(B)$, άρα $\partial(y) = 0$, επομένως

$$
\begin{aligned}
\partial(y - \partial(y')) &= \partial(y) - \partial(\partial(y')) \\
&= 0 - 0 = 0 \\
&\Rightarrow i_{n-1}(\delta(x)) = \partial(i_n(x)) = 0.
\end{aligned}
$$

και, επειδή ο i_{n-1} είναι 1-1 έχουμε $\delta(x) = 0$, άρα $[x] \in H_n(A)$. Επιπλέον,

$$
\begin{aligned}
y \in Z_n(B) \wedge y - \partial(y') \in Z_n(B) \wedge y - \big(y - \partial(y')\big) = \partial(y') \in B_n(B) \\
&\Rightarrow y \sim y - \partial(y') \\
&\Rightarrow [y] = [y - \partial(y')] = [i_n(x)] = (i_n)_*([x]) \\
&\Rightarrow [y] \in \operatorname{Im}(i_n)_*,
\end{aligned}
$$

συνεπώς

$$\operatorname{Im}(i_n)_* \supseteq \operatorname{Ker}(p_n)_* \tag{15.13}$$

Από τις (15.12) και (15.13), έπεται ότι:

$$\operatorname{Im}(i_n)_* = \operatorname{Ker}(p_n)_*.$$

- Έστω $[y] \in H_n(B)$, άρα $\partial(y) = 0$. Είναι

$$\begin{aligned} d_n((p_n)_*([y])) &= d_n([p_n(y)]) \\ &= [i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(p_n(y))))] \\ &= [i_{n-1}^{-1}(\partial(y))] \\ &= [i_{n-1}^{-1}(0)] = 0 \\ &\Rightarrow (p_n)_*\big([y]\big) \in \operatorname{Ker} d_n, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\operatorname{Im}(p_n)_* \subseteq \operatorname{Ker} d_n. \tag{15.14}$$

Έστω $[z] \in \operatorname{Ker} d_n$, τότε

$$\begin{aligned} d_n([z]) = [0] &\Rightarrow i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z))) \in B_{n-1}(A) \\ &\Rightarrow i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z))) = x = \delta(x') \wedge x' \in A_n \\ &\Rightarrow \partial(p_n^{-1}(z)) = i_{n-1}(x) = i_{n-1}(\delta(x')) = \partial(i_n(x')) \\ &\Rightarrow \partial(p_n^{-1}(z) - i_n(x')) = 0 \\ &\Rightarrow [p_n^{-1}(z) - i_n(x')] \in H_n(B) \wedge (p_n)_*([p_n^{-1}(z) - i_n(x')]) = [z]\,, \end{aligned}$$

γιατί $p_n(p_n^{-1}(z) - i_n(x')) = p_n(p_n^{-1}(z)) - p_n(i_n(x')) = z - 0 = z$, συνεπώς

$$\operatorname{Im}(p_n)_* \supseteq \operatorname{Ker} d_n \tag{15.15}$$

Από τις (15.14) και (15.15), έπεται ότι:

$$\operatorname{Im}(p_n)_* = \operatorname{Ker} d_n.$$

- Έστω $[z] \in H_n(C)$, τότε $d_n([z]) = [i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z)))]$. Έχουμε $i_{n-1}(i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(z)))) = \partial(p_n^{-1}(z))$, άρα $(i_{n-1})_*\big(d_n([z])\big) = [\partial(p_n^{-1}(z))]$ και, επειδή $\partial\big(p_n^{-1}(z)\big) \in B_{n-1}(B)$ έχουμε $(i_{n-1})_*\big(d_n([z])\big) = [0]$, άρα $d_n([z]) \in \operatorname{Ker}(i_n)_*$, συνεπώς

$$\operatorname{Im} d_n \subseteq \operatorname{Ker} i_*^{n-1} \tag{15.16}$$

Έστω $[x] \in \operatorname{Ker}(i_{n-1})_*$, άρα $(i_{n-1})_*([x]) = [0]$, άρα $[i_{n-1}(x)] = [0]$, άρα $i_{n-1}(x) \in B_{n-1}(B)$, άρα $i_{n-1}(x) = \partial(y)$ για κάποιο $y \in B_n$, άρα

$$\begin{aligned} 0 = p_{n-1}(i_{n-1}(x)) &= p_{n-1}(\partial(y)) \\ &= \eta(p_n(y)) \\ &\Rightarrow [p_n(y)] \in H_n(C)\,. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} d_n([p_n(y)]) &= [i_{n-1}^{-1}(\partial(p_n^{-1}(p_n(y))))] \\ &= [i_{n-1}^{-1}(i_{n-1}(x))] = [x] \\ &\Rightarrow [x] \in \operatorname{Im} d_n \,, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\operatorname{Im} d_n \supseteq \operatorname{Ker} i_*^{n-1} \tag{15.17}$$

Από τις (15.16) και (15.17), έπεται ότι

$$\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Ker} i_*^{n-1}.$$

□

Πρόταση 15.2.21. *Έστωσαν* $(A = A_n, \delta_n), B = (B_n, \partial_n)$, $C = (C_n \eta_n)$, $A' = (A'_n \delta'_n)$, $B' = (B'_n, \partial'_n)$, $C' = (C'_n, \eta'_n)$, $n \in I$ *συμπλέγματα αβελιανών ομάδων* ($n \in I$)*. Αν το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες είναι ακριβείς και οι* f_1, f_2 *και* f_3 *είναι ακολουθίες αλυσιδωτών ομομορφισμών,*

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{p_n} & C_n & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_2^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_3^n} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{q_n} & C'_n & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

είναι μεταθετικό, τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots H_n(A) & \xrightarrow{(i_n)_*} & H_n(B) & \xrightarrow{(p_n)_*} & H_n(C) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(A) \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle (f_1^n)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f_2^n)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f_3^n)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f_1^{n-1})_*} \\ \cdots H_n(A') & \xrightarrow{(j_n)_*} & H_n(B') & \xrightarrow{(q_n)_*} & H_n(C') & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(A') \cdots \end{array},$$

είναι επίσης μεταθετικό. Οι ομομορφισμοί $(i_n)_*$, $(p_n)_*, (j_n)_*$ *και* $(q_n)_*$ *είναι οι επαγόμενοι από τους ομομορφισμούς* i_n, p_n, j_n *και* q_n*, αντιστοίχως. Η ακολουθίες των ομομορφισμών* $(f_1^n)_*, (f_2^n)_*, (f_3^n)_*$ *είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί από τις ακολουθίες αλυσιδωτών ομομορφισμών* f_1^n, f_2^n, f_3^n*, αντιστοίχως και* d_n, d'_n*, οι αντίστοιχοι συνδετικοί ομομορφισμοί.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} j_n \circ f_1^n &= f_2^n \circ i_n \\ \Rightarrow (j_n)_* \circ (f_1^n)_* &= (f_2^n)_* \circ (i_n)_* \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f_3^n \circ p_n &= q_n \circ f_2^n \\ \Rightarrow (f_3^n)_* \circ (p_n)_* &= (q_n)_* \circ (f_2^n)_* \,. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε τη μεταθετικότητα στο τρίτο τετράγωνο. Τους συνοριακούς ομομορφισμούς των συμπλεγμάτων B, B', τους συμβολίζουμε με τα γράμματα ∂, ∂', αντιστοίχως. Αν $[z] \in H_n(C)$, επειδή η p_n είναι επί $[z] = [p_n(y)]$ για κάποιο $y \in B_n$. Επομένως

$$\begin{aligned}(f_1^{n-1})_*(d_n([z]) &= (f_1^{n-1})_*(d_n([p_n(y)])) \\ &= \left(f_1^{n-1}\right)\Big([i_{n-1}^{-1}\big(\partial(p_n^{-1}(p_n(y)))\big)]\Big) \\ &= [f_1^{n-1}(i_{n-1}^{-1}(\partial(y)))] \\ &= [j_{n-1}^{-1}(f_2^{n-1}(\partial(y)))] \\ &= [j_{n-1}^{-1}(\partial'(f_2^n(y)))].\end{aligned}$$

(Η προτελευταία ισότητα ισχύει, επειδή $j_{n-1} \circ f_1^{n-1} = f_2^{n-1} \circ i_{n-1}$, άρα $f_1^{n-1} \circ i_{n-1}^{-1} = j_{n-1}^{-1} \circ f_2^{n-1}$ και η τελευταία ισότητα ισχύει, επειδή ο f_2 είναι αλυσιδωτός ομομορφισμός, άρα $f_2^{n-1}(\partial(y)) = \partial'(f_2^n(y)))$
Έχουμε $f_2^n(y) = q_n^{-1}(z')$ για κάποιο $z' \in C_n$, άρα

$$\begin{aligned}\big((f_1^{n-1})_* \circ d_n\big)([z]) &= (f_1^{n-1})_*(d_n([z])) \\ &= [j_{n-1}^{-1}(\partial'(q_n^{-1}(z')))] \\ &= d'_n([z']) = d'_n([q_n(f_2^n(y))]) \\ &= d'_n([f_3^n(p_n(y))]) \\ &= \big(d'_n \circ (f_3^n)_*\big)([z]) .\end{aligned}$$

Άρα

$$(f_1^{n-1})_* \circ d_n = d'_n \circ (f_3^n)_*,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Ορισμός 15.2.10. Λέμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\}$$

διασπάται, αν και μόνον, αν το $\operatorname{Im} f$ είναι ένας ευθύς προσθετέος της ομάδας B, δηλαδή υπάρχει υποομάδα D της B, ώστε

$$B = \operatorname{Im} f \oplus D.$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η παραπάνω βραχεία ακριβής ακολουθία διασπάται, τότε από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών στις ομάδες έχουμε

$$\begin{aligned}C \simeq B/\operatorname{Ker} g \Rightarrow C &\simeq B/\operatorname{Im} f \\ &\simeq \operatorname{Im} f \oplus D/\operatorname{Im} f \\ &\simeq \{0\} \oplus D \\ &\simeq D .\end{aligned}$$

δηλαδή $D \simeq C$.

Πρόταση 15.2.22. ***(Λήμμα διάσπασης)*** *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\},$$

διασπάται

β΄) Υπάρχει ομομορφισμός $k : B \to A$, *ώστε* $k \circ f = i_A$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & B & & & \\ & & \nearrow^{f} & \downarrow \simeq & \searrow^{g} & & \\ \{0\} & \longrightarrow A & & & & C \longrightarrow & \{0\} \\ & & \searrow & \downarrow & \nearrow & & \\ & & & A \oplus C & & & \end{array}$$

Απόδειξη: α') ⇒ β'): Υπάρχει υποομάδα D της B, ώστε $B = \operatorname{Im} f \oplus D$. Κάθε $b \in B \setminus \{0\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $b = x+y$, με $x \in \operatorname{Im} f$ και $y \in D$. Θεωρούμε την απεικόνιση $k : B \to A$, ώστε $k(b) = \begin{cases} f^{-1}(x), & b = x + y \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$. Η απεικόνιση k είναι καλώς ορισμένη, γιατί η f, επειδή η ακολουθία είναι ακριβής είναι 1-1.

- Αν $b = x + y \neq 0$ και $b' = 0$, τότε $k(b + b') = x = x + 0 = k(b) + k(b')$.
- Αν $b = x+y \neq 0$ και $b' = x'+y' \neq 0$, με $x, x' \in \operatorname{Im} f$ και $y, y' \in D$, τότε, προφανώς $b + b' \neq 0$, άρα

$$\begin{aligned} k(b + b') &= k(x + x' + y + y') \\ &= f^{-1}(x + x') = z \\ &\Rightarrow f(z) = x + x' . \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = w \wedge f^{-1}(x') = w' &\Rightarrow x = f(w) \wedge x' = f(w') \\ &\Rightarrow x + x' = f(w) + f(w') = f(w + w') \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) + f^{-1}(x') = f^{-1}(x + x') \\ &\Rightarrow k(b + b') = k(b) + k(b') . \end{aligned}$$

Επομένως η k είναι ένας ομομορφισμός. Έστω $x \in A \setminus \{0\}$, τότε

$$\begin{aligned} \big(k \circ f\big)(x) &= k(f(x)) \\ &= f^{-1}\big(f(x)\big) = x \end{aligned}$$

και, επειδή $k(f(0)) = 0$ θα έχουμε $k \circ f = i_A$.
β') ⇒ α'): Έστω $b \in B$, τότε

$$b = (b - f(k(b)) + f(k(b)). \tag{15.18}$$

Προφανώς $f(k(b)) \in \operatorname{Im} f$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} k(b - f(k(b))) &= k(b) - k(f(k(b))) \\ &= k(b) - k(b) = 0 \\ &\Rightarrow b - f(k(b)) \in \operatorname{Ker} k \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} b \in \operatorname{Ker} k \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow &\big(b = f(a) \wedge a \in A\big) \\ &\wedge \big(0 = k(b) = k(f(a)) = a\big) \\ &\Rightarrow b = f(a) = f(0) = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{Ker} k \cap \operatorname{Im} f \subseteq \{0\}, \end{aligned}$$

Το $\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} k \cap \operatorname{Im} f$ είναι προφανές, άρα

$$\operatorname{Ker} k \cap \operatorname{Im} f = \{0\}. \tag{15.19}$$

Από τις (15.18) και (15.19), συμπεραίνουμε ότι $B = kerk \oplus \operatorname{Im} f$, επομένως η B διασπάται. ☐

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το ότι: Αν η ακολουθία $\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\}$ είναι βραχεία ακριβής και υπάρχει ομομορφισμός $k : B \to A$, ώστε $k \circ f = i_A$, τότε $\operatorname{Ker} k \simeq C$.

Το λήμμα Barratt-Whitehead που ακολουθεί είναι μια τεχνική πρόταση απαραίτητη για την απόδειξη του θεωρήματος Mayer-Vietoris, το οποίο είναι ένα από τα σημαντικά θεωρήματα της αλγεβρικής τοπολογίας.

Πρόταση 15.2.23. ***(Λήμμα Barratt-Whitehead)*** *Αν το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{h_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n & \xrightarrow{h_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle a_n} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle a_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{n-1}} & & \\ \cdots & \xrightarrow{h'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{f'_n} & B'_n & \xrightarrow{g'_n} & C'_n & \xrightarrow{h'_n} & A'_{n-1} & \xrightarrow{f'_{n-1}} & B'_{n-1} & \xrightarrow{g'_{n-1}} & \cdots \end{array}$$

είναι μεταθετικό, οι οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς και οι απεικονίσεις γ_n ισομορφισμοί, τότε η ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} B'_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{\varphi_n} B'_n \xrightarrow{\Delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots,$$

όπου

$$\Delta_n = h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g'_n,$$

$$A_n \ni x \mapsto \psi_n(x) = (a_n(x), f_n(x)) \in A'_n \oplus B_n$$

και

$$A'_n \oplus B_n \ni (x,y) \mapsto \varphi_n(x,y) = f'_n(x) - \beta_n(y)$$

είναι ακριβής.

$$\begin{array}{ccc} & C_n & \xrightarrow{h_n} A_{n-1} \\ & \uparrow{\scriptstyle \gamma_n^{-1}} & \\ B'_n & \xrightarrow{g'_n} C'_n & \end{array}$$

Απόδειξη:

- Έχουμε $z \in \operatorname{Im}\Delta_{n+1}$, άρα $z = \Delta_{n+1}(x)$ για κάποιο $x \in B'_{n+1}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} f_n \circ \Delta_{n+1} &= f_n \circ h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} \\ &= \hat{0} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} = \hat{0} \end{aligned}$$

($f_n \circ h_{n+1} = \hat{0}$, από την ακρίβεια της πάνω ακολουθίας) και

$$\begin{aligned} a_n \circ \Delta_{n+1} &= a_n \circ h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} \\ &= h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} \\ &= h'_{n+1} \circ g'_{n+1} = \hat{0} \end{aligned}$$

(Από τη μεταθετικότητα των διαγραμμάτων έχουμε $a_n \circ h_{n+1} = h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1}$. Επιπλέον $h'_{n+1} \circ g'_{n+1} = 0$, επειδή η κάτω ακολουθία είναι ακριβής), άρα

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Im}\Delta_{n+1} &\Rightarrow \psi_n(z) = ((a_n \circ \Delta_{n+1})(x), (f_n \circ \Delta_{n+1})(x)) = (0,0) \\ &\Rightarrow z \in \operatorname{Ker}\psi_n\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\operatorname{Im}\Delta_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\psi_n \tag{15.20}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}\psi_n &\Rightarrow a_n(x) = f_n(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} a_n \cap \operatorname{Ker} f_n\,. \end{aligned}$$

Από το $x \in \operatorname{Ker} f_n$, επειδή $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} h_{n+1}$ έχουμε ότι $x = h_{n+1}(z)$ για κάποιο $z \in C_{n+1}$.

Επιπλέον, η γ_{n+1}^{-1} είναι επί, άρα $z = \gamma_{n+1}^{-1}(z')$ για κάποιο $z' \in C_{n+1}$, άρα $x = (h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z')$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 = a_n(x) &= (a_n \circ h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z') \\ &= (h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z') = h'_{n+1}(z') \\ &\Rightarrow z' \in \operatorname{Ker} h'_{n+1} = \operatorname{Im} g'_{n+1} \\ &\Rightarrow z' = g'_{n+1}(w) \wedge w \in B'_{n+1} \\ &\Rightarrow x = h_{n+1}(z) = (h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1})(w) = \Delta_{n+1}(w) \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Im} \Delta_{n+1} \, . \end{aligned}$$

($\alpha_n \circ h_{n+1} = h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1}$, από τη μεταθετικότητα του διαγραμματος), δηλαδή

$$\operatorname{Ker} \psi_n \subseteq \operatorname{Im} \Delta_{n+1} \tag{15.21}$$

Από τις (15.20) και (15.21), έπεται ότι

$$\operatorname{Im} \Delta_{n+1} = \operatorname{Ker} \psi_n .$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Im} \psi_n &\Rightarrow z = (a_n(x), f_n(x)) \wedge x \in A_n \\ &\Rightarrow \varphi_n(z) = \varphi_n(a_n(x), f_n(x)) \\ &= (f'_n \circ a_n)(x) - (\beta_n \circ f_n)(x) = 0 \\ &\Rightarrow z \in \operatorname{Ker} \varphi_n \, . \end{aligned}$$

($f'_n \circ a_n = \beta_n \circ f_n$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος), δηλαδή

$$\operatorname{Im} \psi_n \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_n \tag{15.22}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} (x, y) \in \operatorname{Ker} \varphi_n &\Rightarrow \varphi_n(x, y) = 0 \\ &\Rightarrow f'_n(x) = \beta_n(y) \, , \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} 0 &= g'_n(f'_n(x)) \\ &= g'_n(\beta_n(y)) = \gamma_n(g_n(y)) \\ &\Rightarrow g_n(y) \in \operatorname{Ker}\gamma_n = \{0\} \\ &\Rightarrow g_n(y) = 0 \\ &\Rightarrow y \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n \\ &\Rightarrow y = f_n(z) \wedge z \in A_n \\ &\Rightarrow f'_n(x) = \beta_n(f_n(z)) = f'_n(a_n(z)) \\ &\Rightarrow f'_n(x - a_n(z)) = 0 \\ &\Rightarrow x - a_n(z) \in \operatorname{Ker} f'_n = \operatorname{Im} h'_{n+1} \\ &\Rightarrow x - a_n(z) = h'_{n+1}(w) \wedge w \in C'_{n+1}\,. \end{aligned}$$

($g'_n \circ \beta_n = \gamma_n \circ g_n$ και $\beta_n \circ f_n = f'_n \circ \alpha_n$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος). Επιπλέον, η γ_{n+1} είναι επί, άρα $w = \gamma_{n+1}(t)$ για κάποιο $t \in C_{n+1}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} x - a_n(z) &= h'_{n+1}(\gamma_{n+1}(t)) \\ &= a_n(h_{n+1}(t)) \\ &\Rightarrow x = a_n(h_{n+1}(t) + z) \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Im} a_n \end{aligned}$$

($h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} = \alpha_n \circ h_{n+1}$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος). Επίσης

$$\begin{aligned} f_n \circ h_{n+1} = \hat{0} &\Rightarrow f_n(z + h_{n+1}(t)) = f_n(z) = y \\ &\Rightarrow y \in \operatorname{Im} f_n\,, \end{aligned}$$

άρα $(x, y) \in \operatorname{Im}\psi_n$. Δηλαδή

$$\operatorname{Ker}\varphi_n \subseteq \operatorname{Im}\psi_n. \tag{15.23}$$

Από τις (15.22) και (15.23), έπεται ότι

$$\operatorname{Im}\psi_n = \operatorname{Ker}\varphi_n.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Im}\varphi_n &\Rightarrow z = f_n'(x) - \beta_n(y) \wedge (x,y) \in A_n' \oplus B_n \\ &\Rightarrow \Delta_n(z) = \Delta_n(f_n'(x)) - \Delta_n(\beta_n(y)) \\ &= (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g_n' \circ f_n')(x) - (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g_n' \circ \beta_n)(y) \\ &= (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \hat{0})(x) - (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \gamma_n \circ g_n)(y) \\ &= 0 - (h_n \circ g_n)(y) = 0 \\ &\Rightarrow z \in \operatorname{Ker}\Delta_n\,. \end{aligned}$$

($g_n' \circ f_n' = \hat{0}$, από την ακρίβεια του κάτω διαγράμματος και $g_n' \circ \beta_n = \gamma_n \circ g_n$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος και $h_n \circ g_n = \hat{0}$, από την ακρίβεια του πάνω διαγράμματος), δηλαδή

$$\operatorname{Im}\varphi_n \subseteq \operatorname{Ker}\Delta_n \tag{15.24}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}\Delta_n &\Rightarrow h_n(\gamma_n^{-1}(g_n'(x))) = 0 \\ &\Rightarrow \gamma_n^{-1}(g_n'(x)) \in \operatorname{Ker} h_n = \operatorname{Im} g_n \\ &\Rightarrow \gamma_n^{-1}(g_n'(x)) = g_n(y) \wedge y \in B_n \\ &\Rightarrow g_n'(x) = \gamma_n(g_n(y)) = g_n'(\beta_n(y)) \\ &\Rightarrow g_n'(x - \beta_n(y)) = 0 \\ &\Rightarrow x - \beta_n(y) \in \operatorname{Ker} g_n' = \operatorname{Im} f_n' \\ &\Rightarrow x - \beta_n(y) = f_n'(w) \wedge w \in A_n' \\ &\Rightarrow x = f_n'(w) - \beta_n(-y) = \varphi_n(w,-y) \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Im}\varphi_n\,. \end{aligned}$$

($\gamma_n \circ g_n = g_n' \circ \beta_n$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος), δηλαδή

$$\operatorname{Ker}\Delta_n \subseteq \operatorname{Im}\varphi_n \tag{15.25}$$

Από τις (15.24) και (15.25), έπεται ότι

$$\operatorname{Ker}\Delta_n = \operatorname{Im}\varphi_n.$$

Άρα η ακρίβεια της ακολουθίας αποδείχθηκε.

□

Πρόταση 15.2.24. ***(Λήμμα των τεσσάρων)*** *Αν στο ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ A' & \xrightarrow{f_1} & B' & \xrightarrow{g_1} & C' & \xrightarrow{h_1} & D' \end{array},$$

όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά και οι οριζόντιες γραμμές ακριβείς, τότε αληθεύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές

α΄) Αν οι ομομορφισμοί α, γ είναι επί και ο δ είναι 1-1, τότε ο β είναι επί.

β΄) Αν ο α είναι επί και οι β, δ είναι 1-1, τότε ο γ είναι 1-1.

Απόδειξη: α΄) Έστω $y' \in B'$. Επειδή ο γ είναι επί, υπάρχει $z \in C$, ώστε $g_1(y') = \gamma(z)$. Από τη μεταθετικότητα του δεξιού τετραγώνου έχουμε

$$\begin{aligned} \delta(h(z)) = h_1(\gamma(z)) &= h_1(g_1(y') = 0 \\ &\Rightarrow h(z) \in \operatorname{Ker}\delta = \{0\} \\ &\Rightarrow h(z) = 0 \\ &\Rightarrow z \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g \\ &\Rightarrow z = g(y) \wedge y \in B\,. \end{aligned}$$

Από την μεταθετικότητα του μεσαίου τετραγώνου έχουμε

$$\begin{aligned} g_1(y') = \gamma(z) = \gamma(g(y)) &= g_1(\beta(y)) \\ &\Rightarrow g_1(y' - \beta(y)) = 0 \\ &\Rightarrow y' - \beta(y) \in \operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Im} f_1 \\ &\Rightarrow y' - \beta(y) = f_1(x') \wedge x' \in A'\,. \end{aligned}$$

Επειδή ο α είναι επί υπάρχει $x \in A$, ώστε $x' = \alpha(x)$. Από την μεταθετικότητα του αριστερού τετραγώνου έχουμε

$$\begin{aligned} y' - \beta(y) &= f_1(\alpha(x)) \\ &= \beta(f(x)) \\ &\Rightarrow y' = \beta(y + f(x)) \wedge y + f(x) \in B \\ &\Rightarrow y' \in \operatorname{Im}\beta\,. \end{aligned}$$

Επομένως ο β είναι επί.

β΄) Έστω $z \in \operatorname{Ker}\gamma$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \delta(h(z)) = h_1(\gamma(z)) &= h_1(0) = 0 \\ &\Rightarrow h(z) \in ker\delta = \{0\} \\ &\Rightarrow h(z) = 0\,, \end{aligned}$$

επομένως $z \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$, άρα υπάρχει $y \in B$, ώστε $z = g(y)$, άρα

$$\begin{aligned} 0 = \gamma(z) = \gamma(g(y)) &= g_1(\beta(y)) \\ &\Rightarrow \beta(y) \in \operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Im} f_1 \\ &\Rightarrow \exists x' \in A'; \beta(y) = f_1(x')\,. \end{aligned}$$

Επειδή ο α είναι επί υπάρχει $x \in A$, ώστε $x' = \alpha(x)$, άρα

$$\begin{aligned} \beta(y) = f_1(x') = f_1(\alpha(x)) &= \beta(f(x)) \\ &\Rightarrow \beta(y - f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow y - f(x) \in \operatorname{Ker} \beta = \{0\} \\ &\Rightarrow y = f(x) \\ &\Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) = 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως $\operatorname{Ker} \gamma \subseteq \{0\}$. Το $\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} \gamma$ είναι προφανές, άρα $\operatorname{Ker} \gamma = \{0\}$, δηλαδή ο γ είναι 1-1. □

Πρόταση 15.2.25. ***(Λήμμα των πέντε)*** *Αν στο ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ A' & \xrightarrow{f_1} & B' & \xrightarrow{g_1} & C' & \xrightarrow{h_1} & D' & \xrightarrow{k_1} & E' \end{array},$$

όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά και οι οριζόντιες γραμμές ακριβείς, τότε αληθεύει η ακόλουθη συνεπαγωγή: Αν οι $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ είναι ισομορφισμοί, τότε ο γ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Από την εφαρμογή του λήμματος των τεσσάρων (περίπτωση β) στο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ A' & \xrightarrow{f_1} & B' & \xrightarrow{g_1} & C' & \xrightarrow{h_1} & D' \end{array},$$

συμπεραίνουμε ότι ο γ είναι 1-1. Από την εφαρμογή του λήμματος των τεσσάρων (περίπτωση α) στο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ B' & \xrightarrow{g_1} & C' & \xrightarrow{h_1} & D' & \xrightarrow{k_1} & E' \end{array},$$

συμπεραίνουμε ότι ο γ είναι επί. Επομένως ο γ είναι ισομορφισμός. □

15.3 Ευθύ όριο αβελιανών ομάδων

Το ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων καθώς και το ευθύ όριο του ευθέως συστήματος αβελιάνων ομάδων είναι αρκετά πολύπλοκες έννοιες της σύγχρονης άλγεβρας. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε ειδικά με αυτές, παρά μόνον τόσο, όσο μας χρειάζονται στην απόδειξη του λήμματος 16.4.2. Κατά συνέπεια ο αναγνώστης μπορεί να αναβάλλει την μελέτη της παρούσης παραγράφου έως ότου ασχοληθεί με την παράγραφο 16.4.

Ορισμός 15.3.1. Έστω I ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο με την σχέση $\leq$. Ένα **ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων** υπεράνω του I, είναι μία οικογένεια αβελιανών ομάδων G_i, $i \in I$, μαζί με μία οικογένεια ομομορφισμών $\phi_j^i : G_i \to G_j$, οι οποίοι ορίζονται μονοσήμαντα για κάθε ζεύγος $(i,j) \in I \times I$, όταν και μόνον, όταν $i \leq j$ και, οι οποίοι ικανοποιούν τις παρακάτω δύο απαιτήσεις

α') $\phi_i^i = i_{G_i}$ για κάθε $i \in I$.

β') Όταν $i \leq j \leq k$ το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\phi_k^i} & G_k \\ & {\scriptstyle \phi_j^i}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \phi_k^j} & \\ & G_j & \end{array}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $\phi_k^j \circ \phi_j^i = \phi_k^i$.

Παράδειγμα 15.3.1. Αν G_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία αβελιανών ομάδων, με $G_n \leq G_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία G_n μαζί με τις ενθέσεις $\lambda_j^i : G_i \to G_j$, αν $i \leq j$, αποτελούν ένα ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων.

Θεωρούμε το ευθύ σύστημα των αβελιανών ομάδων A_i, $i \in I$ με ομομορφισμούς τους ϕ_j^i και το σύνολο $\mathbf{A}$ των ζευγών $[A_i, a]$, όπου $a \in A_i$. Στο σύνολο $\mathbf{A}$ ορίζουμε την σχέση $\sim$, ως εξής:

$$[A_i, a] \sim [A_j, b] \quad \Leftrightarrow \quad \big(k \geq i \wedge k \geq j \Rightarrow \phi_k^i(a) = \phi_k^j(b)\big).$$

Πρόταση 15.3.1. *Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη:

i. Έχουμε αν, $k \geq i$, τότε $\phi_k^i(a) = \phi_k^i(a)$, άρα $[A_i, a] \sim [A_i, a]$, επομένως η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική.

ii. Αν $[A_i, a] \sim [A_j, b]$, τότε $\phi_k^i(a) = \phi_k^j(b)$, άρα $\phi_k^j(b) = \phi_k^i(a)$, άρα $[A_j, b] \sim [A_i, a]$, επομένως η σχέση $\sim$ είναι συμμετρική.

iii. Έστω $[A_i, a] \sim [A_j, b]$ και $[A_j, b] \sim [A_r, c]$. Λόγω της ολικής διάταξης θα ισχύει ένα εκ των $j \leq i$ ή $i \leq j$ και, λόγω της συμμετρικότητας της σχέσης $\sim$ μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $j \leq i$. Έστω $k \geq i, r$, τότε $\phi_k^i(a) = \phi_k^j(b) = \phi_k^r(c)$, άρα $[A_i, a] \sim [A_r, c]$, επομένως η σχέση $\sim$ είναι μεταβατική.

Άρα η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{G}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$. Την κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από το ζεύγος $[A_i, a]$ συμβολίζουμε με $\langle [A_i, a] \rangle$.

Πρόταση 15.3.2. *Έστω $m \geq k$, τότε $[A_k, a] \sim [A_m, \phi_m^k(a)]$.*

Απόδειξη: Έστω $l \geq m \geq k$, τότε $\phi_l^m(\phi_m^k(a)) = \phi_l^k(a)$, άρα $[A_k, a] \sim [A_m, \phi_m^k(a)]$. □

Στο $\mathbf{G}$ ορίζουμε την πράξη +, ως εξής:

$$\langle [A_i, a] \rangle + \langle [A_j, b] \rangle = \langle [A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)] \rangle,$$

όπου $k \geq i, j$.

Πρόταση 15.3.3. *Η πράξη + στο $\mathbf{G}$ είναι καλώς ορισμένη.*

Απόδειξη: Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι η πράξη είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του k. Έστω $m \geq i, j$. Τότε, λόγω της ολικής διάταξης θα ισχύει ένα εκ των $m \geq k$ ή $k \geq m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $m \geq k$. Από την πρόταση 15.3.2 έχουμε ότι $[A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)] \sim [A_m, \phi_m^k(\phi_k^i(a)) + \phi_k^j(b))]$. Αλλά

$$\begin{aligned} \phi_m^k(\phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)) &= \phi_m^k\big(\phi_k^i(a)\big) + \phi_m^k\big(\phi_k^j(b)\big) \\ &= \phi_m^i(a) + \phi_m^j(b), \end{aligned}$$

άρα $[A_m, \phi_m^k(\phi_k^i(a) + \phi_k^j(b))] = [A_m, \phi_m^i(a) + \phi_m^j(b)]$, επομένως $[A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)] \sim [A_m, \phi_m^i(a) + \phi_m^j(b)]$, δηλαδή η ανεξαρτησία της πράξης από το k, ισχύει.
Επιπλέον έστω ότι $[A_k, a'] \sim [A_i, a]$ και $[A_l, b'] \sim [A_j, b]$. Θεωρούμε $m \geq k, i, l, j$, τότε $\phi_m^i(a) = \phi_m^k(a')$ και $\phi_m^j(b) = \phi_m^l(b')$. Άρα

$$\begin{aligned} \langle [A_i, a] \rangle + \langle [A_j, b] \rangle &= \langle [A_m, \phi_m^i(a) + \phi_m^j(b)] \rangle \\ &= \langle [A_m, \phi_m^k(a') + \phi_m^l(b')] \rangle \\ &= \langle [A_k, a'] \rangle + \langle [A_l, b'] \rangle, \end{aligned}$$

άρα η + είναι καλώς ορισμένη.

□

Πρόταση 15.3.4. *Το $\mathbf{G}$ με την πιο πάνω πράξη + είναι αβελιανή ομάδα.*

Απόδειξη: Έχουμε

- Έστω $D = \langle [A_i, a] \rangle + \big(\langle [A_j, b] \rangle + \langle [A_k, c] \rangle\big)$. Αν $m \geq i, j$, τότε $D = \langle [A_m, \phi_m^i(a) + \phi_m^j(b)] \rangle + \langle [\phi_k, c] \rangle$. Επιπλέον αν $r \geq m, k$, τότε

$$\begin{aligned} D &= \langle [A_r, \phi_r^m\big(\phi_m^i(a) + \phi_m^j(b)\big) + \phi_r^k(c)] \rangle \\ &= \langle [A_r, \phi_r^i(a) + \phi_r^j(b) + \phi_r^k(c)] \rangle. \end{aligned}$$

Επίσης, έστω $E = \langle [A_i, a] \rangle + \big(\langle [A_j, b] \rangle + \langle [A_k, c] \rangle \big)$ και $m \geq i, j$, τότε $E = \langle [A_i, a] \rangle + \langle A_m, \phi_m^j(b) + \phi_m^k(c) \rangle$. Επιπλέον, αν $r \geq m, k$, τότε

$$
\begin{aligned}
E &= \langle [A_r, \phi_r^i(a) + \phi_r^m \big(\phi_m^j(b) + \phi_m^k(c) \big) \rangle \\
&= \langle [A_r, \phi_r^i(a) + \phi_r^j(b) + \phi_r^k(c)] \rangle,
\end{aligned}
$$

άρα $D = E$, δηλαδή η πράξη + στο $\mathbf{G}$ είναι προσεταιριστική.

- Έστω $k \geq i, j$, τότε

$$
\begin{aligned}
\langle [A_i, a] \rangle + \langle [A_j, b] \rangle &= \langle [A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)] \rangle \\
&= \langle [A_k, \phi_k^j(b) + \phi_k^i(a)] \rangle \\
&= \langle [A_j, b] \rangle + \langle [A_i, a] \rangle,
\end{aligned}
$$

άρα η πράξη + είναι στο $\mathbf{G}$ αντιμεταθετική.

- Έχουμε ότι $[A_i, 0] \sim [A_j, 0]$, γιατί, αν $k \geq i, j$, τότε $\phi_k^i(0) = 0 = \phi_k^j(0)$. Άρα $\langle [A_i, 0] \rangle = \langle [A_j, 0] \rangle$ για κάθε $i, j \in I$. Έστω $k \geq j$, τότε

$$
\begin{aligned}
\langle [A_j, 0] \rangle + \langle [A_j, a] \rangle &= \langle [A_k, \phi_k^j(0) + \phi_k^j(a)] \rangle \\
&= \langle [A_k, \phi_k^j(a)] \rangle \\
&= \langle [A_j, a] \rangle,
\end{aligned}
$$

άρα το $\langle 0 \rangle = \langle [A_j, 0] \rangle \in \mathbf{G}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης + στο $\mathbf{G}$.

- Έστω $k \geq i$, τότε

$$
\begin{aligned}
\langle [A_i, a] \rangle + \langle [A_i, -a] \rangle &= \langle [A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^i(-a)] \rangle \\
&= \langle [A_k, 0] \rangle = \langle 0 \rangle,
\end{aligned}
$$

άρα το $\langle [A_i, -a] \rangle$ είναι το αντίθετο του $\langle [A_i, a] \rangle$ στο $\mathbf{G}$.

Επομένως η $(\mathbf{G}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα. □

Ορισμός 15.3.2. Την ομάδα $\mathbf{G}$ ονομάζουμε **ευθύ όριο** του ευθέως συστήματος (A_i, ϕ_j^i) με $i, j \in I$, $j \geq i$ και την συμβολίζουμε με $\varinjlim A_i$.

Πρόταση 15.3.5. *Η απεικόνιση $r_i : A_i \to \mathbf{G}$, με*

$$
r_i(a) = \langle [A_i, a] \rangle
$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη: Έστω ότι $a, b \in A_i$, τότε, αν $k \geq i$ έχουμε

$$\begin{aligned} r_i(a+b) &= \langle [A_i, a+b] \rangle \\ &= \langle [A_k, \phi_k^i(a+b)] \rangle \\ &= \langle [A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^i(b)] \rangle \\ &= \langle [A_i, a] \rangle + \langle [A_i, b] \rangle \\ &= r_i(a) + r_i(b)\,, \end{aligned}$$

άρα η r_i είναι ομομορφισμός. □

Πρόταση 15.3.6. *Αν* $i \leq j$, *τότε* $r_i = r_j \circ \phi_j^i$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{r_i} & \mathbf{G} \\ {\scriptstyle \phi_j^i}\downarrow & \nearrow_{r_j} & \\ A_j & & \end{array} .$$

Απόδειξη: Έστω $a \in A_i$, τότε

$$\begin{aligned} r_j(\phi_j^i(a)) &= \langle [A_j, \phi_j^i(a)] \rangle \\ &= \langle [A_i, a] \rangle \\ &= r_i(a)\,. \end{aligned}$$

□

Έστω B αβελιανή ομάδα και $f_i : A_i \to B$, $i \in I$ ομομορφισμοί τέτοιοι, ώστε $f_i = f_j \circ \phi_j^i$ για κάθε $i \leq j$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & B \\ {\scriptstyle \phi_j^i}\downarrow & \nearrow_{f_j} & \\ A_i & & \end{array}$$

Τότε ορίζουμε την απεικόνιση $f : \varinjlim A_i \to B$, με

$$f\big(\langle [A_i, a] \rangle\big) = f_i(a)$$

για κάθε $a \in A_i$.

Πρόταση 15.3.7. *Η* f *είναι καλώς ορισμένη.*

Απόδειξη: Έστω ότι $[A_j, b] \sim [A_i, a]$, και $k \geq i, j$, τότε $\phi_k^j(b) = \phi_k^i(a)$, άρα

$$\begin{aligned} f\big(\langle [A_i, a] \rangle\big) &= f_i(a) \\ &= f_k\big(\phi_k^i(a)\big) = f_k\big(\phi_k^j(b)\big) \\ &= f_j(b) = f\big(\langle [A_j, b] \rangle\big), 0 \end{aligned}$$

άρα η f είναι καλώς ορισμένη. □

Πρόταση 15.3.8. *Η f είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\langle [A_i, a]\rangle, \langle [A_j, b]\rangle \in \varinjlim A_i$, τότε, αν $k \geq i$ και $k \geq j$ έχουμε

$$\begin{aligned} f\big(\langle [A_i, a]\rangle + \langle [A_j, b]\rangle\big) &= f\big(\langle [A_k, \phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)]\rangle\big) \\ &= f_k\big(\phi_k^i(a) + \phi_k^j(b)\big) = f_k\big(\phi_k^i(a)\big) + f_k\big(\phi_k^j(b)\big) \\ &= f_i(a) + f_j(b) = f\big(\langle [A_i, a]\rangle\big) + f\big(\langle [A_j, b]\rangle\big), \end{aligned}$$

άρα η f είναι ομομορφισμός. □

Πρόταση 15.3.9. *Είναι $f_i = f \circ r_i$.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού της f. □

Πρόταση 15.3.10. *Αν $g : \varinjlim A_i \to B$ ένας ομομορφισμός, τέτοιος ώστε $g \circ r_i = f_i$ για κάθε $i \in I$, τότε*

$$g = f.$$

Απόδειξη: Αν $\langle [A_i, a]\rangle \in \varinjlim A_i$, τότε

$$\begin{aligned} g\big(\langle [A_i, a]\rangle\big) &= g(r_i(a)) \\ &= f_i(a) = f\big(\langle [A_i, a]\rangle\big)\,, \end{aligned}$$

άρα $g = f$. □

Επομένως ο f είναι ο μοναδικός ομομορφισμός της αβελιανής ομάδας $\varinjlim A_i$ στην αβελιανή ομάδα B, για τον οποίο $f \circ r_i = f_i$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή

Πρόταση 15.3.11. *Αν (A_i, ϕ_j^i), $i, j \in I$ είναι ένα ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων, $G = \varinjlim A_i$ είναι το ευθύ όριο του συστήματος και B αβελιανή ομάδα, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : \varinjlim A_i \to B$, ώστε $f_i = f \circ r_i$ για κάθε $i \in I$ και το επόμενο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ {\scriptstyle r_j}\nwarrow & {\scriptstyle r_i}\nwarrow \; A_i \; \nearrow{\scriptstyle f_i} & \nearrow{\scriptstyle f_j} \\ & {\scriptstyle \phi_j^i}\downarrow & \\ & A_j & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Πρόταση 15.3.12. *Αν επιπλέον των δεδομένων της πρότασης 15.3.11 ισχύουν τα*

α΄) Κάθε $b \in B$ γράφεται ως $f_i(a)$ για κάποιο $a \in A_i$.

β΄) Αν $a \in A_i$, με $f_i(a) = 0_B$, τότε $\phi_j^i(a) = O_{A_j}$ για $j \geq i$,

τότε ο ομομορφισμός της πρότασης 15.3.11 είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Λόγω της α') η f είναι επί.
Έστω $\langle [A_i, a] \rangle \in G$, με $f\big(\langle [A_i, a] \rangle\big) = 0_B$, άρα $f_i(a) = O_B$, άρα $\phi_j^i(a) = 0_{A_j}$ για $j \geq i$. Αλλά $[A_i, a] \sim [A_j, \phi_j^i(a)] = [A_j, 0_{A_j}]$, άρα $\langle [A_i, a] \rangle = \langle 0 \rangle$, άρα $\operatorname{Ker} f = \{\langle 0 \rangle\}$, άρα η f είναι 1-1. Συνεπώς η f είναι ισομορφισμός.

15.4 Ιδιάζουσα Ομολογία

Ορισμός 15.4.1. **Ιδιάζον n-πλέγμα** ($n \geq 0$) σε έναν τοπολογικό χώρο X ονομάζουμε κάθε συνεχή απεικόνιση

$$\sigma : \Delta^n \to X.$$

Το σύνολο των ιδιαζόντων n-πλεγμάτων του X συμβολίζουμε με $S_n(X)$. Επιπλέον, ορίζουμε $S_n(X) = \{0\}$ για $n < 0$.

Παρατηρήσεις:

1. Τα ιδιάζοντα 0-πλέγματα είναι απεικονίσεις με πεδίο ορισμού το μονοσύνολο $\{1\}$ και εικόνες τα σημεία του τοπολογικού χώρου X. Για τον λόγο αυτόν εφεξής θα τα ταυτίζουμε με τα σημεία του X.

2. Τα ιδιάζοντα 1-πλέγματα είναι οι δρόμοι στον X.

3. Η απεικόνιση σ δεν είναι απαραίτητα 1-1. Αυτός είναι ο λόγος του επιθέτου ιδιάζον, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν ιδιορρυθμίες, όπως αυτοτομές ή και ταυτίσεις. Προφανώς στην περίπτωση που η σ είναι 1-1 και επιπλέον ο X είναι Hausdorff, τότε η σ είναι εμφύτευση του συμπαγούς Δ^n στον X, επομένως $\sigma(\Delta^n) \cong \Delta^n$.

Ορισμός 15.4.2. Αν X ένας τοπολογικός χώρος, τότε η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο $S_n(X)$ ονομάζεται **ομάδα των n- αλυσίδων** του X και συμβολίζεται με $C_n(X)$. Τα στοιχεία της $C_n(X)$ ονομάζονται n-αλυσίδες στον X και το καθένα από αυτά είναι ένας γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές ακέραιους πεπερασμένου πλήθους n-πλεγμάτων.

Ορισμός 15.4.3. Αν σ είναι ένα ιδιάζον $(n+1)$-πλέγμα, τότε το $\sigma \circ d_i^n, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ είναι ένα ιδιάζον n-πλέγμα. Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε την απεικόνιση $\partial_{n+1} : S_{n+1}(X) \to C_n(X)$, με

$$\partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \big(\sigma \circ d_i^n\big),$$

η οποία επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό (πρόταση 15.2.6).

$$\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \to C_n(X).$$

Παρατήρηση: Η απεικόνιση $\sigma \circ d_i^n$ είναι ο περιορισμός της σ στην i- όψη του κανονικού πλέγματος Δ^{n+1} ($\sigma \circ d_i^n = \sigma/F_i$). Συνεπώς, αν $\sigma \in S_{n+1}(X)$, τότε $\partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\big(\sigma/F_i\big)$. Εφεξής, εφόσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα παραλείπουμε τον εκθέτη n από το d_i^n.

Παραδείγματα 15.4.1.

1. Αν $x \in C_0(X)$, τότε $\partial(x) = 0$.

2. Αν γ είναι το τόξο, με αρχή το x_0 και πέρας το x_1, τότε $\partial(\gamma) = x_1 - x_0$.

3. Αν $\sigma(\Delta^2) = [x_0, x_1, x_2]$, τότε $(\partial(\sigma))(\Delta^2) = [x_1, x_2] - [x_0, x_2] + [x_0, x_1]$. Αν $\sigma(\Delta^2) = [x_0, x_1, x_2, x_3]$, τότε $(\partial(\sigma))(\Delta^3) = [x_1, x_2, x_3] - [x_0, x_2, x_3] + [x_0, x_1, x_3] - [x_0, x_1, x_2]$.

Ορισμός 15.4.4. Δύο n-αλυσίδες σ_1, σ_2 ονομάζονται **ομόλογες** , αν και μόνον, αν υπάρχει $(n+1)$-αλυσίδα τ, ώστε $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial(\tau)$. Το ότι οι αλυσίδες σ_1 και σ_2 είναι ομόλογες συμβολίζουμε με $\sigma_1 \sim \sigma_2$.

Πρόταση 15.4.1. *Η σχέση $\sim$ στο σύνολο $C_n(X)$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: α΄) Είναι $\sigma \sim \sigma$, γιατί $\sigma - \sigma = 0 = \partial(0)$.

β΄) Αν $\sigma_1 \sim \sigma_2$, τότε υπάρχει $\tau \in C_{n+1}(X)$, ώστε $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial(\tau)$, άρα $\sigma_2 - \sigma_1 = \partial(-\tau)$ και $-\tau \in C_{n+1}(X)$, άρα $\sigma_2 \sim \sigma_1$.

γ΄) Έστω ότι $\sigma_1 \sim \sigma_2$ και $\sigma_2 \sim \sigma_3$, άρα υπάρχουν $\tau_1, \tau_2 \in C_{n+1}(X)$, ώστε $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial(\tau_1)$ και $\sigma_2 - \sigma_3 = \partial(\tau_2)$, άρα $\sigma_1 - \sigma_3 = \partial(\tau_1 - \tau_2)$ και $(\tau_1 - \tau_2) \in C_{n+1}(X)$, άρα $\sigma_1 \sim \sigma_3$. □

Παρατήρηση: Την κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σχέση $\sim$, στην οποία ανήκει το $\alpha \in C_n(X)$ συμβολίζουμε με $[\alpha]$.

Η πρόταση που ακολουθεί θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως **θεμελιώδες θεώρημα της ιδιάζουσας ομολογίας των τοπολογικών χώρων**, γιατί από αυτήν θα προκύψει το ότι το

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

είναι ένα σύμπλεγμα, όπως το ορίσαμε στον ορισμό 15.2.3. Από την μελέτη του συμπλέγματος αυτού προκύπτουν τα σχετικά με την ομολογία του X συμπεράσματα. Να σημειώσουμε ότι στο σύμπλεγμα αυτό $C_n(X) = \{0\}$ και $\partial_n = \hat{0}$ για $n \leq 0$. Για αυτόν τον λόγο εφεξής, το κομμάτι του συμπλέγματος, το οποίο αντιστοιχεί στα $n < -1$ θα παραλείπεται, ως τετριμμένο.

Πρόταση 15.4.2. *Για κάθε $n \geq -1$ ισχύει $\partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0}$.*

Απόδειξη: Είναι αρκετό να αποδείξουμε την πρόταση παίρνοντας $\sigma \in S_{n+1}(X)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\big(\partial_n \circ \partial_{n+1}\big)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \big(\partial_{n+1}(\sigma) \circ d_j^n\big) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \Big(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \big(\sigma \circ d_i^{n+1}\big)\Big) \circ d_j^n \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+j}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^{i+j}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big).
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^{i+j}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big)(*) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^{i-1+j+1}\big(\sigma \circ d_j^{n+1} \circ d_{i-1}^n\big) \\
&= (**)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k+j+1}\big(\sigma \circ d_j^{n+1} \circ d_k^n\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j+1}\big(\sigma \circ d_j^{n+1} \circ d_k^n\big)(***) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j+1}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big) \\
&= -\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\big(\sigma \circ d_i^{n+1} \circ d_j^n\big),
\end{aligned}$$

συνεπώς $\big(\partial_n \circ \partial_{n+1}\big)(\sigma) = 0$.
$(*)$: Εφαρμόζουμε την πρόταση 15.1.12.
$(**)$: Θέτουμε όπου $i-1$ το k.
$(***)$: Θέτουμε όπου j το i και όπου k το j. □

Πόρισμα. *Για κάθε ισχύει* $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \leq \operatorname{Ker}\partial_n$.

Ορισμός 15.4.5. Για κάθε $n \geq -1$ την ιδιάζουσα n-αλυσίδα σ στον χώρο X ονομάζουμε n-**κύκλο**, αν και μόνον, αν έχει σύνορο 0. Η υποομάδα $\operatorname{Ker}\partial_n$ της $C_n(X)$ ονομάζεται **ομάδα των ιδιαζόντων** n-**κύκλων** του X και συμβολίζεται $Z_n(X)$. Την υποομάδα $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ της $\operatorname{Ker}\partial_n$, άρα και της $C_n(X)$ ονομάζουμε **ομάδα των ιδιαζόντων** n-**συνόρων** του X και την συμβολίζουμε με $B_n(X)$.

Παρατηρήσεις:

1. Ιδιάζοντες 0-κύκλοι σε έναν χώρο X είναι τα σημεία του χώρου, καθώς και οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί τους, με συντελεστές ακέραιους και ιδιάζοντες 1-κύκλοι είναι οι βρόχοι του χώρου, καθώς και οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί τους με συντελεστές ακέραιους.

2. Οι ομάδες $Z_n(X)$ και $B_n(X)$, ως υποομάδες της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $C_n(X)$ είναι επίσης ελεύθερες. (πρόταση 15.2.11).

Ορισμός 15.4.6. Για κάθε $n \geq 0$ η ομάδα πηλίκο $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ ονομάζεται n-**οστή ομάδα ιδιάζουσας ομολογίας** του X.

Παρατηρήσεις:

1. Οι n-αλυσίδες ενός τοπολογικού χώρου στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα πολύ μεγάλης έκτασης σύνολο, συνήθως υπεραριθμήσιμο. Περιορίζοντας το σύνολο αυτό επιλέγουμε μόνον εκείνες από τις αλυσίδες, οι οποίες έχουν σύνορο μηδέν, δηλαδή τους n-κύκλους. Όμως και οι κύκλοι αποτελούν ένα αχανές σύνολο, το οποίο είναι ακατάλληλο για την περιγραφή των χώρων. Για τον λόγο αυτό ταυτίζουμε τους λεγόμενους ομόλογους κύκλους και με την ταύτιση αυτή προκύπτει μια κλάση ισοδυναμίας.

2. Έχουμε $[\gamma] \in H_n(X) \Leftrightarrow \gamma \in Z_n(X)$. Επιπλέον, αν $\gamma \in Z_n(X)$, τότε $[\gamma] \in H_n(X) \Leftrightarrow [\gamma] = \gamma + B_n(X) = \{\gamma + \beta / \beta \in B_n(X)\}$.

3. Δεν πρέπει να συγχέουμε την έννοια του συνοριακού τελεστή, με εκείνη του συνόρου κάποιου υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου. Ο μεν πρώτος δηλώνει ομομορφισμό ομάδων, ενώ ο δεύτερος υποσύνολο τοπολογικού χώρου. Για τον λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα, προκειμένου να σημάνουμε τις δύο διαφορετικές αυτές έννοιες. Για την πρώτη χρησιμοποιούμε το σύμβολο ∂ και για τη δεύτερη το σύμβολο Bd.

4. Είναι $H_n(X) \simeq 0$ για κάθε $n < 0$.

Ορισμός 15.4.7. Η ακολουθία $H(X) = \{H_0(X), H_1(X), \ldots\}$ ονομάζεται **ιδιάζουσα ομολογία** του χώρου X. Αν για έναν χώρο X ισχύει $H_n(X) = \{0\}$ για κάθε $n \geq 1$ και $H_0(X) = \mathbb{Z}$, τότε ο χώρος X ονομάζεται **ακυκλικός**.

Πρόταση 15.4.3. *Η ιδιάζουσα ομολογία ενός μονοσημειακού τοπολογικού χώρου X είναι η $H(X) = \{\mathbb{Z}, \{0\}, \{0\}, \ldots\}$. Δηλαδή κάθε μονοσημειακός χώρος είναι ακυκλικός.*

Απόδειξη: Για $n \geq 1$ το σύνολο των ιδιαζόντων n-πλεγμάτων έχει ως στοιχεία τη σταθερή απεικόνιση $\sigma : \Delta^n \to X$ και μόνον. Άρα $C_n(X) = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Έτσι η $\sigma \circ d_i^n$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, είναι μια σταθερή απεικόνιση του Δ^{n-1} στον X, την οποία ονομάζουμε τ, άρα

$$\begin{aligned}\partial(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d_i^n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau \\ &= \begin{cases} \tau & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

- Αν ο n είναι περιττός, τότε $Z_n(X) = \operatorname{Ker}\partial = \langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}$ και $B_n(X) = \operatorname{Im}\partial = \langle\tau\rangle \simeq \mathbb{Z}$, άρα $H_n(X) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \{0\}$.
- Αν ο n είναι άρτιος, τότε $Z_n(X) = \operatorname{Ker}\partial = \{0\}$ και $B_n(X) = \operatorname{Im}\partial = \{0\}$, άρα $H_n(X) = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$.

Για $n = 0$ έχουμε $Z_0(X) = C_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ και $B_1(X) = \{0\}$, άρα $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$. □

Πρόταση 15.4.4. *Αν $X_i, i \in I$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του χώρου X, τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $H_n(X) = \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i)$.*

Απόδειξη: Έστω $\sigma \in S_n(X)$. Επειδή το Δ^n είναι δρομοσυνεκτικό σύνολο και η $\sigma : \Delta^n \to X$ συνεχής το $\sigma(\Delta^n)$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο του X, επομένως υπάρχει μοναδικό $i \in I$, ώστε $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_i$, άρα $S_n(X) = \bigsqcup_{i\in I} S_n(X_i)$, συνεπώς $C_n(X) = \bigoplus_{i\in I} C_n(X_i)$.
Επιπλέον, αν $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ και $\partial_n^i : C_n(X_i) \to C_{n-1}(X_i)$ είναι οι συνοριακοί ομομορφισμοί, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_n\big(C_n(X_i)\big) &= \partial_n^i\big(C_n(X_i)\big) \subseteq C_{n-1}(X_i)\\ &\subseteq C_{n-1}(X) = \bigoplus_{i\in I} C_{n-1}(X_i),\end{aligned}$$

άρα $\partial_n\big(\bigoplus_{i\in I} C_n(X_i)\big) = \bigoplus_{i\in I}\partial_n^i\big(C_n(X_i)\big)$, επομένως

$$\begin{aligned}B_n(X) &= \operatorname{Im}(\partial_{n+1})\\ &= \partial_{n+1}\big(C_{n+1}(X)\big) = \bigoplus_{i\in I}\partial_{n+1}^i\big(C_{n+1}(X_i)\big)\\ &= \bigoplus_{i\in I} B_n(X_i).\end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε $Z_0(X) = \bigoplus_{i\in I} C_0(X_i) = \bigoplus_{i\in I} Z_0(X_i)$ και για $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}Z_n(X) &= \operatorname{Ker}(\partial_n)\\ &= \bigoplus_{i\in I}\operatorname{Ker}\partial_n^i = \bigoplus Z_n(X_i).\end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την πρόταση 21.4.6 έχουμε

$$\begin{aligned}H_n(X) &= \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}\\ &\simeq \frac{\bigoplus_{i\in I} Z_n(X_i)}{\bigoplus_{i\in I} B_n(X_i)}\\ &\simeq \bigoplus_{i\in I}\frac{Z_n(X_i)}{B_n(X_i)}\\ &\simeq \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i)\,.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 15.4.5. *Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη: Αν $\sigma \in C_0(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε υπάρχει μοναδικό μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο I του $\mathbb{N}$, μοναδικοί μη μηδενικοί ακέραιοι $n_i, i \in I$ και μοναδικά $x_i \in X, i \in I$, ώστε $\sigma = \sum_{i \in I} n_i \sigma_i$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : C_0(X) \to \mathbb{Z}$, με $\phi(\sigma) = \begin{cases} \sum_{i \in I} n_i & \sigma \neq \mathbf{0} \\ 0 & \sigma = \mathbf{0} \end{cases}$.
Αν $\sigma, \tau \in C_0(X)$ και κάποιο από αυτά είναι $\mathbf{0}$, τότε, προφανώς $\phi(\sigma + \tau) = \phi(\sigma) + \phi(\tau)$.
Αν $\sigma, \tau \neq \mathbf{0}$, τότε $\sigma = \sum_{i \in I} n_i x_i$ και $\tau = \sum_{i \in J} m_i y_i$, άρα

$$\begin{aligned} \phi(\sigma + \tau) &= \sum_{i \in I} n_i + \sum_{i \in J} m_i \\ &= \phi(\sigma) + \phi(\tau), \end{aligned}$$

επομένως η ϕ είναι ομομορφισμός.
Επιπλέον, αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $\phi(nx) = n \quad \forall x \in X$, άρα η ϕ είναι επί. Αν $\sigma \in \operatorname{Im} \partial_1$, τότε υπάρχει μη κενό πεπερασμένο σύνολο δεικτών I, $m_i \in \mathbb{Z}$ και ιδιάζοντα 1-πλέγματα σ_i για κάθε $i \in I$, με $\sigma = \sum_{i \in I} m_i \sigma_i$, άρα $\partial(\sigma) = \sum_{i \in I} m_i \partial(\sigma_i)$. Αλλά $\partial(\sigma_i) = x_1^i - x_0^i$, όπου $\sigma_i((1,0)) = x_0^i \in X$ και $\sigma_i((0,1)) = x_1^i \in X$, άρα

$$\begin{aligned} \phi(\partial(\sigma)) &= \phi\Big(\sum_{i \in I} m_i (x_1^i - x_0^i)\Big) \\ &= \phi\Big(\sum_{i \in I} m_i x_1^i\Big) - \phi\Big(\sum_{i \in I} m_i x_0^i\Big) \\ &= \sum_{i \in I} m_i - \sum_{i \in I} m_i = 0 \\ &\Rightarrow \partial(\sigma) \in \operatorname{Ker} \phi, \end{aligned}$$

επομένως

$$\operatorname{Im} \partial_1 \subseteq \operatorname{Ker} \phi. \tag{15.26}$$

Έστω $x \in \operatorname{Ker} \phi$, τότε υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, με $\sum_{i=1}^{k} n_i = 0$ και $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, ώστε $x = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$. Έστω $y_0 \in X$. Ο χώρος X είναι δρομοσυνεκτικός, άρα για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ υπάρχει δρόμος $\gamma_i : \mathbb{I} \to X$, με $\gamma_i(0) = y_0$ και $\gamma_i(1) = x_i$. Αφετέρου υπάρχει ομοιομορφισμός $\tau : \Delta^1 \to \mathbb{I}$, με $\tau\big((1,0)\big) = 0$ και $\tau\big((0,1)\big) = 1$ (βρείτε έναν τέτοιο ομοιομορφισμό). Επομένως οι συνεχείς απεικονίσεις $\sigma_i = \gamma_i \circ \tau$ είναι στοιχεία του $S_1(X)$,

με $\sigma_i\big((1,0)\big) = y_0$ και $\sigma_i\big((0,1)\big) = x_i$. Αν $\sigma = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$, τότε

$$\begin{aligned}
\partial(\sigma) &= \sum_{i=1}^{k} n_i \partial(\sigma_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \sum_{i=1}^{k} n_i y_0 = \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i x_i - y_0 \sum_{i=1}^{k} n_i = x \\
&\Rightarrow x \in \operatorname{Im}\partial\,,
\end{aligned}$$

επομένως

$$\operatorname{Ker}\phi \subseteq \operatorname{Im}\partial_1 \tag{15.27}$$

Από τις (15.26) και (15.27), έπεται ότι $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Im}\partial_1$ και από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών των ομάδων, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &\simeq C_0(X)/\operatorname{Ker}\phi \\
&\simeq C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1 \\
&= \operatorname{Ker}\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1 \\
&= H_0(X)\,.
\end{aligned}$$

□

Άμεσες συνέπεια των δύο αμέσως προηγουμένων προτάσεων είναι η ακόλουθες προτάσεις

Πρόταση 15.4.6. *Αν $X_i, i \in I$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X, τότε*

$$H_0(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_0(X_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}.$$

Πρόταση 15.4.7. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X έχει n δρομοσυνεκτικές συνιστώσες ($n \in \mathbb{N}$).

β΄) $H_0(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$.

Πόρισμα. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε η $H_0(X)$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με πλήθος γεννητόρων ίσο με το πλήθος των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X.*

Μείζονος σημασίας θέμα είναι η εξέταση των συνεπειών των συνεχών απεικονίσεων στην ομολογία των χώρων. Θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι έχουν την ίδια ακριβώς ομολογία. Με άλλα λόγια, η ομολογία είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο, άρα και τοπολογικό αναλλοίωτο.

Ορισμός 15.4.8. Έστωσαν τοπολογικοί χώροι X, Y και συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$. Τότε η f για κάθε $n \geq 0$ ορίζεται μια απεικόνιση του $S_n(X)$ στην ομάδα $C_n(X)$ ως εξής:

$$S_n(X) \ni \sigma \to f \circ \sigma \in S_n(Y) \subseteq C_n(Y),$$

γιατί, αν το σ είναι ένα n-πλέγμα στον X, τότε το $f \circ \sigma$, το οποίο ορίζεται μονοσήμαντα και είναι ένα n-πλέγμα στον Y. Η απεικόνιση αυτή επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό

$$f_\diamond^n : C_n(X) \to C_n(Y),$$

ώστε, αν $\sum$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα, $m_i \in \mathbb{Z}$ και $\sigma_i \in S_n(X)$, τότε

$$f_\diamond^n(\sum m_i \sigma_i) = \sum m_i f_\diamond^n(\sigma_i).$$

Ο ομομορφισμός $f_\diamond^n$ ονομάζεται **επαγόμενος από την** f **ομομορφισμός της ομάδας** $C_n(X)$ **στην ομάδα** $C_n(Y)$.

Πρόταση 15.4.8. *Οι ομομορφισμοί* $f_\diamond^n$ *μεταθέτουν τους συνοριακούς ομομορφισμούς, δηλαδή*

$$f_\diamond^n \circ \partial = \delta \circ f_\diamond^{n+1}. \tag{15.28}$$

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^{n}} \\ C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & C_n(Y) \end{array}$$

Με ∂ συμβολίζουμε τους συνοριακούς ομομορφισμούς του συμπλέγματος $C_n(X)$ και με δ τους συνοριακούς ομομορφισμούς του συμπλέγματος $C_n(Y)$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την (15.28) για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο $\sigma \in S_{n+1}(X)$.
Είναι

$$\begin{aligned} \big(f_\diamond^n \circ \partial\big)(\sigma) &= f_\diamond^n\big(\partial(\sigma)\big) \\ &= f_\diamond^n\left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j(\sigma \circ d_j^n)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\big((f \circ \sigma) \circ d_j^n\big) \\ &= \delta(f_\diamond^{n+1}(\sigma)) = \big(\delta \circ f_\diamond^{n+1}\big)(\sigma)\,. \end{aligned}$$

□

Επομένως

Πόρισμα. *Η* $f_\diamond^n$ *είναι μια ακολουθία αλυσιδωτών ομομορφισμών από το σύμπλεγμα* $C(X)$ *στο σύμπλεγμα* $C(Y)$.

Πρόταση 15.4.9. *Η* $f_\diamond^n$ *απεικονίζει ομόλογους* n*-κύκλους του* X *σε ομόλογους* n*-κύκλους του* Y.

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma \in Z_n(X) &\Rightarrow \partial(\sigma) = 0\\ &\Rightarrow f_\diamond^{n-1}(\partial(\sigma)) = 0\\ &\Rightarrow \delta(f_\diamond^n(\sigma)) = 0\\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\sigma) \in Z_n(Y)\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή η $f_\diamond^n$ απεικονίζει κύκλους του $C_n(X)$ σε κύκλους του $C_n(Y)$.

Αν σ_1, σ_2 είναι δύο ομόλογοι n-κύκλοι στον X, τότε υπάρχει $\sigma \in C_{n+1}(X)$, ώστε $\partial(\sigma) = \sigma_2 - \sigma_1$, άρα

$$\begin{aligned}\delta(f_\diamond^{n+1}(\sigma)) &= f_\diamond^n(\partial(\sigma))\\ &= f_\diamond^n(\sigma_2) - f_\diamond^n(\sigma_1) \wedge f_\diamond^{n+1}(\sigma) \in C_{n+1}(Y)\,,\end{aligned}$$

άρα οι $f_\diamond^n(\sigma_1), f_\diamond^n(\sigma_2)$ είναι ομόλογοι n-κύκλοι στον Y. □

Πρόταση 15.4.10. *Η απεικόνιση* $H_n(f) = f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$, *με*

$$f_*^n([\sigma]) = [f_\diamond^n(\sigma)],$$

είναι για κάθε $n \geq 0$ *ομομορφισμός από την ομάδα* $H_n(X)$ *στην ομάδα* $H_n(Y)$.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση f_*^n είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον, αν $[\sigma], [\tau] \in H_n(X)$, τότε

$$\begin{aligned}f_*^n([\sigma] + [\tau]) &= f_*^n([\sigma + \tau])\\ &= [f_\diamond^n(\sigma + \tau)]\\ &= [f_\diamond^n(\sigma) + f_\diamond^n(\tau)]\\ &= [f_\diamond^n(\sigma)] + [f_\diamond^n(\tau)]\\ &= f_*^n([\sigma]) + f_*^n([\tau])\,.\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση $f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$ είναι ομομορφισμός. □

Ορισμός 15.4.9. Οι ομομορφισμοί $f_*^n, n \geq 0$ ονομάζονται **επαγόμενοι από την** f n**-οστοί ομολογικοί ομομορφισμοί της ομάδας** $H_n(X)$ **στην ομάδα** $H_n(Y)$. Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε και την διατύπωση οι επαγόμενοι ομομορφισμοί $f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$ από τους ομομορφισμούς $f_\diamond^n : C_n(X) \to C_n(Y)$. Αν οι επαγόμενοι ομομορφισμοί f_*^n είναι για κάθε $n \geq 0$ ισομορφισμοί, τότε λέμε ότι η f **επάγει ισομορφισμό στην ομολογία**. .

Πρόταση 15.4.11. *Αν X, Y, Z τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ συνεχείς απεικονίσεις και $f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$, $g_*^n : H_n(Y) \to H_n(Z)$ οι επαγόμενοι από τις f και g n-οστοί ομολογικοί ομομορφισμοί, αντιστοίχως, τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $(g \circ f)_*^n = g_*^n \circ f_*^n$.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της πρότασης 15.2.14.

Παρατήρηση: Αν $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3, ..., f_{n-1} : X_{n-1} \to X_n$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε για την $(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)_* : H_q(X_1) \to H_q(X_n)$ ισχύει $(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)_* = (f_{n-1})_* \circ \cdots \circ (f_1)_*$. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε ακολουθία ενθέσεων $i_1 : X_1 \to X_2$, $i_2 : X_2 \to X_3, ..., i_{n-1} : X_{n-1} \to X_n$, τότε η ένθεση $i : X_1 \to X_n$, για την οποία έχουμε $i = i_{n-1} \circ \cdots \circ i_1$ επάγει στην ομολογία ομομορφισμό $i_* : H_q(X_1) \to H_q(X_n)$, για τον οποίο έχουμε $i_* = (i_{n-1})_* \circ \cdots \circ (i_1)_*$.

Πρόταση 15.4.12. *Για τον τοπολογικό χώρο X ο επαγόμενος από την ταυτοτική απεικόνιση $i : X \to X$ n-οστός ομολογικός ομομορφισμός από την ομάδα $H_n(X)$ στον εαυτό της είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός i_*^n.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της πρότασης 15.2.15.

Παρατήρηση: Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 0$ και σε κάθε τοπολογικό χώρο X έχουμε αντιστοιχίσει μία μοναδική αβελιανή ομάδα $H_n(X)$, έτσι ώστε σε κάθε συνεχή απεικόνιση του χώρου X στον χώρο Y να αντιστοιχεί ένας μοναδικός ομομορφισμός της ομάδας $H_n(X)$ στην ομάδα $H_n(Y)$, ο οποίος έχει τις "φυσικές" ιδιότητες που περιγράψαμε στις προτάσεις 15.4.11 και 15.4.12. Οι παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται στην θεωρία κατηγοριών **συναρτησιακότητα** του συναρτητή, ο οποίος αντιστοιχεί στους τοπολογικούς χώρους σε αβελιανές ομάδες και τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων σε ομομορφισμούς μεταξύ αβελιανών ομάδων.

Ακολούθως θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό ότι κάθε κυρτό υποσύνολο των Ευκλείδειων χώρων είναι χώρος ακυκλικός. Προηγείται η πραγμάτευση της έννοιας του κωνικού ομομορφισμού, η οποία είναι απαραίτητη για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού.

Λήμμα 15.4.13. *Έστω X ένα κυρτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^k$, $\sigma \in S_n(X)$ και $b \in X$. Τότε η απεικόνιση $con(b, \sigma) : \Delta^{n+1} \to X$, με*

$$con(b,\sigma)(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{cases} b, & x_0 = 1 \\ bx_0 + (1-x_0)\sigma(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{1-x_0}), & 0 \leq x_0 \neq 1 \end{cases}$$

είναι μια ιδιάζουσα $n+1$ αλυσίδα.

Απόδειξη: Αν $0 \leq x_0 < 1$, τότε $\frac{x_i}{1-x_0} \in \mathbb{I}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n+1$ και

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{1-x_0} = \frac{1}{1-x_0} \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$
$$= \frac{1}{1-x_0}(1-x_0) = 1,$$

άρα το $\sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{1-x_0}\right)$ είναι ένα στοιχείο του X. Επιπλέον $bx_0 + (1-x_0)\sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}\right) \in X$, λόγω της κυρτότητας του X, άρα η απεικόνιση $con(b, \sigma)$ είναι καλώς ορισμένη.

Η απεικόνιση $con(b, \sigma)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ του Δ^{n+1}, με $0 \leq x_0 < 1$. Αν $x_0 = 1$, επειδή το $\sigma(\Delta^n)$ είναι συμπαγές, άρα φραγμένο υπάρχει $M > 0$, ώστε $\|(1 - x_0)\sigma(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_0})\| \leq M\|1 - x_0\|$, συνεπώς $\lim\limits_{x_0 \to 1}(1 - x_0)\sigma\big(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0}\big) = 0$, άρα $\lim\limits_{x_0 \to 1} con(b, \sigma)(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = b$, άρα η $con(b, \sigma)$ είναι συνεχής και στο 1. Επομένως $con(b, \sigma) \in C_{n+1}(X)$. □

Ορισμός 15.4.10. Το $n + 1$ ιδιάζον πλέγμα $con(b, \sigma)$, το οποίο ορίζεται, όπως στο προηγηθέν λήμμα από το n ιδιάζον πλέγμα σ και το σημείο b ονομάζεται **κωνικό πλέγμα με βάση το σ και κορυφή το b.**

Ορισμός 15.4.11. Έστω X ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και $b \in X$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$S_n(X) \ni \sigma \mapsto con(b, \sigma) \in C_{n+1}(X),$$

την οποία επεκτείνουμε στον ομομορφισμό $c_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$. Ο c_n ονομάζεται n-οστός **κωνικός ομομορφισμός** του X με κορυφή το σημείο b.

Πρόταση 15.4.14. *Για κάθε $\sigma \in C_n(X)$ και για κάθε $n \geq 1$ ισχύει*

$$(\partial \circ c_n)(\sigma) + (c_{n-1} \circ \partial)(\sigma) = \sigma.$$

Επιπλέον ισχύει $(\partial \circ c_0)(x) = x - b$, όπου $x \in S_0(X) = X$.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{c_n} & C_{n+1}(X) \\ \Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow \partial \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{c_{n-1}} & C_n(X) \end{array}$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε την ισότητα για $\sigma \in S_n(X)$. Για να υπολογίσουμε το σύνορο του πλέγματος $c_n(\sigma)$ πρέπει να βρούμε τους περιορισμούς του στις όψεις του Δ^{n+1}. Προς τούτο έχουμε

$$\begin{aligned} \big(con(b, \sigma) \circ d_0\big)(x_0, \dots, x_n) &= \big(con(b, \sigma)\big)(0, x_0, \dots, x_n) \\ &= \sigma(x_0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

άρα $con(b, \sigma) \circ d_0 = \sigma$.
Αν $0 < i \leq n + 1$, τότε

$$\begin{aligned} \big(c_n(\sigma) \circ d_i\big)(x_0, \dots, x_n) &= \big(con(b, \sigma) \circ d_i\big)(x_0, \dots, x_n) \\ &= con(b, \sigma)(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- Αν $x_0 = 1$, τότε $\big(c_n(\sigma) \circ d_i\big)(x_0, \dots, x_n) = b$.

- Αν $x_0 \neq 1$, τότε

$$\big(c_n(\sigma)\circ d_i\big)(x_0,\ldots,x_n) = x_0 b + (1-x_0)\sigma\Big(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_{i-1}}{1-x_0},0,\frac{x_i}{1-x_0},\ldots,\frac{x_n}{1-x_0}\Big)$$
$$= x_0 b + (1-x_0)\big(\sigma\circ d_{i-1}\big)\Big(\frac{x_1}{1-x_0},\ldots,\frac{x_n}{1-x_0}\Big)$$
$$= c_{n-1}\big(\sigma\circ d_{i-1}\big)(x_0,\ldots,x_n).$$

Δηλαδή $c_n(\sigma)\circ d_0 = \sigma$ και $c_n(\sigma)\circ d_i = c_{n-1}(\sigma\circ d_{i-1})$, αν $i=1,\ldots,n$. Επομένως

$$\partial\big(c_n(\sigma)\big) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\big(c_n(\sigma)\circ d_i\big)$$
$$= \sigma + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\big(c_{n-1}(\sigma\circ d_{i-1})\big)$$
$$= \sigma - \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\big(c_{n-1}(\sigma\circ d_{i-1})\big)$$
$$= \sigma - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\big(c_{n-1}(\sigma\circ d_j)\big)$$
$$= \sigma - c_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\sigma\circ d_j)\Big)$$
$$= \sigma - c_{n-1}\big(\partial(\sigma)\big).$$

Άρα $(\partial\circ c_n)(\sigma) + (c_{n-1}\circ\partial)(\sigma) = \sigma$.

Επιπλέον, έστω $x\in S_0(X)=X$, τότε

$$con(b,x):\Delta^1\to X, \text{ με } con(b,x)(x_0,x_1) = \begin{cases} b & x_0 = 1 \\ x_0 b + (1-x_0)x & 0\le x_0 < 1 \end{cases},$$

άρα $x \xrightarrow{c_0} con(b,x)$, συνεπώς

$$(\partial\circ c_0)(x) = \partial(con(b,x)) = con(b,x)(0,1) - con(b,x)(1,0) = x - b.$$

□

Πρόταση 15.4.15. *Κάθε κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^k$ είναι χώρος ακυκλικός.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $n\ge 1$ και $\sigma\in Z_n(X)$, τότε $\partial(\sigma)=0$. Άρα

$$(\partial\circ c_n)(\sigma) + (c_{n-1}\circ\partial)(\sigma) = \sigma \Rightarrow \partial(c_n(\sigma)) = \sigma, \text{ άρα } \sigma\in B_n(X),$$

άρα $Z_n(X) = B_n(X)$. Συνεπώς $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \simeq \{0\}$. Επιπλέον ο χώρος X είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, άρα είναι δρομοσυνεκτικός, άρα $H_0(X)\simeq\mathbb{Z}$. Συνεπώς η ομολογία του X είναι η $\{\mathbb{Z},\{0\},\{0\},\ldots\}$, επομένως ο X είναι ακυκλικός.

□

Πόρισμα. *Οι Ευκλείδειοι χώροι* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *είναι ακυκλικοί.*

Η επινόηση της έννοιας των **αλυσιδωτά ομοτοπικών απεικονίσεων**, είναι απαραίτητη για την απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος της ιδιάζουσας ομολογίας, το οποίο ισχυρίζεται ότι οι ομοτοπικά ισοδύναμες απεικονίσεις εισάγουν στην ομολογία ίσους ομομομορφισμούς.

Ορισμός 15.4.12. Οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ λέγονται **αλυσιδωτά ομοτοπικές**, αν και μόνον, αν υπάρχει ακολουθία ομομορφισμών $T_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, ώστε

$$\delta \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial = f^n_\diamond - g^n_\diamond \tag{15.29}$$

για $n \geq 1$ και

$$\delta \circ T_0 = f^0_\diamond - g^0_\diamond, \tag{15.30}$$

όπου ∂ και δ είναι οι συνοριακοί ομομορφισμοί των συμπλεγμάτων $C(X)$ και $C(Y)$, αντιστοίχως. Στην περίπτωση που αληθεύουν οι σχέσεις (15.29) και (15.30) λέμε ότι και οι ακολουθίες $f^n_\diamond$ και $g^n_\diamond$ είναι **αλυσιδωτά ομοτοπικές ακολουθίες ομομορφισμών**.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow \cdots \\
& g^{n+1}_\diamond \Big\downarrow f^{n+1}_\diamond & \swarrow^{T_n} & g^n_\diamond \Big\downarrow f^n_\diamond & \swarrow^{T_{n-1}} & g^{n-1}_\diamond \Big\downarrow f^{n-1}_\diamond & \\
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & C_n(Y) & \xrightarrow{\delta} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
C_1(X) & \xrightarrow{\partial} & C_0(X) \\
\Big\downarrow & \swarrow_{T_0} & g^0_\diamond \Big\downarrow f^0_\diamond \\
C_1(Y) & \xrightarrow{\delta} & C_0(Y)
\end{array} .$$

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, μπορούμε στους ομομορφισμούς T να παραλείπουμε τους δείκτες, όπως κάναμε και με τους συνοριακούς ομομορφισμούς.
Θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τη σχέση (15.30) και να θεωρήσουμε ότι προκύπτει από την σχέση (15.29), γιατί $T_{-1} \circ \partial = T_{-1} \circ \hat{0} = \hat{0}$.

Πρόταση 15.4.16. *Αν οι συνεχείς απεικονίσεις* $f, g : X \to Y$ *είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές, τότε για κάθε* $n \geq 0$ *ισχύει:* $f^n_* = g^n_*$.

Απόδειξη:
- Για $n \geq 1$: Έστω $[a] \in H_n(X)$, άρα $a \in Z_n(X)$, άρα $\partial(a) = 0$ και $f_\diamond(a), g_\diamond(a) \in Z_n(Y)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_\diamond(a) - g_\diamond(a) &= \big(\delta \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial\big)(a) \\
&= \delta\big(T_n(a)\big) + T_{n-1}\big(\partial(a)\big) = \delta\big(T_n(a)\big) \\
&\Rightarrow f_\diamond(a) - g_\diamond(a) \in B_n(Y) \\
&\Rightarrow [f_\diamond(a)] = [g_\diamond(a)] \\
&\Rightarrow f^n_*([a]) = g^n_*[(a)] \\
&\Rightarrow f^n_* = g^n_* .
\end{aligned}$$

- Για $n = 0$: Έστω $[a] \in H_0(X)$, άρα $a \in Z_0(X)$, άρα $f_\diamond(a), g_\diamond(a) \in Z_0(Y)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} f^0_\diamond(a) - g^0_\diamond(a) = \delta\big(T_0(a)\big) & \\ & \Rightarrow f_\diamond(a) - g_\diamond(a) \in B_0(Y) \\ & \Rightarrow [f_\diamond(a)] = [g_\diamond(a)] \\ & \Rightarrow f^0_*([a]) = g^0_*([a]) \\ & \Rightarrow f^0_* = g^0_* \,. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 15.4.17. *Για τον οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο X οι συνεχείς απεικονίσεις $i_0 : X \to X \times \mathbb{I}$ και $i_1 : X \to X \times \mathbb{I}$, με $i_0(x) = (x, 0)$ και $i_1(x) = (x, 1)$, αντιστοίχως είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Διευκρινίζουμε ότι στην απόδειξη που ακολουθεί τους συνοριακούς ομομορφισμούς όλων των συμπλεγμάτων, χάριν απλότητας τους συμβολίζουμε με ∂.
Αρχικά ορίζουμε $T_0 : S_0(X) \to C_1(X \times \mathbb{I})$, με $T_0(x) = x \times \mathbb{I}$ και επεκτείνουμε γραμμικά σ' ολόκληρο το $C_0(X)$. Το $x \times \mathbb{I}$ είναι ένα ιδιάζον 1-πλέγμα στον χώρο $X \times \mathbb{I}$, γιατί είναι ο δρόμος $\gamma : \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$, με $\gamma(t) = (x, t)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \partial\big(T_0(x)\big) &= \partial\big(x \times \mathbb{I}\big) \\ &= (x, 1) - (x, 0) \\ &= (i_1)^1_\diamond(x) - (i_0)^1_\diamond(x). \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, και αν $(f \times \mathbb{I})^1_\diamond : C_1(X \times \mathbb{I}) \to C_1(Y \times \mathbb{I})$ είναι ο ομομορφισμός που επάγεται από την συνεχή απεικόνιση $f \times \mathbb{I} : X \times \mathbb{I} \to Y \times \mathbb{I}$, με $(f \times \mathbb{I})(x, t) = (f(x), t)$, τότε για ένα 0-πλέγμα x του X έχουμε

$$\begin{aligned} \big((f \times \mathbb{I})^1_\diamond \circ T_0\big)(x) &= (f \times \mathbb{I}) \circ (x \times \mathbb{I}) \\ &= f(x) \times \mathbb{I} \\ &= T_0\big(f(x)\big) \\ &= (T_0 \circ f^1_\diamond)(x). \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε ορίσει για όλους τους χώρους X και για κάθε $j \leq q - 1$ ομομορφισμούς $T_j : C_j(X) \to C_{j+1}(X \times \mathbb{I})$, οι οποίοι έχουν τις ιδιότητες:

$$(\mathbf{a}):\ \partial \circ T_j + T_{j-1} \circ \partial = (i_1)^j_\diamond - (i_0)^j_\diamond$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{j+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_j(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{j-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle (i_1)^{j+1}_\diamond} \downarrow {\scriptstyle (i_0)^{j+1}_\diamond} & \swarrow_{T_j} & {\scriptstyle (i_1)^{j}_\diamond} \downarrow {\scriptstyle (i_0)^{j}_\diamond} & \swarrow_{T_{j-1}} & {\scriptstyle (i_1)^{j-1}_\diamond} \downarrow {\scriptstyle (i_0)^{j-1}_\diamond} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{j+1}(X \times \mathbb{I}) & \xrightarrow{\partial} & C_j(X \times \mathbb{I}) & \xrightarrow{\partial} & C_{j-1}(X \times \mathbb{I}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

και για οποιαδήποτε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ έχουμε

$$(\mathbf{b}):\ T_j \circ f_\diamond^j = (f \times \mathbb{I})_\diamond^{j+1} \circ T_j.$$

$$\begin{array}{ccccc} C_j(X) & \xrightarrow{f_\diamond^j} & C_i(Y) & \xrightarrow{T_j} & C_{j+1}(Y \times \mathbb{I}) \\ \downarrow T_j & & & \nearrow (f\times\mathbb{I})_\diamond^{j+1} & \\ C_{j+1}(X \times \mathbb{I}) & & & & \end{array} .$$

Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε για $j = q$ είναι η ιδιότητα **a**. Την ιδιότητα **b** θα την αποδείξουμε για $j = q$, προκειμένου να την χρησιμοποιήσουμε ως βοηθητικό βήμα για την απόδειξη της **a**.
Από την **a** για $j = q - 1$ και, επειδή προσθέτως το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό για $i = 0, 1$

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{q-1}(X) \\ \downarrow (i_i)_\diamond^q & & \downarrow (i_i)_\diamond^{q-1} \\ C_q(X \times \mathbb{I}) & \xrightarrow{\partial} & C_{q-1}(X \times \mathbb{I}) \end{array}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \partial\big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q\big) &= \big((i_1)_\diamond^{q-1} - (i_0)_\diamond^{q-1}\big) \circ \partial \\ &= \big(\partial \circ T_{q-1} - T_{q-2} \circ \partial\big) \circ \partial \\ &= \partial \circ T_{q-1} \circ \partial, \end{aligned}$$

άρα

$$\partial \circ \big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q - T_{q-1} \circ \partial\big) = 0 \tag{15.31}$$

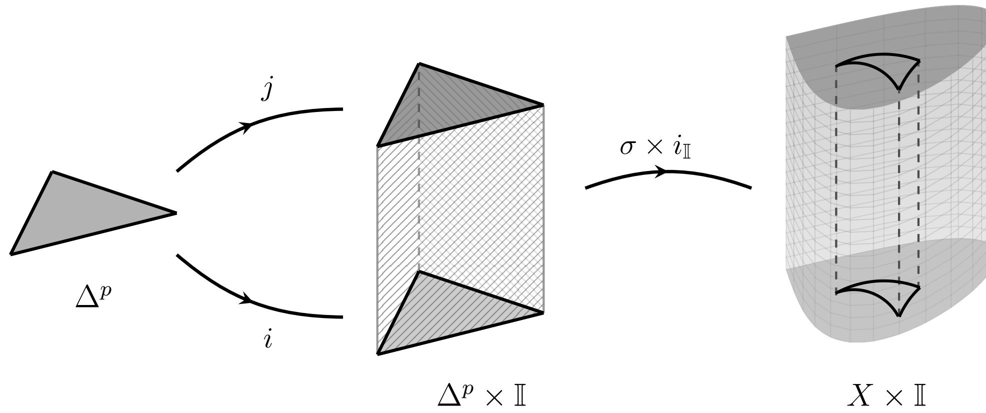
για όλους τους χώρους X.
Για να κατασκευάσουμε την T_q για όλους τους χώρους X, υποθέτουμε αρχικά ότι $X = \Delta^q$. Τότε η ταυτοτική απεικόνιση $\delta_q : \Delta^q \to \Delta^q$ είναι ένα ιδιάζον q-πλέγμα στον χώρο Δ^q. Άρα, λόγω της (15.31) το $\big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q - T_{q-1} \circ \partial\big)(\delta_q)$ είναι ένας q-κύκλος του χώρου $\Delta^q \times \mathbb{I}$. Ο χώρος $\Delta^q \times \mathbb{I}$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου, άρα είναι ακυκλικός χώρος, επομένως το $\big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q - T_{q-1} \circ \partial\big)(\delta_q)$ είναι σύνορο μιας $q+1$ αλυσίδας, δηλαδή, υπάρχει $w \in C_{q+1}(\Delta^q \times \mathbb{I})$, ώστε $\partial(w) = \big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q - T_{q-1} \circ \partial\big)(\delta_q)$.
Ορίζουμε $T_q(\delta_q) = w$, επομένως

$$\big((\partial \circ T_q) + (T_{q-1}\partial)\big)(\delta_q) = \big((i_1)_\diamond^q - (i_0)_\diamond^q\big)(\delta_q) \tag{15.32}$$

Τότε για κάθε ιδιάζον σ-πλέγμα του X ορίζουμε

$$T_q(\sigma) = \Big((\sigma \times \mathbb{I})_\diamond^{q+1} \circ T_q\Big)(\delta_q)$$

$$C_q(\Delta^q) \xrightarrow{T_q} C_{q+1}(\Delta^q \times \mathbb{I}) \xrightarrow{(\sigma\times\mathbb{I})_\diamond^{q+1}} C_{q+1}(X \times \mathbb{I})$$



Σχήμα 15.1

και επεκτείνουμε γραμμικά σε έναν ομομορφισμό $T_q : C_q(X) \to C_{q+1}(X \times \mathbb{I})$.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\big(T_q \circ f^q_\diamond\big)(\sigma) &= T_q\big(f(\sigma)\big) \\
&= \Big(\big(f(\sigma) \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond \circ T_q\Big)(\delta_q) \\
&= \Big(\big(f(\sigma) \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond\Big)\big(T_q(\delta_q)\big) \\
&= \Big(\big(f \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond\Big)\big(T_q(\sigma)\big),
\end{aligned}$$

άρα

$$\big(T_q \circ f^q_\diamond\big)(\sigma) = \Big(\big(f \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond \circ T_q\Big)(\sigma), \tag{15.33}$$

άρα η ιδιότητα **b** ικανοποιείται για $j = q$.
Για την απόδειξη της ιδιότητας **a** για $j = q$ εφαρμόζουμε την (15.33), βάζοντας στη θέση της $f : X \to Y$ την $\sigma : \Delta^q \to X$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\big(\partial \circ T_q\big)(\sigma) &= \Big(\partial \circ \big(\sigma \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond\Big)(T_q(\delta_q)) \\
&= \big(\sigma \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond\Big(\big(\partial \circ T_q\big)(\delta_q)\Big).
\end{aligned}$$

Γράφουμε $\sigma = \sigma^q_\diamond(\delta_q)$ και έχουμε $\partial \circ \sigma = \big(\partial \circ \sigma^q_\diamond\big)(\delta_q) = \sigma^q_\diamond\big(\partial(\delta_q)\big)$, άρα

$$\begin{aligned}
\big(T_{q-1} \circ \partial\big) &= T_{q-1}\Big(\sigma^q_\diamond\big(\partial(\delta_q)\big)\Big) \\
&= \big(\sigma \times \mathbb{I}\big)^{q+1}_\diamond\Big(T_{q-1}\big(\partial(\delta_q)\big)\Big),
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}\big(\partial\circ T_q+T_{q-1}\circ\partial\big)(\sigma) &= \big(\sigma\times\mathbb{I}\big)_{\diamond}^{q+1}\Big(\big(\partial\circ T_q+T_{q-1}\circ\partial\big)(\delta_q)\Big)\\ &= \big(\sigma\times\mathbb{I}\big)_{\diamond}^{q+1}\Big(\big((i_1)_{\diamond}^q-(i_0)_{\diamond}^q\big)(\delta_q)\Big)\\ &= \big((i_1)_{\diamond}^q-(i_0)_{\diamond}^q\big)\big(\sigma_{\diamond}^q(\delta_q)\big)\\ &= \big((i_1)_{\diamond}^q-(i_0)_{\diamond}^q\big)(\sigma).\end{aligned}$$

Συνεπώς η επαγωγική κατασκευή των ομομορφισμών $T_q : C_q(X)\to C_{q+1}(X)$ ολοκληρώθηκε, άρα οι απεικονίσεις i_0 και i_1 είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές. □

Πόρισμα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και οι συνεχείς απεικονίσεις*

$$i : X\to X\times\mathbb{I},\ \text{με}\ i(x)=(x,0)\ \text{και}\ j : X\to X\times\mathbb{I},\ \text{με}\ j(x)=(x,1).$$

Τότε για κάθε $n\geq 0$ ισχύει $i_*^n=j_*^n$.

Πρόταση 15.4.18. *Αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f,g : X\to Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες, τότε για κάθε $n\geq 0$ ισχύει $f_*^n=g_*^n$.*

Απόδειξη: Επειδή οι f,g είναι ομοτοπικά ισοδύναμες υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X\times\mathbb{I}\to Y$, με $H(x,0)=f(x)$ και $H(x,1)=g(x)$ για κάθε $x\in X$. Άρα $f=H\circ i_0$ και $g=H\circ i_1$, όπου $i_0 : X\to X\times\mathbb{I}$, με $i_0(x)=(x,0)$ και $i_1 : X\to X\times\mathbb{I}$, με $i_1(x)=(x,1)$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $(i_0)_*^n=(i_1)_*^n$ για κάθε $n\geq 0$, επομένως

$$\begin{aligned}f_*^n &= \big(H\circ i_0\big)_*^n\\ &= H_*^n\circ(i_0)_*^n\\ &= H_*^n\circ(i_1)_*^n\\ &= \big(H\circ i_1\big)_*^n=g_*^n\,.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 15.4.19. *Αν οι τοπολογικοί χώροι X,Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, τότε για κάθε $n\geq 0$ ισχύει $H_n(X)\simeq H_n(Y)$.*

Απόδειξη: Η ομοτοπική ισοδυναμία των χώρων X,Y, συνεπάγεται ότι υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X\to Y$ και $g : Y\to X$, ώστε $g\circ f\approx i_X$ και $f\circ g\approx i_Y$. Άρα

$$g_*^n\circ f_*^n=(i_X)_*^n \tag{15.34}$$

και

$$f_*^n\circ g_*^n=(i_Y)_*^n \tag{15.35}$$

Η (15.34), συνεπάγεται ότι η f_*^n είναι 1-1 και η (15.35), συνεπάγεται ότι η f_*^n είναι επί. Συνεπώς η f_*^n είναι ισομορφισμός, άρα $H_n(X)\simeq H_n(Y)$. □

Παρατήρηση: Με άλλα λόγια οι ομοτοπικές ισοδυναμίες, επάγουν στην ομολογία ισομορφισμούς, δηλαδή, αν η $f : X \to Y$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία, τότε για κάθε $n \geq 0$, ο $f_*^n : H_n(X) \to H_n(X)$ είναι ισομορφισμός.

Επειδή ο ομοιομορφισμός συνεπάγεται την ομοτοπική ισοδυναμία έχουμε το

Πόρισμα. *Αν $X \cong Y$, τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $H_n(X) \simeq H_n(Y)$.*

Επειδή οι συσταλτοί χώροι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι με έναν μονοσημειακό χώρο ισχύει το ακόλουθο πόρισμα

Πόρισμα. *Αν ο χώρος X είναι συσταλτός, τότε ισχύει $H_n(X) = \{\mathbb{Z}, \{0\}, \{0\}, \ldots\}$ για κάθε $n \geq 0$, δηλαδή ο X είναι ακυκλικός.*

Πρόταση 15.4.20. *Αν ο χώρος A είναι συστολή παραμόρφωσης του χώρου X, τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει στην ομολογία ισομορφισμό, δηλαδή η $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ είναι για κάθε $n \geq 0$ ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Από την απόδειξη της πρότασης 10.3.9 έχουμε ότι υπάρχει συστολή $r : X \to A$, ώστε $i \circ r \approx i_X$ και $r \circ i \approx i_A$. Άρα $i_* \circ r_* = (i_X)_*$ και $r_* \circ i_* = (i_A)_*$, επομένως ο ομομορφισμός $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ είναι ισομορφισμός. □

Παρατηρήσεις:

1. Γνωστοί συσταλτοί χώροι είναι οι $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{D}^k$, $\mathbb{B}^k$ και γενικά κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Συνεπώς, αν ονομάσουμε X έναν οποιονδήποτε εξ αυτών έχουμε

$$H(X) = \{\mathbb{Z}, \{0\}, \{0\}, \ldots\}.$$

2. Αν δύο χώροι έχουν την ίδια ομολογία, δηλαδή έχουν όλες τις ομολογικές ομάδες τους ισόμορφες, τότε δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφοι.

   Αντιπαράδειγμα: Αν $X = \{x\}$, τότε $H(X) = \{\mathbb{Z}, 0, 0, \ldots\} = H(\mathbb{R}^k)$, αλλά $X \not\cong \mathbb{R}^k$.

Η ομάδα $H_n(X)$ είναι αβελιανή για κάθε $n \geq 0$. Αν, επιπλέον είναι και πεπερασμένα παραγόμενη, τότε από το θεμελιώδες θεώρημα των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων είναι ισόμορφη μία ομάδα της μορφής

$$T \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{k}, \tag{15.36}$$

όπου T μία ομάδα στρέψης. Υπενθυμίζουμε ότι μία αβελιανή ομάδα T ονομάζεται **ομάδα στρέψης**, αν και μόνον, αν για κάθε $a \in T$ υπάρχει θετικός ακέραιος n, ώστε $na = 0$. Για παράδειγμα, εκτός της τετριμμένης ομάδες στρέψης είναι οι $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$. Αν στην σχέση (15.36) είναι $T = \{0\}$, τότε η αβελιανή ομάδα είναι ελεύθερη.
Είδαμε ότι $H_1(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$. Στα επόμενα θα δούμε ότι, αν από το επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) αφαιρέσουμε ένα σημείο, δηλαδή δημιουργήσουμε μία τρύπα, τότε η πρώτη ομάδα ομολογίας του χώρου που προκύπτει είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$. Αν αφαιρέσουμε n διαφορετικά σημεία, δηλαδή δημιουργήσουμε n τρύπες, τότε η πρώτη ομάδα ομολογίας του χώρου που προκύπτει είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (ο αριθμός των προσθετέων $\mathbb{Z}$ είναι n). Φυσικά δεν μπορούμε να μιλάμε για "τρύπες" σε χώρους, οι οποίοι είναι εκτός της εποπτείας μας. Σε

αυτή όμως την περίπτωση μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της "τρύπας", ορίζοντας ως n-**διάστατη τρύπα** στον χώρο X το πλήθος των προσθετέων $\mathbb{Z}$ στην $H_n(X)$. Τον αριθμό αυτόν ονομάζουμε και **αριθμό Betti** [5] **του χώρου** X **στην διάσταση** n.

15.5 Σχετική ιδιάζουσα ομολογία

Η σχετική ιδιάζουσα ομολογία ή αλλιώς η ομολογία των τοπολογικών ζευγών είναι, όπως θα δούμε ένα εργαλείο "εκ των ων ουκ άνευ", για τον υπολογισμό της ομολογίας των τοπολογικών χώρων. Αποτελεί μια καθαρά αλγεβρική επινόηση, η οποία αποκτά γεωμετρική υπόσταση στην περίπτωση των λεγόμενων καλών ζευγών.

Ορισμός 15.5.1. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και A υπόχωρος του X, τότε το διατεταγμένο ζεύγος (X, A) ονομάζεται **τοπολογικό ζεύγος**.

Παρατήρηση: Οι εστιγμένοι χώροι (X, x_0) που συναντήσαμε στην παράγραφο 12.2 είναι τοπολογικά ζεύγη.

Αν A είναι ένας υπόχωρος του τοπολογικού χώρου X, τότε η ομάδα $C_n(A)$ είναι υποομάδα της $C_n(X)$, γιατί μπορούμε να ταυτίσουμε το ιδιάζον πλέγμα $\gamma : \Delta^n \to X$, όπου $\gamma(\Delta^n) \subseteq A$, με το ιδιάζον πλέγμα $\gamma' : \Delta^n \to A$, για το οποίο $\gamma'(x) = \gamma(x)$ για κάθε $x \in \Delta^n$. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 15.5.2. Έστω A υπόχωρος του χώρου X. Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα $C_n(A)$, με βάση το σύνολο των ιδιαζόντων n-πλεγμάτων του χώρου A είναι μια υποομάδα της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $C_n(X)$. Ορίζουμε την ομάδα πηλίκο $C_n(X)/C_n(A)$, την οποία ονομάζουμε **ομάδα των σχετικών** n**-αλυσίδων του** $X(\mod A)$ και συμβολίζουμε με $C_n(X, A)$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν $\gamma \in C_n(X)$, τότε

$$\langle\gamma\rangle \in C_n(X, A) \Leftrightarrow \langle\gamma\rangle = \{\gamma + \alpha/\alpha \in C_n(A)\} = \gamma + C_n(A).$$

   Επομένως

   α΄) $\langle\gamma\rangle = \langle\beta\rangle \Leftrightarrow \gamma - \beta \in C_n(A)$.

   β΄) $\langle 0\rangle_n = C_n(A)$.

2. Συμφωνούμε $C_n(X, \varnothing) = C_n(X)$ και $C_n(X, A) = \{0\}$, αν $n < 0$.

Πρόταση 15.5.1. *Για κάθε* $n \geq 0$ *η απεικόνιση* $\partial'_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, *με*

$$\partial'_n(\langle\gamma\rangle) = \langle\partial_n(\gamma)\rangle$$

είναι ένας συνοριακός ομομορφισμός.

[5] Enrico Betti (1823-1892): Ιταλός μαθηματικός.

Απόδειξη: Η απεικόνιση αυτή είναι καλώς ορισμένη, γιατί

$$\begin{aligned}\langle\gamma\rangle = \langle\beta\rangle &\Rightarrow \gamma - \beta \in C_n(A)\\ &\Rightarrow \partial_n(\gamma) - \partial_n(\beta) = \partial_n(\gamma - \beta) \in C_{n-1}(A)\\ &\Rightarrow \langle\partial_n(\gamma)\rangle = \langle\partial_n(\beta)\rangle\\ &\Rightarrow \partial'_n(\langle\gamma\rangle) = \partial'_n(\langle\beta\rangle)\,.\end{aligned}$$

Η ∂'_n είναι ένας ομομορφισμός, γιατί

$$\begin{aligned}\partial'_n(\langle\gamma\rangle + \langle\beta\rangle) &= \partial'_n(\langle\gamma+\beta\rangle)\\ &= \langle\partial_n(\gamma+\beta)\rangle\\ &= \langle\partial_n(\gamma) + \partial_n(\beta)\rangle\\ &= \langle\partial_n(\gamma)\rangle + \langle\partial_n(\beta)\rangle\\ &= \partial'_n(\langle\gamma\rangle) + \partial'_n(\langle\beta\rangle)\,.\end{aligned}$$

Τέλος η ∂'_n είναι ένας συνοριακός ομομορφισμός, γιατί

$$\begin{aligned}(\partial'_n \circ \partial'_{n+1})(\langle\gamma\rangle) &= \langle(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\gamma)\rangle\\ &= \langle 0\rangle_{n-1} = C_{n-1}(A).\end{aligned}$$

□

Πόρισμα. *Η ακολουθία* $(C_n(X,A), \partial'_n)$ *είναι ένα σύμπλεγμα.*

Παρατήρηση: Το μέρος του συμπλέγματος $C_n(X,A)$ για $n < -1$ το απορρίπτουμε, ως τετριμμένο.

Ορισμός 15.5.3. Για κάθε $n \geq 0$ την ομάδα

$$Z_n(X,A) = \operatorname{Ker}\partial'_n$$

ονομάζουμε **ομάδα των σχετικών ιδιαζόντων n-κύκλων του X**$(mod A)$.

Ορισμός 15.5.4. Για κάθε $n \geq 0$ την ομάδα

$$B_n(X,A) = \operatorname{Im}\partial'_n$$

ονομάζουμε **ομάδα των σχετικών ιδιαζόντων n-συνόρων** του **X**$(mod A)$.

Πρόταση 15.5.2. *Για κάθε* $n \geq 0$ *ισχύει*

$$Z_n(X,A) = \{\langle\gamma\rangle \in C_n(X,A)/\gamma \in C_n(X) \wedge \partial(\gamma) \in C_{n-1}(A)\}$$

.

Απόδειξη: Θέτουμε $K = \{\langle\gamma\rangle \in C_n(X,A)/\gamma \in C_n(X) \wedge \partial(\gamma) \in C_{n-1}(A)\}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\langle\gamma\rangle \in Z_n(X,A) &\Leftrightarrow \gamma \in C_n(X) \wedge \partial'_n\big(\langle\gamma\rangle\big) = \langle 0\rangle_{n-1}\\ &\Leftrightarrow \gamma \in C_n(X) \wedge \langle\partial_n(\gamma)\rangle = \langle 0\rangle_{n-1}\\ &\Leftrightarrow \gamma \in C_n(X) \wedge \partial_n(\gamma) \in C_{n-1}(A)\\ &\Leftrightarrow \langle\gamma\rangle \in K,\end{aligned}$$

άρα $Z_n(X,A) = K$. □

Πρόταση 15.5.3. *Για κάθε* $n \geq 0$ *ισχύει*

$$B_n(X,A) = \{\langle\gamma\rangle \in C_n(X,A)/\exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \beta \in C_n(A); \gamma = \partial_{n+1}(\alpha) - \beta\}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $L = \{\langle\gamma\rangle \in C_n(X,A)/\exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \beta \in C_n(A); \gamma = \partial_{n+1}(\alpha) - \beta\}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\langle\gamma\rangle \in B_n(X,A) &\Leftrightarrow \exists\langle\alpha\rangle \in C_{n+1}(X,A); \langle\gamma\rangle = \partial'_{n+1}\big(\langle\alpha\rangle\big)\\ &\Leftrightarrow \exists\langle\alpha\rangle \in C_{n+1}(X,A); \langle\gamma\rangle = \langle\partial_{n+1}(\alpha)\rangle\\ &\Leftrightarrow \exists\alpha \in C_{n+1}(X); \partial_{n+1}(\alpha) - \gamma \in C_n(A)\\ &\Leftrightarrow \exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \beta \in C_n(A); \partial_{n+1}(\alpha) - \gamma = \beta\\ &\Leftrightarrow \exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \beta \in C_n(A); \gamma = \partial_{n+1}(\alpha) - \beta\\ &\Leftrightarrow \langle\gamma\rangle \in L\end{aligned}$$

άρα $B_n(X,A) = L$. □

Ορισμός 15.5.5. Αν (X,A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος, τότε για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε, ως **n-οστή ομάδα ιδιάζουσας σχετικής ομολογίας** την ομάδα πηλίκο

$$H_n(X,A) = \operatorname{Ker}\partial'_n/\operatorname{Im}\partial'_{n+1} \simeq Z_n(X,A)/B_n(X,A).$$

Πρόταση 15.5.4. *Για κάθε* $n \geq 0$ *ισχύει* $H_n(X,X) \simeq \{0\}$.

Απόδειξη: Είναι $C_n(X,X) = C_n(X)/C_n(X) \simeq \{0\}$, άρα $Z_n(X,X) \simeq \{0\}$ και $B_n(X,X) \simeq \{0\}$, συνεπώς $H_n(X,X) \simeq \{0\}$. □

Παρατήρηση: Τα στοιχεία της $H_n(X,A)$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας. Για κάθε $\langle\gamma\rangle \in Z_n(X,A)$, δηλαδή για κάθε $\gamma \in C_n(X)$, με $\partial(\gamma) \in C_{n-1}(A)$ έχουμε μία κλάση ισοδυναμίας, η οποία ανήκει στην $H_n(X,A)$, και την οποία συμβολίζουμε με $[\gamma]$, δηλαδή $[\gamma] = \langle\gamma\rangle + B_n(X,A)$. Επομένως, αν $[\beta],[\gamma] \in H_n(X,A)$, τότε

$$\begin{aligned}[\beta] = [\gamma] &\Leftrightarrow \langle\beta\rangle - \langle\gamma\rangle \in B_n(X,A)\\ &\Leftrightarrow \langle\beta - \gamma\rangle \in B_n(X,A)\\ &\Leftrightarrow \exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \delta \in C_n(A); \beta - \gamma = \partial_{n+1}(\alpha) - \delta.\end{aligned}$$

Πρόταση 15.5.5. *Αν το* (X, A) *είναι ένα τοπολογικό ζεύγος, τότε*

α΄) Οι απεικονίσεις $i_\diamond^n : C_n(A) \to C_n(X)$ *που επάγονται από την ένθεση* $i : A \hookrightarrow X$ *αποτελούν μια ακολουθία αλυσιδωτών ομομορφισμών. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα,*

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{i_\diamond^n} & C_n(X) \\ \Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow \partial \\ C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_\diamond^{n-1}} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

είναι μεταθετικό $(\partial \circ i_\diamond^n = i_\diamond^{n-1} \circ \partial)$.

β΄) Οι απεικονίσεις $p_n : C_n(X) \to C_n(X, A)$, *με*

$$p_n(\gamma) = \langle \gamma \rangle$$

είναι ακολουθίες αλυσιδωτών ομομορφισμών. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{p_n} & C_n(X, A) \\ \Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow \partial' \\ C_{n_1}(A) & \xrightarrow{p_{n-1}} & C_{n-1}(X, A) \end{array} ,$$

είναι μεταθετικό $(\partial' \circ p_n = p_{n-1} \circ \partial)$ *και*

γ΄) Για κάθε n *η ακολουθία*

$$\{0\} \to C_n(A) \xrightarrow{i_\diamond^n} C_n(X) \xrightarrow{p_n} C_n(X, A) \to \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής.

Απόδειξη: α΄) Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 15.4.8, επειδή η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ είναι συνεχής απεικόνιση.

β΄)

$$\begin{aligned} \alpha, \beta \in C_n(X) \Rightarrow p_n(\alpha + \beta) &= \langle a + \beta \rangle \\ &= \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle \\ &= p_n(\alpha) + p_n(\alpha)\,, \end{aligned}$$

άρα η p_n είναι ομομορφισμός. Επιπλέον

$$\begin{aligned} p_{n-1}(\partial(\alpha)) &= \langle \partial(\alpha) \rangle \\ &= \partial'(\langle \alpha \rangle) \\ &= \partial'(p_n(\alpha))\,, \end{aligned}$$

άρα $p_{n-1} \circ \partial = \partial' \circ p_n$.

γ΄) Έστω $\langle\gamma\rangle \in C_n(X, A)$, τότε $\langle\gamma\rangle = p_n(\gamma)$, όπου $\gamma \in C_n(X)$, άρα η p_n είναι επί. Έστω $\sigma \in S_n(A)$, τότε $i_\diamond^n(\sigma) \in C_n(A)$ και $i_\diamond^n(\sigma)(x_0, \dots, x_n) = i(\sigma(x_0, \dots, x_n)) = \sigma(x_0, \dots, x_n)$, άρα $i_\diamond^n(\sigma) = \sigma$ για κάθε $\sigma \in S_n(A)$. Έστω ότι $\alpha, \beta \in C_n(A) \setminus \{0\}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι κ, λ, μοναδικοί ακέραιοι $r_1, \dots, r_\kappa, m_1, \dots, m_\lambda$ και μοναδικά $\sigma_1, \dots, \sigma_\kappa, \sigma'_1, \dots, \sigma'_\lambda \in S_n(A)$, ώστε $\alpha = r_1\sigma_1 + \cdots + r_\kappa\sigma_\kappa$ και $\beta = m_1\sigma'_1 + \cdots + m_\lambda\sigma'_\lambda$. Επομένως

$$i_\diamond^n(\alpha) = r_1 i_\diamond^n(\sigma_1) + \cdots + r_\kappa i_\diamond^n(\sigma_\kappa) = r_1\sigma_1 + \cdots + r_\kappa\sigma_\kappa$$

και

$$i_\diamond^n(\beta) = m_1 i_\diamond^n(\sigma'_1) + \cdots + r_\lambda i_\diamond^n(\sigma'_\lambda) = m_1\sigma'_1 + \cdots + m_\lambda\sigma'_\lambda.$$

Άρα, αν $i_\diamond^n(\alpha) = i_\diamond^n(\beta)$, τότε $\kappa = \lambda$ και $r_i = m_i, \sigma_i = \sigma'_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$, άρα $\alpha = \beta$. Επιπλέον, αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} i_\diamond^n(a) = i_\diamond^n(\beta) &\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{\lambda} m_i s'_i \\ &\Rightarrow m_1 = \cdots = m_\lambda = 0, \end{aligned}$$

άτοπο, άρα, αν $0 = \alpha \neq \beta$, τότε $i_\diamond^n(\alpha) \neq i_\diamond^n(\beta)$, συνεπώς η $i_\diamond$ είναι 1-1. Το $\operatorname{Im} i_\diamond^n = \operatorname{Ker} p_n$ είναι άμεσο, επομένως η ακολουθία

$$\{0\} \to C_n(A) \xrightarrow{i_\diamond^n} C_n(X) \xrightarrow{p_n} C_n(X, A) \to \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής.

□

Παρατήρηση: Ο $i_\diamond^n$ είναι μονομορφισμός, ενώ ο i_*^n δεν είναι απαραίτητα μονομορφισμός. Για την τεκμηρίωση του ισχυρισμού δανειζόμαστε από τα επόμενα το ότι $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Ο ομομορφισμός $i_*^1 : H_1(\mathbb{S}^1) \to H_1(\mathbb{D}^2)$ που εισάγει η ένθεση $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ είναι ο τετριμμένος, γιατί $H_1(\mathbb{D}^2) = \{0\}$, επομένως η i_*^n δεν είναι μονομορφισμός.

Στο προοίμιο της παραγράφου χαρακτηρίσαμε την σχετική ομολογία ως μια καθαρά αλγεβρική επινόηση. Μετά την προηγούμενη πρόταση φαίνεται ότι η ομάδα $C_n(X, A)$ παίζει τον ρόλο της ομάδας C_n του θεωρήματος ακριβούς τριγώνου της ομολογικής άλγεβρας (πρόταση 15.2.20). Έτσι είναι άμεση συνέπεια η επόμενη πρόταση, η οποία είναι πολύ σημαντική για την ιδιάζουσα ομολογία.

Πρόταση 15.5.6. ***(Θεώρημα ακριβούς τριγώνου για την ιδιάζουσα ομολογία)*** *Για το οποιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος (X, A) και για κάθε n, υπάρχει συνδετικός ομομορφισμός d_n, ώστε η παρακάτω ακολουθία*

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*^n} H_n(X) \xrightarrow{(p_n)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*^{n-1}} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

να είναι ακριβής.

Παρατήρηση: Από την πιο πάνω ακριβή ακολουθία φαίνεται ότι οι ομάδες $H_n(X,A)$ "μετρούν" τη διαφορά μεταξύ των ομάδων $H_n(X)$ και $H_n(A)$. Αν $H_n(X,A)=\{0\}$ για κάθε n, τότε ο ομομορφισμός που επάγει η ένθεση $i: A\hookrightarrow X$ στις ομάδες $H_n(A)$ και $H_n(X)$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $H_n(A)\simeq H_n(X)$.

Παραδείγματα 15.5.1.

1. Για κάθε $q>1$ και για κάθε $n>1$ ισχύει
$$H_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1})\simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$
Πράγματι, επειδή $q>1$ και ο χώρος $\mathbb{D}^n$, $n>1$ είναι συσταλτός, είναι $H_{q-1}(\mathbb{D}^n)=H_q(\mathbb{D}^n)\simeq\{0\}$. Συνεπώς, από την αμέσως προηγούμενη πρόταση, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία
$$\begin{array}{ccccccc} H_q(\mathbb{D}^n) & \xrightarrow{(p_q)_*} & H_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{d_q} & H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{(i_{q-1})_*} & H_{q-1}(\mathbb{D}^n) \\ \downarrow\simeq & & & & & & \downarrow\simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array}$$
είναι ακριβής. Επομένως ο ενδιάμεσος ομομορφισμός d_q είναι ισομορφισμός, δηλαδή
$$H_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1})\simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

2. Για κάθε $n\geq 2$ και $q>1$ ισχύει $H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^{n-1})\simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Πράγματι για το ζεύγος $(\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^{n-1})$ έχουμε την παρακάτω ακριβή ακολουθία
$$H_q(\mathbb{R}^n)\to H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^{n-1})\to H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})\to H_{q-1}(\mathbb{R}^n).$$
Επειδή $H_q(\mathbb{R}^n)\simeq H_{q-1}(\mathbb{R}^n)\simeq\{0\}$ έχουμε $H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^{n-1})\simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Πρόταση 15.5.7. *Αν ο A είναι συστολή του X, τότε για κάθε n ισχύει*
$$H_n(X)\simeq H_n(A)\oplus H_n(X,A).$$

Απόδειξη: Επειδή ο A είναι συστολή του X, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r: X\to A$, ώστε $r\circ i=i_A$, όπου i είναι η ένθεση του A στον X. Για τον ομομορφισμό $r_*^n: H_n(X)\to H_n(A)$ που επάγει η r στην n-οστή ομολογία ισχύει
$$r_*^n\circ i_*^n=(i_A)_*^n, \tag{15.37}$$
όπου $(i_A)_*^n$ είναι ο ομομορφισμός που επάγει η ταυτοτική απεικόνιση i_A στην n-οστή ομολογία. Άρα η i_*^n είναι 1-1 για κάθε n. Από την αμέσως προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η ακολουθία
$$\cdots\to H_n(A)\xrightarrow{i_*^n} H_n(X)\xrightarrow{p_*^n} H_n(X,A)\xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A)\xrightarrow{i_*^{n-1}} H_{n-1}(X)\to\cdots$$
είναι ακριβής. Επειδή οι i_*^{n-1} και i_*^n είναι 1-1 έχουμε $\{0\}=\operatorname{Ker} i_*^{n-1}=\operatorname{Im} d_n$ και $\{0\}=\operatorname{Ker} i_*^n=\operatorname{Im} d_{n+1}$. Συνεπώς η ακολουθία

$$\{0\} \to H_n(A) \xrightarrow{i_*^n} H_n(X) \xrightarrow{p_*^n} H_n(X,A) \to \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής. Από την πρόταση 15.2.22 και λόγω της (15.37), συμπεραίνουμε ότι

$$H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X,A).$$

□

Παρατήρηση: Αν το A είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε $A \approx X$, επομένως $H_n(A) \simeq H_n(X)$. Αφετέρου το A είναι συστολή του X, επομένως $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X,A)$, άρα $H_n(X,A) \simeq \{0\}$.
Εφαρμογή: $H_n(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n \geq 0$.

Πρόταση 15.5.8. *Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$, τότε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει*

$$H_n(X,x_0) \simeq H_n(X).$$

Απόδειξη: Από την πρόταση 15.4.3 έχουμε ότι $H_n(x_0) = \{0\}$. Από δε την πρόταση 15.5.7, επειδή ο $\{x_0\}$ είναι συστολή του X έχουμε ότι $H_n(X) \simeq H_n(x_0) \oplus H_n(X,x_0)$. Επομένως το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. □

Πρόταση 15.5.9. *Αν X είναι ένας δρομοσυνεκτικός χώρος και $\varnothing \neq A \subseteq X$, τότε*

$$H_0(X,A) = \{0\}.$$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in A$ και $\langle y \rangle \in Z_0(X,A)$, τότε υπάρχουν $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ και $x_1, \ldots, x_k \in X$, ώστε $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i x_i$. Αν σ_i είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το και x_0 πέρας το x_i, τότε για την αλυσίδα $\gamma = \sum_{i=1}^{k} m_i \sigma_i \in C_1(X)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\partial(\gamma) &= \sum_{i=1}^{k} m_i \partial(\sigma_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m_i x_i - \sum_{i=1}^{k} m_i x_0 \\
&= y - \sum_{i=1}^{k} m_i x_0 \\
&\Rightarrow \partial(\gamma) - y = \sum_{i=1}^{k} (-m_i) x_0 \in C_0(A) \\
&\Rightarrow \langle y \rangle \in B_0(X,A)\,.
\end{aligned}$$

Άρα $Z_0(X,A) \subseteq B_0(X,A)$. Το $B_0(X,A) \subseteq Z_0(X,A)$ είναι δεδομένο, επομένως $Z_0(X,A) = B_0(X,A)$, άρα $H_0(X,A) = Z_0(X,A)/B_0(X,A) \simeq \{0\}$. □

Πρόταση 15.5.10. *Αν $X_i, i \in I$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του τοπολογικού χώρου X, τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει*

$$H_n(X, A) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i, X_i \cap A).$$

Απόδειξη: Είναι ανάλογη της απόδειξης της πρότασης 15.4.4 και αφήνεται ως άσκηση.□

Πρόταση 15.5.11. *Έστω τοπολογικός χώρος X και $X_i, i \in I$ η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X, τότε η $H_0(X, A)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα, με $rank\big(H_0(X, A)\big) = |J|$, όπου $J = \{i \in I / A \cap X_i = \varnothing\}$.*

Απόδειξη: Συνέπεια της πρότασης 15.5.10 είναι η

$$H_0(X, A) = \bigoplus_{i \in I} H_0(X_i, A \cap X_i) = \Big(\bigoplus_{i \in J} H_0(X_i, A \cap X_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I \setminus J} H_0(X_i, A \cap X_i)\Big).$$

Τα $A \cap X_i$ για κάθε $i \in I \setminus J$ είναι μη κενά υποσύνολα του δρομοσυνεκτικού χώρου X_i κατά συνέπεια, από την πρόταση 15.5.9 έχουμε $H_0(X_i, X_i \cap A) = \{0\}$. Αφετέρου για κάθε $i \in J$ ισχύει $H_0(X_i, A \cap X_i) = H_0(X_i, \varnothing) \simeq H_0(X_i) \simeq \mathbb{Z}$. Συνεπώς

$$H_0(X, A) = \bigoplus_{i \in J} H_0(X_i) \simeq \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z},$$

επομένως η $H_0(X, A)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με $rank\big(H_0(X, A)\big) = |J|$. □

Πρόταση 15.5.12. *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος με r δρομοσυνεκτικές συνιστώσες και $x_0 \in X$, τότε η ομάδα $H_0(X, x_0)$ είναι ελεύθερη αβελιανή με τάξη $r - 1$.*

Απόδειξη: Αν $X_i, i \in I$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X, με $|I| = r$, τότε υπάρχει $i \in I$, με $x_0 \in X$. Έχουμε $\{x_0\} \cap X_i \neq \varnothing$ και $\{x_0\} \cap X_j = \varnothing$ για κάθε $j \in I \setminus \{i\}$. Άρα, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $rank\big(H_0(X, x_0)\big) = |I \setminus \{i\}| = r - 1$.
□

Πρόταση 15.5.13. *Αν $x_0 \in X$, τότε $H_0(X) \simeq \langle x_0 \rangle \oplus H_0(X, x_0)$.*

Απόδειξη: Από την πρόταση 15.4.6 έχουμε ότι η $H_0(X)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα, με πλήθος γεννητόρων r ίσο με το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του X. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η $H_0(X, x_0)$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα, με πλήθος γεννητόρων $r - 1$, άρα

$$H_0(X) \simeq \langle x_0 \rangle \oplus H_0(X, x_0).$$

□

15.6 Σχετική ομολογία και απεικονίσεις ζευγών

Ορισμός 15.6.1. Αν τα (X, A) και (Y, B) είναι δύο τοπολογικά ζεύγη και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση, τότε θα ονομάζουμε την f απεικόνιση του ζεύγους (X, A) στο ζεύγος (Y, B), αν και μόνον, αν $f(A) \subseteq B$. Το παραπάνω συμβολίζουμε με $f : (X, A) \to (Y, B)$ και λέμε ότι η f είναι **απεικόνιση ζευγών**.

Πρόταση 15.6.1. *Έστω $f : (X, A) \to (Y, B)$ μία απεικόνιση ζευγών, τότε για κάθε n η απεικόνιση $f_\diamond^n : C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$, με*

$$C_n(X, A) \ni \langle\gamma\rangle = \gamma + C_n(A) \xrightarrow{f_\diamond^n} f_\diamond^n(\gamma) + C_n(B) = \langle f_\diamond^n(\gamma)\rangle \in C_n(Y, B)$$

είναι καλώς ορισμένη.

Απόδειξη: Έστω $\gamma \in C_n(A)$, τότε $\gamma = \sum_{i=1}^{k} m_i\sigma_i$, όπου $\sigma_i \in S_n(A)$ και $m_i \in \mathbb{Z}$, άρα $f_\diamond^n(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f \circ \sigma_i) \in C_n(B)$, γιατί $f \circ \sigma_i \in C_n(B)$, επομένως $f_\diamond^n(C_n(A)) \subseteq C_n(B)$.

$$\left(\Delta^n \xrightarrow{\sigma_i} A \xrightarrow{f} B\right).$$

Έστωσαν $\gamma_1, \gamma_2 \in C_n(X)$, τότε

$$\begin{aligned}\langle\gamma_1\rangle = \langle\gamma_2\rangle &\Rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \in C_n(A)\\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\gamma_1 - \gamma_2) \in C_n(B)\\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\gamma_1) - f_\diamond^n(\gamma_2) \in C_n(B)\\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\gamma_1) + C_n(B) = f_\diamond^n(\gamma_2) + C_n(B)\\ &\Rightarrow f_\diamond^n\big(\langle\gamma_1\rangle\big) = f_\diamond^n\big(\langle\gamma_2\rangle\big)\,,\end{aligned}$$

άρα η $f_\diamond^n$ είναι καλώς ορισμένη. □

Πρόταση 15.6.2. *Αν $f : (X, A) \to (Y, B)$ είναι μία απεικόνιση ζευγών, τότε για κάθε n ισχύουν τα εξής:*

α΄) $f_\diamond^n(Z_n(X, A)) \subseteq Z_n(Y, B)$.

β΄) $f_\diamond^n(B_n(X, A)) \subseteq B_n(Y, B)$.

γ΄) Η σχέση $f_\diamond^n(\langle\gamma\rangle) = \langle f_\diamond^n(\gamma)\rangle$ ορίζει μια απεικόνιση της ομάδας $C_n(X, A)$ στην ομάδα $C_n(Y, B)$, η οποία είναι ομομορφισμός.

δ΄) Η ακολουθία $f_\diamond^n$, $n \geq 0$ είναι αλυσιδωτή ακολουθία ομομορφισμών.

Απόδειξη: Ονομάζουμε ∂, δ, ∂' και δ' τους συνοριακούς ομομορφισμούς των συμπλεγμάτων $C_n(X)$, $C_n(Y)$, $C_n(X, A)$ και $C_n(Y, B)$, αντιστοίχως. Τότε έχουμε

α΄)
$$\begin{aligned}\langle\gamma\rangle \in Z_n(X, A) &\Rightarrow \partial(\gamma) \in C_{n-1}(A)\\ &\Rightarrow f_\diamond^{n-1}(\partial(\gamma)) \in C_{n-1}(B)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^{n-1}} \\ C_n(B) & \xrightarrow{\delta} & C_{n-1}(B) \end{array}\,.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} f_\diamond^{n-1}(\partial(\gamma))) = \delta(f_\diamond^n(\gamma)) &\Rightarrow \delta(f_\diamond^n(\gamma)) \in C_{n-1}(B) \\ &\Rightarrow \langle f_\diamond^n(\gamma)\rangle \in Z_n(Y,B) \\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\langle\gamma\rangle) \in Z_n(Y,B)\,, \end{aligned}$$

Επομένως

$$f_\diamond^n(Z_n(X,A)) \subseteq Z_n(Y,B).$$

β′)

$$\begin{aligned} \langle\gamma\rangle \in B_n(X,A) &\Rightarrow \exists\alpha \in C_{n+1}(X) \wedge \beta \in C_n(A); \gamma = \partial(\alpha) - \beta \\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\gamma) = f_\diamond^n(\partial(\alpha)) - f_\diamond^n(\beta) \\ &\Rightarrow f_\diamond^n(\gamma) = \delta\big(f_\diamond^{n+1}(\alpha)\big) - f_\diamond^n(\beta) \end{aligned}$$

και, επειδή $f_\diamond^n(\beta) \in C_n(B)$ θα έχουμε $f_\diamond^n(\langle\gamma\rangle) = \langle f_\diamond^n(\gamma)\rangle \in B_n(Y,B)$. Επομένως

$$f_\diamond^n\big(B_n(X,A)\big) \subseteq B_n(Y,B).$$

γ′) Έχουμε

$$\begin{aligned} f_\diamond^n\big(\langle\beta\rangle\big) + \langle\gamma\rangle\big) &= f_\diamond^n\big(\langle\beta+\gamma\rangle\big) \\ &= \langle f_\diamond^n(\beta+\gamma)\rangle \\ &= \langle f_\diamond^n(\beta) + f_\diamond^n(\gamma)\rangle \\ &= \langle f_\diamond^n(\beta)\rangle + \langle f_\diamond^n(\gamma)\rangle \\ &= f_\diamond^n\big(\langle\beta\rangle\big) + f_\diamond^n\big(\langle\gamma\rangle\big)\,, \end{aligned}$$

άρα η $f_\diamond^n$ είναι ομομορφισμός.

δ′) Έστω $\langle\gamma\rangle \in C_n(X,A)$. Αν $\langle\gamma\rangle = \gamma + C_n(A)$, τότε $\partial'\big(\langle\gamma\rangle\big) = \partial(\gamma) + C_{n-1}(A)$, άρα

$$\begin{aligned} f_\diamond^{n-1}\big(\partial'(\langle\gamma\rangle)\big) &= f_\diamond^{n-1}\big(\partial(\gamma)\big) + C_{n-1}(B) \\ &= \delta\big(f_\diamond^n(\gamma)\big) + C_{n-1}(B) \\ &= \delta'\big(f_\diamond^n(\langle\gamma\rangle)\big). \end{aligned}$$

Άρα $f_\diamond^{n-1} \circ \partial' = \delta' \circ f_\diamond^n$.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X,A) & \xrightarrow{\partial'} & C_{n-1}(X,A) \\ \big\downarrow f_\diamond^n & & \big\downarrow f_\diamond^{n-1} \\ C_n(Y,B) & \xrightarrow{\delta'} & C_{n-1}(Y,B) \end{array}\,,$$

συνεπώς η $f_\diamond^n$ $n \geq 0$ είναι μια αλυσιδωτή ακολουθία ομομορφισμών. □

Πρόταση 15.6.3. *Για κάθε* $n \geq 0$ *η απεικόνιση* $f_*^n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$, *ώστε*

$$[\alpha] = \langle\alpha\rangle + B_n(X, A) \xrightarrow{f_*^n} f_\diamond^n\big(\langle\alpha\rangle\big) + B_n(Y, B),$$

είναι ομομορφισμός.

Απόδειξη: Έστω ότι $[\alpha], [\beta] \in H_n(X, A)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_*^n\big([\alpha] + [\beta]\big) &= f_*^n\big([\alpha + \beta]\big) \\
&= f_\diamond^n\big(\langle\alpha + \beta\rangle\big) + B_n(Y, B) \\
&= \Big(f_\diamond^n\big(\langle\alpha\rangle\big) + f_\diamond^n\big(\langle\beta\rangle\big)\Big) + B_n(Y, B) \\
&= \Big(f_\diamond^n\big(\langle\alpha\rangle\big) + B_n(Y, B)\Big) + \Big(f_\diamond^n\big(\langle\beta\rangle\big) + B_n(Y, B)\Big) \\
&= f_*^n\big([\alpha]\big) + f_*^n\big([\beta]\big).
\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση $f_*^n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ είναι ομομορφισμός. □

Πρόταση 15.6.4. *Αν* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *και* $g : (Y, B) \to (Z, C)$ *είναι απεικονίσεις ζευγών, τότε για κάθε* $n \geq 0$ *ισχύει* $(g \circ f)_*^n = g_*^n \circ f_*^n$.

Απόδειξη: Ανάλογη με την απόδειξη της πρότασης 15.2.14. □

Πρόταση 15.6.5. *Για κάθε* $n \geq 0$, *αν* i *είναι η ταυτοτική απεικόνιση του ζεύγους* (X, A) *στον εαυτό του, τότε* i_*^n *είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός της ομάδας* $H_n(X, A)$ *στον εαυτό της.*

Απόδειξη: Ανάλογη με την απόδειξη της πρότασης 15.2.15. □

Ορισμός 15.6.2. Οι απεικονίσεις ζευγών $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ ονομάζονται **ομοτοπικά ισοδύναμες**, αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε

1. $H\big((x, 0)\big) = f(x) \quad \forall x \in X$,
2. $H\big((x, 1)\big) = g(x) \quad \forall x \in X$ και
3. $H(A \times \mathbb{I}) \subseteq B$.

Ορισμός 15.6.3. Η απεικόνιση $F : (X, A) \to (Y, B)$ ονομάζεται **ομοτοπική ισοδυναμία ζευγών**, αν και μόνον, αν υπάρχει απεικόνιση $G : (Y, B) \to (X, A)$, ώστε η $G \circ F$ να είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την ταυτοτική $i_X : (X, A) \to (X, A)$ και η $F \circ G$ ομοτοπικά ισοδύναμη με την ταυτοτική $i_Y : (Y, B) \to (Y, B)$. Στην περίπτωση αυτή η G ονομάζεται ομοτοπικά αντίστροφη της F.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι η

Πρόταση 15.6.6. *Αν η απεικόνιση* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία ζευγών, τότε οι απεικονίσεις* $f : X \to Y$ *και* $f/A : A \to B$ *επάγουν στην ομολογία ισομορφισμούς. Δηλαδή οι απεικονίσεις* $f_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$ *και* $(f/A)_*^n : H_n(A) \to H_n(B)$ *είναι ισομορφισμοί.*

Αν (X, A) και (Y, B) είναι τοπολογικά ζεύγη, τότε οι παρακάτω ακολουθίες

$$0 \to C_n(A) \xrightarrow{i_\diamond^n} C_n(X) \xrightarrow{p_n} C_n(X, A) \to 0,$$

και

$$0 \to C_n(B) \xrightarrow{j_\diamond^n} C_n(Y) \xrightarrow{q_n} C_n(Y, B) \to 0$$

είναι βραχείες ακριβείς (πρόταση 15.5.5). Οι απεικονίσεις $i_\diamond^n$ και $j_\diamond^n$ είναι οι μονομορφισμοί που επάγονται από τις ενθέσεις $i : A \hookrightarrow X$ και $j : B \hookrightarrow Y$. Οι απεικονίσεις p_n, q_n είναι οι επιμορφισμοί $p_n(\gamma) = \gamma + C_n(A)$ και $q_n(\delta) = \delta + C_n(B)$.
Αν $f : (X, A) \to (Y, B)$ μια απεικόνιση ζευγών, τότε, μια απλή επαλήθευση δείχνει ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i_\diamond^n} & C_n(X) & \xrightarrow{p_n} & C_n(X, A) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f/A)_\diamond^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & C_n(B) & \xrightarrow{j_\diamond^n} & C_n(Y) & \xrightarrow{q_n} & C_n(Y, B) & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Άρα από την πρόταση 15.2.21 συμπεραίνουμε την αλήθεια της ακόλουθης πρότασης

Πρόταση 15.6.7. *Αν η $f : (X, A) \to (Y, B)$ είναι απεικόνιση ζευγών, τότε το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{p_*^n} & H_n(X, A) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*^{n-1}} & H_{n-1}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f/A)_*^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f/A)_*^{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*^{n-1}} \\ H_n(B) & \xrightarrow{j_*^n} & H_n(Y) & \xrightarrow{q_*^n} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{j_*^{n-1}} & H_{n-1}(Y) \end{array}$$

είναι μεταθετικό, με τις οριζόντιες γραμμές του ακριβείς. Ο i_*^n είναι ο ομομορφισμός που επάγει η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$, ο j_*^n είναι ο ομομορφισμός που επάγει η ένθεση $j : B \hookrightarrow Y$, οι p_*^n, q_*^n είναι οι ομομορφισμοί που επάγονται στην ομολογία από τους επιμορφισμούς p_n και q_n, αντιστοίχως.

Αν τα ζεύγη (X, A) και (Y, B) είναι ομοτοπικά ισοδύναμα και η $f : (X, A) \to (Y, B)$ είναι μία ομοτοπική ισοδυναμία ζευγών, τότε επάγεται ένας ομομορφισμός

$$F_*^n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B).$$

Οι ομομορφισμοί $(f/A)_*^n$, f_*^n, $(f/A)_*^{n-1}$ και f_*^{n-1} είναι ισομορφισμοί (πρόταση 15.6.6), άρα από το λήμμα των πέντε, ο ομομορφισμός $f_*^n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως

Πρόταση 15.6.8. *Αν τα ζεύγη (X, A) και (Y, B) είναι ομοτοπικά ισοδύναμα, τότε για κάθε $n \geq 0$ έχουμε $H_n(X, A) \simeq H_n(Y, B)$.*

Πρόταση 15.6.9. *Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και A, B υπόχωροί τους, αντιστοίχως, ώστε να υπάρχουν απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g = f/A : A \to B$, οι οποίες να είναι ομοιομορφισμοί, τότε για κάθε $n \geq 0$, ισχύει $H_n(X, A) \simeq H_n(Y, B)$.*

Απόδειξη: : Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array},$$

όπου i, j οι ενθέσεις είναι μεταθετικό και επάγει στην ομολογία το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες είναι ακριβείς.

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{p_*^n} & H_n(X,A) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*^{n-1}} & H_{n-1}(X) \\ \downarrow g_*^n & & \downarrow f_*^n & & \downarrow k & & \downarrow g_*^{n-1} & & \downarrow f_*^{n-1} \\ H_n(B) & \xrightarrow{j_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{q_*^n} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{j_*^{n-1}} & H_{n-1}(Y) \end{array}.$$

Οι απεικονίσεις g_*^n, f_*^n, g_*^{n-1} και f_*^{n-1} είναι ισομορφισμοί, συνεπώς η απεικόνιση k είναι ισομορφισμός (λήμμα των πέντε), άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 15.6.10. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq X$, τότε η ακολουθία*

$$\{0\} \to C_n(B,A) \xrightarrow{i_\diamond^n} C_n(X,A) \xrightarrow{p_n} C_n(X,B) \to \{0\},$$

όπου $i_\diamond^n(\langle\beta\rangle) = \beta + C_n(A)$ και $p_n(\langle\gamma\rangle) = p_n(\gamma + C_n(A)) = \gamma + C_n(B)$ είναι βραχεία ακριβής.

Απόδειξη:

- Είναι

$$\begin{aligned} i_\diamond^n(\langle\beta_1\rangle) = i_\diamond^n(\langle\beta_2\rangle) &\Rightarrow \beta_1 + C_n(A) = \beta_2 + C_n(A) \\ &\Rightarrow (\beta_1 - \beta_2) \in C_n(A) \\ &\Rightarrow \langle\beta_1 - \beta_2\rangle = \langle 0\rangle \\ &\Rightarrow \langle\beta_1\rangle - \langle\beta_2\rangle = \langle 0\rangle \\ &\Rightarrow \langle\beta_1\rangle = \langle\beta_2\rangle, \end{aligned}$$

  άρα η $i_\diamond^n$ είναι 1-1.

- Είναι

$$\begin{aligned} \beta + C_n(A) \in \operatorname{Im} i_\diamond^n &\Leftrightarrow \beta \in C_n(B) \\ &\Leftrightarrow p_n(\langle\beta\rangle) = \beta + C_n(B) = \langle 0\rangle \\ &\Leftrightarrow \beta + C_n(A) \in \operatorname{Ker} p_n\,, \end{aligned}$$

  άρα $\operatorname{Im} i_\diamond^n = \operatorname{Ker} p_n$.

- Έστω $(\gamma + C_n(B)) \in C_n(X,B)$, τότε $\gamma \in C_n(X)$, άρα $\gamma + C_n(B) = p_n\big(\gamma + C_n(A)\big)$, επομένως η p_n είναι επί.

□

Άμεση συνέπεια του ανωτέρω λήμματος και της πρότασης 15.2.20. (Θεώρημα ακριβούς τριγώνου) είναι η ακόλουθη πρόταση:[6]

Πρόταση 15.6.11. ***(Ακριβής ακολουθία τριάδας)*** *Αν X τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq X$, τότε για κάθε n υπάρχει ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \to H_n(B,A) \xrightarrow{i_*^n} H_n(X,A) \xrightarrow{p_*^n} H_n(X,B) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(B,A) \to \cdots,$$

όπου d_n ο συνδετικός ομομορφισμός.

Ορισμός 15.6.4. Έστωσαν X,Y τοπολογικοί χώροι $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq X$ και $\varnothing \neq A' \subseteq B' \subseteq Y$. Τότε η συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται **απεικόνιση της τριάδας** (X,B,A) στην τριάδα (Y,B',A'), αν και μόνον, αν $f(A) \subseteq A'$ και $f(B) \subseteq B'$.

Πρόταση 15.6.12. *Αν η $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση της τριάδας (X,B,A) στην τριάδα (Y,B',A'), τότε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(B,A) & \xrightarrow{i_*^n} & H_n(X,A) & \xrightarrow{p_*^n} & H_n(X,B) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(B,A) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle (f/B)_*^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^n} & & \downarrow{\scriptstyle (f/B)_*^{n-1}} & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(B',A') & \xrightarrow{j_*^n} & H_n(Y,A') & \xrightarrow{q_*^n} & H_n(Y,B') & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(B',A') & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

είναι μεταθετικό, με τις οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς.

Απόδειξη: Στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & C_n(B,A) & \xrightarrow{i_\diamond^n} & C_n(X,A) & \xrightarrow{p_\diamond^n} & C_n(X,B) & \longrightarrow & \{0\} \\
& & \downarrow{\scriptstyle (f/B)_\diamond^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & (B',A') & \xrightarrow{j_\diamond^n} & (Y,A') & \xrightarrow{q_\diamond^n} & (Y,B') & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

έχουμε $i_\diamond^n(\beta + C_n(A)) = \beta + C_n(A)$, $p_\diamond^n(\beta + C_n(A)) = \beta + C_n(B)$, $j_\diamond^n(\beta' + C_n(A')) = \beta' + C_n(A')$ και $q_\diamond^n(\beta' + C_n(A')) = \beta' + C_n(B')$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό, με τις οριζόντιες ακολουθίες του βραχείες ακριβείς, άρα η προς απόδειξη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 15.2.21.
Διευκρινίζουμε ότι στη θέση της ομάδας A_n της πρότασης 15.2.21 έχουμε την ομάδα $C_n(B,A)$. Στη θέση της ομάδας B_n έχουμε την ομάδα $C_n(X,A)$ και στη θέση της ομάδας C_n έχουμε την ομάδα $C_n(X,B)$. Στη θέση της ομάδας A'_n της πρότασης 15.2.21 έχουμε την ομάδα $C_n(B',A')$. Στη θέση της ομάδας B'_n έχουμε την ομάδα $C_n(Y,A')$ και στη θέση της ομάδας C'_n έχουμε την ομάδα $C_n(Y,B')$. Στη θέση των ομάδων $H_n(A)$, $H_n(B)$, $H_n(C)$, $H_n(A')$, $H_n(B')$ και $H_n(C')$ έχουμε τις ομάδες $H_n(A), H_n(X), H_n(X,A)$, $H_n(A')$, $H_n(Y)$ και $H_n(Y,A')$, αντιστοίχως. □

[6] Για να δούμε πως εφαρμόζεται το θεώρημα ακριβούς τριγώνου στην απόδειξη της πρότασης, δεν έχουμε παρά να παρατηρήσουμε ότι στη θέση των ομάδων A_n του θεωρήματος ακριβούς τριγώνου έχουμε τις ομάδες $C_n(B,A)$. Στη θέση των ομάδων B_n έχουμε τις ομάδες $C_n(X,A)$ και στη θέση των ομάδων C_n έχουμε τις ομάδες $C_n(X,B)$.

15.7 Ελαττωμένη ομολογία

Με τη χρήση της ιδιάζουσας ομολογίας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι μονοσημειακοί χώροι, καθώς και εκείνοι που συρρικνώνονται σε ένα σημείο (συσταλτοί) έχουν μηδενική ομάδα ομολογίας ισόμορφη με την προσθετική των ακεραίων. Όμως θα διαπιστώσουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι καθόλου βολική για την εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω των θεωρημάτων των ακριβών ακολουθιών, οι οποίες είναι και το βασικό εργαλείο της θεωρίας της ομολογίας. Για τον λόγο αυτόν αναγκαζόμαστε να επινοήσουμε μια νέα ομολογία, η οποία διαφέρει από τη συνήθη μόνον στον μηδενικό της όρο.

Ορισμός 15.7.1. Για τον ορισμό της ελαττωμένης ιδιάζουσας ομολογίας του συμπλέγματος $(C_n(X), \partial_n)$, θεωρούμε το σύμπλεγμα (A_n, δ_n), όπου $A_n = \{0\}$, αν $n > 0$, $A_0 = \mathbb{Z}$ και $\delta_n = \hat{0}$ για κάθε $n \geq 0$. Ακολούθως θεωρούμε την αλυσιδωτή ακολουθία ομομορφισμών $\varepsilon_n : C_n(X) \to A_n$, με $\varepsilon_n = \hat{0}$, αν $n > 0$ και

$$\varepsilon_0 : C_0(X) \to A_0 = \mathbb{Z}, \text{ με } \varepsilon_0(\sum_{i=0}^{k} n_i x_i) = \sum_{i=0}^{k} n_i, \text{ όπου } n_i \in \mathbb{Z} \text{ και } x_i \in X.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} \\ \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\delta_2} & A_1 & \xrightarrow{\delta_1} & A_0 \end{array}.$$

Προφανώς $\operatorname{Ker}\varepsilon_n = C_n(X)$, αν $n > 0$ και $\operatorname{Ker}\varepsilon_0 \subseteq C_0(X)$. Επομένως το $(C'_n(X) = \operatorname{Ker}\varepsilon_n, \partial'_n)$, όπου ∂'_n ο περιορισμός του ∂_n στην $\operatorname{Ker}\varepsilon_n$ είναι ένα σύμπλεγμα. Ορίζουμε ως **ελαττωμένη ομολογία** του $(C_n(X), \partial_n)$, την οποία συμβολίζουμε, με $\tilde{H}(X)$, την ομολογία του συμπλέγματος $(C'_n(X) = \operatorname{Ker}\varepsilon_n, \partial'_n)$.

Πρόταση 15.7.1. *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε $H_n(X) \simeq \tilde{H}_n(X)$ για κάθε $n > 0$.*

Απόδειξη: Για $n > 0$ έχουμε $C'_n(X) = \operatorname{Ker}\varepsilon_n = C_n(X)$, επομένως $\tilde{H}_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = H_n(X)$. □

Πρόταση 15.7.2. *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $\operatorname{Ker}\varepsilon_0 = K$ και θεωρούμε τον ομομορφισμό $\phi : Z_0(X) \to K$, με

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z_0(X) \setminus K \\ x & x \in K \end{cases}.$$

Επειδή ο ε_0 είναι επιμορφισμός, η ακολουθία

$$\{0\} \to K \xrightarrow{i} Z_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{Z} \to \{0\}$$

είναι ακριβής. Επιπλέον, ισχύει $\phi \circ i = i_K$, άρα από το λήμμα διάσπασης έχουμε

$$\begin{aligned} Z_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus K &\Rightarrow Z_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1 \simeq \big(\mathbb{Z} \oplus K\big)/\operatorname{Im}\partial_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \big(K/\operatorname{Im}\partial'_1\big) \\ &\Rightarrow H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X)\,. \end{aligned}$$

□

Μετά την παραπάνω πρόταση η 15.4.7 και το πόρισμά της έχουν ως άμεση συνέπεια την ακόλουθη πρόταση και το πόρισμά της.

Πρόταση 15.7.3. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) Ο X έχει n δρομοσυνεκτικές συνιστώσες ($n \in \mathbb{N}$).

β΄) $\tilde{H}_0(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}$.

Πόρισμα. *Αν X τοπολογικός χώρος, τότε η $\tilde{H}_0(X)$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με πλήθος γεννητόρων ίσο με το πλήθος των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του X μείον έναν.*

Πρόταση 15.7.4. *Ισχύει: $\tilde{H}_0(x_0) \simeq \{0\}$. Δηλαδή η μηδενική ομάδα ελαττωμένης ομολογίας των χώρων με ένα σημείο είναι η τετριμμένη.*

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned} H_0(x_0) \simeq \tilde{H}_0(x_0) \oplus \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(x_0) \\ \Rightarrow \tilde{H}_0(x_0) \simeq \{0\} \, . \end{aligned}$$

□

Πόρισμα. *Αν ο X είναι συσταλτός χώρος, τότε $\tilde{H}_0(X) \simeq \{0\}$.*

Πρόταση 15.7.5. *Αν X τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$, τότε για κάθε n ισχύει $\tilde{H}_n(X) \simeq H_n(X, x_0)$.*

Απόδειξη:

- Για $n \geq 1$ έχουμε $\tilde{H}_n(X) \simeq H_n(X) \simeq H_n(x_0) \oplus H_n(X, x_0)$ και, επειδή $H_n(x_0) \simeq 0$, έπεται το ζητούμενο.
- Για $n = 0$ έχουμε $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \langle x_0 \rangle$ και από την πρόταση 15.5.13 έχουμε $H_0(X) \simeq \langle x_0 \rangle \oplus H_0(X, x_0)$ άρα $\tilde{H}_0(X) \simeq H_0(X, x_0)$.

□

Παρατήρηση: Αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, με $f(x_0) = y_0$, τότε έχουμε την απεικόνιση ζευγών $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, η οποία επάγει τον ομομορφισμό $f_*^n : H_n(X, x_0) \to H_n(Y, y_0)$. Από την αμέσως προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι ο ομομορφισμός αυτός είναι κατ' ουσίαν ο ομομορφισμός $f_*^n : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$, ο οποίος έχει τις γνωστές ιδιότητες της συναρτησιακότητας.

Πρόταση 15.7.6. ***(Ακριβές τρίγωνο στην ελαττωμένη ομολογία)*** *Για το οποιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος (X, A) και για κάθε $n \geq 0$ η ακολουθία*

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A) \to \tilde{H}_n(X) \to H_n(X, A) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \to \cdots ,$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in A$. Εφαρμόζοντας την πρόταση 15.6.11 για την τριάδα (X, x_0, A) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$\cdots \to H_n(A, x_0) \to H_n(X, x_0) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, x_0) \to \cdots,$$

είναι ακριβής. Επιπλέον έχουμε $H_n(A, x_0) \simeq \tilde{H}_n(A)$, $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ και $H_{n-1}(A, x_0) \simeq \tilde{H}_{n-1}(A)$. Άρα το ζητούμενο έπεται αμέσως. □

Παρατήρηση: Για να αντιληφθούμε τη χρησιμότητα της ελαττωμένης ομολογίας, ας επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την ομάδα $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, με τη χρήση του θεωρήματος του ακριβούς τριγώνου στην απόλυτη ομολογία. Έχουμε ότι η επόμενη ακολουθία

$$\cdots \to H_1(\mathbb{R}) \to H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \to H_0(\mathbb{Q}) \to H_0(\mathbb{R})$$

είναι ακριβής. Επειδή $H_1(\mathbb{R}) \simeq \{0\}$, θα καταλήγαμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα: $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \simeq H_0(\mathbb{Q})$, αν $H_0(\mathbb{R}) \simeq \{0\}$, το οποίο όμως δεν ισχύει.
Όμως, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του ακριβούς τριγώνου για την ελαττωμένη ομολογία έχουμε

$$\cdots \to \tilde{H}_1(\mathbb{R}) \to \tilde{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \to \tilde{H}_0(\mathbb{Q}) \to \tilde{H}_0(\mathbb{R})$$

και, επειδή $\tilde{H}_1(\mathbb{R}) = \tilde{H}_0(\mathbb{R}) \simeq 0$, ο ενδιάμεσος ομομορφισμός είναι ισομορφισμός, άρα

$$\tilde{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \simeq \tilde{H}_0(\mathbb{Q}).$$

Η $\tilde{H}_0(\mathbb{Q})$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με πλήθος γεννητόρων ίσο με το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του χώρου $\mathbb{Q}$ μείον 1 (πρόταση 15.4.6), δηλαδή άπειρο αριθμήσιμο, συνεπώς

$$\tilde{H}_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}.$$

15.8 Θεώρημα εκτομής και Θεώρημα Mayer-Vietoris

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το, αν δοθέντος ενός τοπολογικού ζεύγους (X, A), μπορούμε και από τα δύο μέλη του ζεύγους να "εξαιρέσουμε" ένα υποσύνολο Z του A, ώστε η ομολογία στο νέο ζεύγος να παραμένει η ίδια. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό που δίνεται με το επόμενο, γνωστό ως "θεώρημα εκτομής" είναι κρίσιμη για τον υπολογισμό της ομολογίας πολλών γνωστών χώρων και για την απάντηση σε αρκετά τοπολογικά προβλήματα. Η απόδειξη του θεωρήματος, επειδή είναι αρκετά εκτενής, ιδιαίτερα δύσκολη και τεχνική παρατίθεται στην παράγραφο που ακολουθεί, η οποία είναι εξ' ολοκλήρου αφιερωμένη σ' αυτή.

Πρόταση 15.8.1. ***(Θεώρημα εκτομής)*** *Αν (X, A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και $Z \subseteq A$, ώστε $\overline{Z} \subseteq A^0$, τότε ο ομομορφισμός*

$$i_*^n : H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)$$

που επάγει στην ομολογία η ένθεση $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ *είναι για κάθε* n *ισομορφισμός.*

Πρόταση 15.8.2. *Αν* U, V *είναι μη κενά και ανοικτά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου* X, *ώστε* $X = U \cup V$, *τότε η ένθεση* $i : (U, U \cap V) \to (X, V)$ *επάγει στην ομολογία ισομορφισμό*

$$i_*^n : H_n(U, U \cap V) \to H_n(X, V).$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα εκτομής για $A = V$ και $Z = X \setminus U$. Το Z είναι κλειστό υποσύνολο του X, επομένως

$$\begin{aligned}\overline{Z} =& Z = X \setminus U \\ &= (U \cup V) \setminus U \\ &= (U \cup V) \cap U^c \\ &= (U \cap U^c) \cup (V \cap U^c) \\ &= V \cap U^c \subseteq V = V^0 .\end{aligned}$$

Επιπλέον $X \setminus Z = X \setminus (X \setminus U) = U$ και

$$\begin{aligned}A \setminus Z &= V \setminus Z \\ &= V \setminus (X \setminus U) \\ &= V \cap (X \cap U^c)^c \\ &= V \cap (X^c \cup U) \\ &= V \cap U .\end{aligned}$$

Άρα, από το θεώρημα εκτομής η απεικόνιση $i_*^n : H_n(U, V \cap U) \to H_n(X, V)$ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 15.8.3. ***(Θεώρημα των Mayer-Vietoris)***[7] *Αν* X *είναι ένας τοπολογικός χώρος,* U, V *ανοικτά υποσύνολα του* X, *με* $U \cup V = X$ *και* $U \cap V \neq \varnothing$. *Επιπλέον τα* t, j, k, l *είναι οι ενθέσεις, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα*

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{j} & V \\ \downarrow t & & \downarrow l \\ U & \xrightarrow{k} & X \end{array},$$

τότε η ακολουθία

$$\cdots H_n(U \cap V) \xrightarrow{\psi_*^n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\varphi_*^n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\psi_*^{n-1}} H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \cdots$$

είναι ακριβής. Για τους ομομορφισμούς της ακολουθίας έχουμε $\psi_*^n = (t_*^n, j_*^n)$, $\varphi_*^n(\sigma, \tau) = k_*^n(\sigma) - l_*^n(\tau)$ *και* $\Delta_n = d_n \circ i_*^{-1} \circ q_*^n$. *Τα* t_*^n, j_*^n, k_*^n, l_*^n *είναι οι ομομορφισμοί που επάγουν στην ομολογία οι ενθέσεις* t, j, k *και* l, *αντιστοίχως.*

[7] Walter Mayer (1887-1948)- Leopold Vietoris (1891-2002): Αυστριακοί μαθηματικοί.

Απόδειξη: Έστω η ένθεση $i : (U, U \cap V) \hookrightarrow (X, V)$. Από την πρόταση 15.6.6, συμπεραίνουμε ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό, με τις οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_n(U\cap V) & \xrightarrow{t_*^n} & H_n(U) & \xrightarrow{p_*^n} & H_n(U, U\cap V) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(U\cap V) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow{j_*^n} & & \downarrow{k_*^n} & & \downarrow{i_*^n} & & \downarrow{j_*^{n-1}} & \\ \cdots \longrightarrow & H_n(V) & \xrightarrow{l_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{q_*^n} & H_n(X,V) & \xrightarrow{d_n'} & H_{n-1}(V) & \longrightarrow \cdots \end{array} .$$

Από την πρόταση 15.8.2, συμπεραίνουμε ότι οι ομομορφισμοί i_*^n είναι ισομορφισμοί. Επομένως, από το λήμμα Barratt- Whitehead προκύπτει το ζητούμενο. Για την κατανόηση της εφαρμογής του λήμματος Barratt-Whitehead, διευκρινίζουμε ότι $A_n = H_n(U \cap V), B_n = H_n(U), C_n = H_n(U, U \cap V), A_n' = H_n(V), B_n' = H_n(X)$ και $C_n' = H_n(X, V)$. □

Πρόταση 15.8.4. ***(Θεώρημα των Mayer-Vietoris για την ελαττωμένη ομολογία)*** *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, U, V ανοικτά υποσύνολα του X, με $U \cup V = X$ και $U \cap V \neq \varnothing$ και τα t, j, k, l είναι οι ενθέσεις, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα*

$$\begin{array}{ccc} U\cap V & \xrightarrow{j} & V \\ \downarrow{t} & & \downarrow{l} \\ U & \xrightarrow{k} & X \end{array} ,$$

τότε η ακολουθία

$$\cdots \tilde{H}_n(U\cap V) \xrightarrow{\psi_*^n} \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) \xrightarrow{\varphi_*^n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{d_n} \tilde{H}_{n-1}(U\cap V) \xrightarrow{\psi_*^{n-1}} H_{n-1}(U) \oplus \tilde{H}_{n-1}(V) \cdots ,$$

είναι ακριβής. Για τους ομομορφισμούς της ακολουθίας έχουμε $\psi_*^n = (t_*^n, j_*^n)$, $\varphi_*^n(\sigma, \tau) = k_*^n(\sigma) - l_*^n(\tau)$ και d_n ο συνδετικός ομομορφισμός.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in U \cap V$. Το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα ενθέσεων

$$\begin{array}{ccccc} (U\cap V, x_0) & \xrightarrow{k} & (U, x_0) & \xrightarrow{l} & (U, U\cap V) \\ \downarrow{j} & & \downarrow{q} & & \downarrow{i} \\ (V, x_0) & \xrightarrow{r} & (X, x_0) & \xrightarrow{m} & (X, V) \end{array} ,$$

επάγει στην ομολογία το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες είναι ακριβείς

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U\cap V, x_0) & \xrightarrow{k_*^n} & H_n(U, x_0) & \xrightarrow{l_*^n} & H_n(U, U\cap V) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(U\cap V, x_0) \\ \downarrow{j_*^n} & & \downarrow{q_*^n} & & \downarrow{i_*^n} & & \downarrow{j_*^{n-1}} \\ H_n(V, x_0) & \xrightarrow{r_*^n} & H_n(X, x_0) & \xrightarrow{m_*^n} & H_n(X, V) & \xrightarrow{d_n'} & H_{n-1}(V, x_0) \end{array} .$$

Άρα από το λήμμα Barratt-Whitehead για $A_n = H_n(U \cap V, x_0)$, $B_n = H_n(U, x_0)$, $C_n = H_n(U, U \cap V)$, $A_n' = H_n(V, x_0)$, $B_n' = H_n(X, x_0)$ και $C_n' = H_n(X, V)$ έχουμε την επόμενη ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to H_n(U\cap V, x_0) \xrightarrow{\psi_*^n} H_n(V,x_0)\oplus H_n(U,x_0) \xrightarrow{\phi_*^n} H_n(X,x_0) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(U\cap V,x_0) \to \cdots.$$

Είναι $H_n(U\cap V, x_0) \simeq \tilde{H}_n(U\cap V), H_n(U,x_0) \simeq \tilde{H}_n(U), H_n(V,x_0) \simeq \tilde{H}_n(V)$ και $H_n(X,x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$, και οι ομομορφισμοί ψ_*^n, ϕ_*^n και Δ_n, όπως στην προηγούμενη πρόταση, συνεπώς η ακολουθία

$$\cdots \to \tilde{H}_n(U\cap V) \to \tilde{H}_n(U)\oplus \tilde{H}_n(V) \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n-1}(U\cap V) \to \cdots$$

είναι ακριβής. □

Πρόταση 15.8.5. ***(Ομολογία του κύκλου*** $\mathbb{S}^1$ ***)*** *Ισχύει*

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=1 \\ \{0\}, & q\neq 1 \end{cases}.$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^1) \simeq \{0\}$.
Για την περίπτωση που $q>0$, θεωρούμε τα ανοικτά υποσύνολα $U=\mathbb{S}^1\setminus\{N\}$ και $V=\mathbb{S}^1\setminus\{S\}$ του $\mathbb{S}^1$, όπου N και S είναι τα σημεία (0,1) και (0,-1), αντιστοίχως.
Για τα σύνολα αυτά έχουμε $U\cup V=\mathbb{S}^1$, $U\cap V=\mathbb{S}^1\setminus\{N,S\}\cong \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}\cong (\mathbb{R}\times\{1\})\sqcup(\mathbb{R}\times\{2\})$ και $U\cong V\cong\mathbb{R}$, άρα $\tilde{H}_0(U)=\tilde{H}_0(V)\simeq\{0\}$. Από το Θεώρημα Mayer-Vietoris συμπεραίνουμε ότι η παρακάτω ακολουθία

$$\cdots \to \tilde{H}_q(U)\oplus\tilde{H}_q(V) \to \tilde{H}_q(\mathbb{S}^1) \to \tilde{H}_{q-1}(U\cap V) \to \tilde{H}_{q-1}(U)\oplus\tilde{H}_{q-1}(V) \to \cdots \quad (15.38)$$

είναι ακριβής.

- Για $q>1$ έχουμε ότι

$$\tilde{H}_q(U)\simeq\tilde{H}_q(V)\simeq\tilde{H}_q(\mathbb{R})\simeq\{0\}$$
$$\Rightarrow \tilde{H}_q(U)\oplus\tilde{H}_q(V)\simeq\{0\}.$$

  Επίσης

$$\tilde{H}_{q-1}(U)\simeq\tilde{H}_{q-1}(V)\simeq\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R})\simeq\{0\}$$
$$\Rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U)\oplus\tilde{H}_{q-1}(V)\simeq\{0\}.$$

  Επομένως η (15.38) συνεπάγεται την

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^1)\simeq\tilde{H}_{q-1}(U\cap V). \quad (15.39)$$

  Αλλά

$$\begin{aligned} U\cap V &\cong \big(\mathbb{R}\times\{1\}\big)\sqcup\big(\mathbb{R}\times\{2\}\big) \\ &\Rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U\cap V) \\ &\simeq \tilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{R}\times\{1\}\big)\oplus\tilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{R}\times\{2\}\big) \\ &\simeq \{0\}\oplus\{0\}\simeq\{0\}, \end{aligned}$$

  άρα

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^1) \simeq \{0\}.$$

- Για $q = 1$ έχουμε $\tilde{H}_1(U) \simeq \tilde{H}_1(V) \simeq \tilde{H}_0(U) \simeq \tilde{H}_0(V) \simeq \{0\}$ και $H_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, γιατί $U \cap V \cong \big(\mathbb{R} \times \{1\}\big) \sqcup \big(\mathbb{R} \times \{2\}\big)$. Άρα $\tilde{H}_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$, συνεπώς η (15.38) γίνεται

$$\{0\} \to \tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \to \tilde{H}_0(U \cap V) \to \{0\},$$

άρα $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \simeq \tilde{H}_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$. □

Συμπέρασμα: Ο κύκλος έχει μία μόνον τρύπα στην διάσταση 1.

Πρόταση 15.8.6. ***(Ομολογία της σφαίρας $\mathbb{S}^n$)*** *Ισχύει*

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}.$$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n. Ήδη αποδείξαμε την πρόταση για $n = 1$. Δεχόμαστε ότι

$$\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases},$$

και θεωρούμε τα ανοικτά υποσύνολα $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ και $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ της $\mathbb{S}^n$, όπου N, S ο βόρειος και ο νότιος πόλος της $\mathbb{S}^n$, αντιστοίχως. Έχουμε $U \cup V = \mathbb{S}^n$ και $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Επιπλέον, $U \cong V \cong \mathbb{R}^n$, άρα $\tilde{H}_q(U) \simeq \tilde{H}_q(V) \simeq \{0\}$ για κάθε q. Από το θεώρημα Mayer-Vietoris έχουμε ότι η παρακάτω ακολουθία

$$\tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V) \to \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) \to \tilde{H}_{q-1}(U) \oplus \tilde{H}_{q-1}(V)$$

είναι ακριβής. Άλλα, $\tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V) \simeq \tilde{H}_{q-1}(U) \oplus \tilde{H}_{q-1}(V) \simeq \{0\}$, επομένως

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \simeq \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases},$$

επομένως η επαγωγική απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Συμπέρασμα: Η σφαίρα $\mathbb{S}^n$ έχει μια μόνον τρύπα στη διάσταση n.

Για την καλύτερη αφομοίωση των εννοιών της ιδιάζουσας ομολογίας, οι οποίες είναι ομολογουμένως δύσκολες συνιστούμε την μελέτη των ασκήσεων στο τέλος του κεφαλαίου. Πολλές από αυτές μπορούν να θεωρηθούν και ως συμπληρώματα θεωρίας.

15.9 Απόδειξη του θεωρήματος εκτομής

Η απόδειξη του θεωρήματος εκτομής στηρίζεται στην γόνιμη ιδέα σύμφωνα με την οποία για τον υπολογισμό της ομολογίας ενός χώρου δεν χρειάζονται όλες οι ιδιάζουσες αλυσίδες, αλλά ένα μέρος από αυτές, οι λεγόμενες "μικρές αλυσίδες".

Ορισμός 15.9.1. **Αφινικό p-πλέγμα** στον χώρο X είναι κάθε ιδιάζον p-πλέγμα σ του X, για το οποίο ισχύει

$$\sigma\Big(\sum_{i=0}^{p} t_i e_i\Big) = \sum_{i=0}^{p} t_i \sigma(e_i),$$

αν $t_0, \dots, t_p \in \mathbb{I}$, με $\sum\limits_{i=0}^{p} t_i = 1$ και $\{e_0, e_1, \dots, e_p\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{p+1}$. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που $X = \Delta^q$. Γεωμετρικά το αφινικό p-πλέγμα σ στον Δ^q απεικονίζει την τομή κάθε υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^{p+1}$ με το Δ^q σε τομή ενός υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^{q+1}$ με το Δ^{q+1}. Θέτουμε $u_i = \sigma(e_i)$ και συμβολίζουμε το αφινικό p-πλέγμα σ, με $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p]$, δηλαδή ουσιαστικά το ταυτίζουμε με την εικόνα του. Μια αφινική p-αλυσίδα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές ακέραιους αφινικών p-πλεγμάτων. Το σύνολο των αφινικών p-αλυσίδων του Δ^q συμβολίζουμε με $L_p(\Delta^q)$ και το σύνολο των αφινικών p-πλεγμάτων συμβολίζουμε με $SL_p(\Delta^q)$.

Παράδειγμα αφινικού p-πλέγματος στον Δ^q είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\delta : \Delta^q \to \Delta^q$.

Παρατήρηση: Προφανώς το σύνολο $L_p(\Delta^q)$ είναι υποομάδα της ομάδας $C_p(\Delta^q)$. Είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση το σύνολο $SL_p(\Delta^q)$.

Στο σύνολο $L_p(\Delta^q)$ θα ορίσουμε τον τελεστή βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης, αφού πρώτα δούμε την έννοια του κωνικού ομομορφισμού, η οποία είναι προαπαιτούμενη για τον ορισμό αυτόν.
Έστω $u \in \Delta^q$ και $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p] \in SL_p(\Delta^q)$. Ως **κώνο με βάση το σ και κορυφή το u** ορίζουμε το αφινικό ιδιάζον $p+1$-πλέγμα $con(u,\sigma) = [u, u_0, u_1, \dots, u_p]$ του Δ^q, δηλαδή $con(u,\sigma)(e'_0) = u, con(u,\sigma)(e'_1) = u_0, ..., con(u,\sigma)(e'_{p+1}) = u_p$, όπου $\{e'_0, e'_1, \dots, e'_{p+1}\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{p+2}$. Επιπλέον ορίζουμε ως κώνο με κορυφή το u και βάση το 0 να είναι το 0.
Επεκτείνοντας τον ορισμό στις ιδιάζουσες αφινικές έχουμε: Αν $\gamma = \sum n_\sigma \sigma$, τότε ορίζουμε $con(u,\gamma) = \sum n_\sigma con(u,\sigma)$. Έτσι έχουμε έναν ομομορφισμό

$$con(u, \dots) : L_p(\Delta^q) \to L_{p+1}(\Delta^q),$$

τον λεγόμενο **κωνικό ομομορφισμό** στις αφινικές ιδιάζουσες αλυσίδες.
[8] Για $p > 0$, αν $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p] \in SL_p(\Delta^q)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial\big(con(u,\sigma)\big) &= [u_0, u_1, \dots, u_p] - \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [u, u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p] \\
&= [u_0, u_1, \dots, u_p] - con\big(u, \partial(\sigma)\big) \\
&= \sigma - con\big(u, \partial(\sigma)\big).
\end{aligned}$$

[8] Με το σύμβολο $\sum$ εννοούμε πάντοτε ένα πεπερασμένο άθροισμα

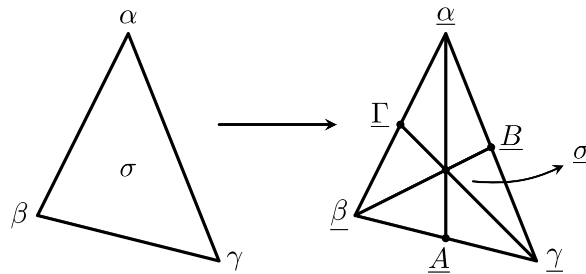
[9] Το καπελάκι $\hat{u_i}$ πάνω από το u_i σημαίνει ότι παραλείπουμε τον όρο u_i και έχουμε το αφινικό πλέγμα $[u, u_0, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_p]$.
Για $p = 0$ έχουμε: $\partial\big(con(u, \sigma)\big) = \sigma - [u]$. Και για μια 0-αφινική αλυσίδα $\gamma = \sum n_\sigma \sigma$ έχουμε: $\partial\big(con(u, \gamma)\big) = \sigma - \epsilon(\gamma)[u]$, όπου $\epsilon(\gamma) = \sum\limits_{\sigma} n_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Ερχόμαστε στον ζητούμενο ορισμό του τελεστή βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης, τον οποίο συμβολίζουμε με Sd.

Ορισμός 15.9.2. Αν $\sigma \in SL_0(\Delta^q)$, τότε ορίζουμε $Sd(\sigma) = \sigma$.
Υποθέτουμε ότι $p \geq 1$ και ότι έχουμε ορίσει το $Sd(\sigma)$, αν $\sigma \in SL_r(\Delta^q)$ για κάθε $r \leq p-1$, τότε για $\sigma \in SL_p(\Delta^q)$ ορίζουμε $Sd(\sigma) = con\big(\underline{\sigma}, Sd\big(\partial(\sigma)\big)\big)$, όπου $\underline{\sigma}$ είναι το βαρύκεντρο του σ, δηλαδή, αν $\sigma = [u_0, u_1, \ldots, u_p]$, τότε $\underline{\sigma} = \sum\limits_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1} u_i$.
Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ορίσει μια απεικόνιση $Sd : SL_p(\Delta^q) \to L_p(\Delta^q)$, την οποία επεκτείνουμε μονοσήμαντα σε ένα ομομορφισμό

$$Sd : L_p(\Delta^q) \to L_p(\Delta^q).$$

Παρατήρηση: Με απλά λόγια η βαρυκεντρική υποδιαίρεση ενός p-πλέγματος σ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός p-αλυσίδων με συντελεστές ± 1. Κάθε μία από αυτές τις p-αλυσίδες έχει τη μορφή $[\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1, \ldots, \underline{\sigma}_p]$, όπου $\underline{\sigma}_0$ είναι το βαρύκεντρο του σ, $\underline{\sigma}_1$ είναι το βαρύκεντρο μιας $(p-1)$-όψης του σ κ.ο.κ. Για παράδειγμα βλέπε το επόμενο σχήμα



Σχήμα 15.2

Στο σχήμα 15.2 έχουμε τις εξής αλυσίδες: $[\underline{\sigma}, \underline{A}, \underline{\beta}], [\underline{\sigma}, \underline{A}, \underline{\gamma}], [\underline{\sigma}, \underline{B}, \underline{\gamma}], [\underline{\sigma}, \underline{B}, \underline{\alpha}], [\underline{\sigma}, \underline{\Gamma}, \underline{\beta}]$ και $[\underline{\sigma}, \underline{\Gamma}, \underline{\alpha}]$.

Πρόταση 15.9.1. *Η $Sd : L_p(\Delta^q) \to L_p(\Delta^q)$, $p \geq 0$ είναι μια αλυσιδωτή ακολουθία ομομορφισμών.*

Απόδειξη: Με απαγωγή στο p, αρκεί να δείξουμε ότι $\partial\big(Sd_p(\gamma)\big) = Sd_{p-1}\big(\partial(\gamma)\big)$, με $\gamma \in L_p(\Delta^q)$

$$\begin{array}{ccc} L_p(\Delta^q) & \xrightarrow{\partial} & L_{p-1}(\Delta^q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Sd} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Sd} \\ L_p(\Delta^q) & \xrightarrow{\partial} & L_{p-1}(\Delta^q) \end{array}$$

[9]Βλέπε και πρόταση 15.4.14

Για $p = 0$ και $\sigma \in SL_0(\Delta_q)$ έχουμε $Sd(\partial(\sigma)) = Sd(0) = 0$ και $\partial(Sd(\sigma)) = \partial(\sigma) = 0$, επομένως η ζητούμενη ισότητα αληθεύει για κάθε $\gamma \in L_0(\Delta_q)$.

Δεχόμαστε ότι $\partial\big(Sd(\gamma)\big) = Sd\big(\partial(\gamma)\big)$, αν $\gamma \in L_p(\Delta^q)$. Αν $\sigma \in SL_{p+1}(\Delta^q)$, τότε

$$\begin{aligned}
\partial\big(Sd(\sigma)\big) &= \partial\Big(con\big(\underline{\sigma}, Sd\big(\partial(\sigma)\big)\Big) \\
&= Sd\big(\partial(\sigma)\big) - con\Big(\underline{\sigma}, \partial\big(Sd(\partial(\sigma))\big)\Big) \\
&= Sd\big(\partial(\sigma)\big) - con\Big(\underline{\sigma}, Sd\big(\partial(\partial(\sigma))\big)\Big) \\
&= Sd\big(\partial(\sigma)\big) - con(\underline{\sigma}, 0) \\
&= Sd\big(\partial(\sigma)\big),
\end{aligned}$$

άρα και για την οποιαδήποτε αφινική αλυσίδα γ ισχύει $\partial\big(Sd_p(\gamma)\big) = Sd_{p-1}\big(\partial(\gamma)\big)$, επομένως η επαγωγή ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 15.9.2. *Η ακολουθία των ομομορφισμών* $Sd_p : L_p(\Delta^q) \to L_p(\Delta^q), p \geq 0$ *και η ακολουθία των ταυτοτικών ομομορφισμών* $i_p : L_p(\Delta^q) \to L_p(\Delta^q), p \geq 0$ *είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Ορίζουμε επαγωγικά την απεικόνιση $T_p : SL_p(\Delta^q) \to L_{p+1}(\Delta^q)$, ώστε $T_0(\sigma) = 0$ και $T_p(\sigma) = con\big(\underline{\sigma}, Sd(\sigma) - \sigma - T_{p-1}\big(\partial(\sigma)\big)\big)$ για $p > 1$ και την επεκτείνουμε σε έναν ομομορφισμό $T_p : L_p(\Delta^q) \to L_{p+1}(\Delta^q)$.
Έστω $\sigma \in SL_p(\Delta^q)$. Με επαγωγή στο p θα δείξουμε ότι $(\partial \circ T_p)(\sigma) + (T_{p-1} \circ \partial)(\sigma) = Sd(\sigma) - \sigma$. Έχουμε ότι $T_1(\sigma) = con\big(\underline{\sigma}, Sd(\sigma) - \sigma\big)$, επομένως

$$\begin{aligned}
(\partial \circ T_1)(\sigma) &= \partial\big(con(\underline{\sigma}, Sd(\sigma) - \sigma)\big) \\
&= Sd(\sigma) - \sigma - con\big(\underline{\sigma}, \partial(Sd(\sigma)) - \partial(\sigma)\big) \\
&= Sd(\sigma) - \sigma - con\big(\underline{\sigma}, Sd(\partial(\sigma)) - \partial(\sigma)\big) \\
&= Sd(\sigma) - \sigma - con\big(\underline{\sigma}, 0\big) \\
&= Sd(\sigma) - \sigma.
\end{aligned}$$

Άρα $(\partial \circ T_1)(\sigma) + (T_0 \circ \partial)(\sigma) = Sd(\sigma) - \sigma$, επομένως η πρόταση αληθεύει για $p = 1$.
Δεχόμαστε ότι $(\partial \circ T_p)(\gamma) + (T_{p-1} \circ \partial)(\gamma) = Sd(\gamma) - \gamma$ για κάθε αφινική αλυσίδα γ. Αν $\sigma \in SL_p(\Delta^q)$, τότε $T_{p+1}(\sigma) = con\big(\underline{\sigma}, Sd(\sigma) - \sigma - T_p\big(\partial(\sigma)\big)\big)$, άρα

$$\begin{aligned}
(\partial \circ T_{p+1})(\sigma) &= \partial\big(con\big(\underline{\sigma}, Sd(\sigma) - \sigma - T_p(\partial(\sigma))\big)\big) \\
&= Sd(\sigma) - \sigma - T_p(\partial(\sigma)) - con\big(\underline{\sigma}, \partial(Sd(\sigma)) - \partial(\sigma) - \partial(T_p(\partial(\sigma)))\big).
\end{aligned}$$

Αλλά από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}
\partial\big(T_p(\partial(\sigma)\big) &= -T_{p-1}(\partial(\partial(\sigma))) + Sd(\partial(\sigma)) - \partial(\sigma) \\
&= Sd(\partial(\sigma)) - \partial(\sigma),
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}(\partial\circ T_{p+1})(\sigma)&=Sd(\sigma)-\sigma-T_p(\partial(\sigma))-con\big(\underline{\sigma},\partial(Sd(\sigma))-\partial(\sigma)-\partial(T_p(\partial(\sigma)))\big)\\&=Sd(\sigma)-\sigma-T_p(\partial(\sigma))-con\big(\underline{\sigma},0\big)\\&=Sd(\sigma)-\sigma-T_p(\partial(\sigma)),\end{aligned}$$

άρα η επαγωγή ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 15.9.3. Αν X είναι τοπολογικός χώρος, τότε ορίζουμε την απεικόνιση $Sd : S_p(X) \to C_p(X)$, ώστε $Sd(\sigma) = \sigma_\diamond\big(Sd(\delta_p)\big)$, όπου $\delta_p : \Delta^p \to \Delta^p$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, την οποία επεκτείνουμε σε έναν μοναδικό ομομορφισμό $Sd : C_p(X) \to C_p(X)$.

Πρόταση 15.9.3. *Η ακολουθία των ομομορφισμών $Sd : C_p(X) \to C_p(X)$ και η ακολουθία των ταυτοτικών ομομορφισμών $i_p : C_p(X) \to C_p(X)$ είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση $T_p : S_p(X) \to C_{p+1}(X)$, με $T_p(\sigma) = \sigma_\diamond\big(T_p(\delta_p)\big)$, την οποία επεκτείνουμε μονοσήμαντα σε ομομορφισμό $T_p : C_p(X) \to C_{p+1}(X)$. Εφεξής για λόγους συντομίας και, επειδή δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, οι δείκτες από τα T_p i_p και δ_p θα παραλείπονται.

- Αν $f : X \to X$ συνεχής απεικόνιση, τότε

$$\begin{aligned}(Sd\circ f_\diamond)(\sigma)&=\big(Sd\circ(f\circ\sigma)_\diamond\big)(\delta)\\&=(f\circ\sigma)_\diamond\big(Sd(\delta)\big)\\&=f_\diamond\circ\big(\sigma_\diamond(Sd(\delta)\big)\\&=(f_\diamond\circ Sd)(\sigma),\end{aligned}$$

  άρα $Sd\circ f_\diamond = f_\diamond\circ Sd$. Επίσης

$$\begin{aligned}(T\circ f_\diamond)(\sigma)&=\big(T\circ(f\circ\sigma)_\diamond\big)(\delta)\\&=(f\circ\sigma)_\diamond\big(T(\delta)\big)\\&=f_\diamond\circ\big(\sigma_\diamond(T(\delta)\big)\\&=(f_\diamond\circ T)(\sigma),\end{aligned}$$

  άρα

$$\begin{aligned}(Sd\circ\partial)(\sigma)&=Sd\big(\partial(\sigma_\diamond(\delta))\big)\\&=Sd\big(\sigma_\diamond(\partial(\delta))\big)\\&=\sigma_\diamond\big(Sd(\partial(\delta))\big)\\&=\sigma_\diamond\big(\partial(Sd(\delta))\big)\\&=(\partial\circ Sd)(\sigma),\end{aligned}$$

  άρα ο Sd είναι αλυσιδωτός ομομορφισμός.

- Έχουμε

$$\begin{aligned}(T\circ\partial)(\sigma) &= T\big(\sigma_\diamond(\partial(\delta))\big)\\ &= \sigma_\diamond\big(T(\partial(\delta))\big)\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(\partial\circ T)(\sigma) &= (\partial\circ\sigma_\diamond)(T(\delta))\\ &= \sigma_\diamond\big((\partial\circ T)(\delta)\big),\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}(T\circ\partial)(\sigma)+(\partial\circ T)(\sigma) &= \sigma_\diamond\big((T\circ\partial)(\delta)+(\partial\circ T)(\delta)\big)\\ &= \sigma_\diamond\big(Sd(\delta)-\delta\big)\\ &= Sd(\sigma)-\sigma,\end{aligned}$$

επομένως οι ακολουθίες Sd και i_p είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές. □

Ορισμός 15.9.4. Ορίζουμε $Sd^1 = Sd$ και $Sd^{k+1} = Sd\circ Sd^k$.

Πρόταση 15.9.4. *Η ακολουθία Sd^k και η ακολουθία i_p είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία ομομορφισμών $T_p : C_p(X)\to C_{p+1}(X)$, ώστε

$$\partial\circ T_p + T_{p-1}\circ\partial = Sd - i_p \tag{15.40}$$

$$\begin{array}{ccccc}
C_{p+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_p(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(X)\\
 & & \downarrow{\scriptstyle Sd} & & \downarrow{\scriptstyle Sd}\\
C_{p+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_p(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(X)\\
 & \swarrow{\scriptstyle T_p} & \downarrow{\scriptstyle Sd} & \swarrow{\scriptstyle T_{p-1}} & \downarrow{\scriptstyle Sd}\\
C_{p+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_p(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(X)
\end{array}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(15.33)\Rightarrow Sd^2 - Sd &= Sd\circ(Sd - i_p)\\ &= Sd\circ\big(\partial\circ T_p + T_{p-1}\partial\big)\\ &= (Sd\circ\partial)\circ T_p + (Sd\circ T_{p-1})\circ\partial\\ &= \partial\circ(Sd\circ T_p) + (Sd\circ T_{p-1})\circ\partial.\end{aligned}$$

Ο $T'_p = Sd\circ T_p$ είναι ομομορφισμός από την $C_p(X)$ στην $C_{p+1}(X)$, με

$$\partial\circ T'_p + T'_{p-1}\circ\partial = Sd^2 - Sd \tag{15.41}$$

Από τις (15.40) και (15.41) έχουμε $\partial \circ T_p' + \partial \circ T_p + T_{p-1}' \circ \partial + T_{p-1} \circ \partial = Sd^2 - i_p$, άρα $\partial \circ \big(T_p' + T_p\big) + \big(T_{p-1}' + T_{p-1}\big) \circ \partial = Sd^2 - i_p$.
Επομένως οι ακολουθίες ομομορφισμών Sd^2 και i_p είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές. Επαγωγικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ακολουθίες ομομορφισμών Sd^k και i_p είναι αλυσιδωτά ομοτοπικές για κάθε $k \geq 1$. □

Λήμμα 15.9.5. *Έστω $\sigma = [u_0, \ldots, u_p] \in SL_p(\Delta^q)$ και $Sd(\sigma) = \sum_i n_i \tau_i$, όπου $n_i \in \mathbb{Z}$, τότε $\operatorname{diam}(\tau_i) \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam}\big([u_0, \ldots, u_p]\big)$ για κάθε i.*

Απόδειξη: Κάθε τ_i έχει τη μορφή $con(\underline{\sigma}, \tau)$, όπου τ είναι ένα πλέγμα της αλυσίδας $Sd(\partial(\sigma))$ ή αλλιώς τ είναι ένα πλέγμα του $Sd\big(F_i(\sigma)\big)$, όπου το $F_i(\sigma)$ είναι η i-όψη του σ. Επομένως κάθε τ_i είναι της μορφής $[\underline{\sigma_0}, \underline{\sigma_1}, \underline{\sigma_2}, \ldots]$, όπου $\sigma_0 = \sigma > \sigma_1 > \sigma_2 > \ldots$ και η σχέση $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ σημαίνει ότι το σ_{i+1} είναι όψη του σ_i. Κάθε ένα από τα βαρύκεντρα $\underline{\sigma_i}$ είναι η μέση τιμή κάποιων από τα u_i. Ας πούμε ότι για όλα τα βαρύκεντρα χρησιμοποιούμε τα $w_1, \ldots, w_k \in \{u_0, \ldots, u_p\}$. θα δείξουμε ότι

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i \right\| \leq \frac{p}{p+1} \max_{i,j} \|w_i - w_j\|, \tag{15.42}$$

όπου $m < k \leq p+1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i \right\| &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^{k} w_i \right\| \\
&= \left\| \frac{k-m}{km} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^{k} w_i \right\| \\
&= \frac{k-m}{k} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^{k} w_i \right\|.
\end{aligned}$$

Επειδή τα $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i$ και $\frac{1}{k-m}\sum_{i=1}^{k} w_i$ ανήκουν στην κυρτή θήκη των $w_1, \ldots, w_k$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{k-m}{k} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^{k} w_i \right\| &\leq \frac{k-m}{k} \max_{i,j} \|w_i - w_j\| \\
&\leq \frac{k-1}{k} \max_{i,j} \|w_i - w_j\| \\
&\leq \frac{p}{p+1} \max_{i,j} \|w_i - w_j\|.
\end{aligned}$$

Το $\frac{k-1}{k} \leq \frac{p}{p+1}$ ισχύει, επειδή η συνάρτηση $\frac{x}{x+1}$, $x \geq 0$ είναι αύξουσα. Επομένως

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\tau_i) &= \max_i \left\| \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w_i \right\| \\ &\leq \frac{p}{p+1} \max_{i,j} \|w_i - w_j\| \\ &\leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam}\big([u_0, \ldots, u_p]\big).\end{aligned}$$

□

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου λήμματος είναι η πρόταση

Πρόταση 15.9.6. *Έστω $Sd^k(\sigma) = \sum_i n_i \sigma_i$, όπου $\sigma_i \in L_p(\Delta^q)$. Τότε*

$$\operatorname{diam}(\sigma_i) \leq \big(\tfrac{p}{p+1}\big)^k \operatorname{diam}(\Delta^q)$$

για κάθε i.

Πρόταση 15.9.7. *Έστω τοπολογικός χώρος X, $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X και $\sigma \in C_p(X)$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός k, ώστε, αν $Sd^k(\sigma) = \sum_i n_i \tau_i$, τότε κάθε ένα από τα τ_i να ανήκει σε κάποιο στοιχείο του καλύμματος $\mathcal{U}$.*

Απόδειξη: Η απεικόνιση $\sigma : \Delta^p \to X$ είναι συνεχής, επομένως το $\mathcal{V} = \{\sigma^{-1}(U_j), j \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς Δ^p. Έστω ότι $Sd^k(i_p) = \sum_i n_i \tau_i$, όπου $\tau_i \in SL_p(\Delta^q)$. Από την προηγούμενη πρόταση, επειδή $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\tau_i) = 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε $\max\{\operatorname{diam}(\tau_i)\} < \lambda$, όπου λ είναι ο αριθμός Lebesque του καλύμματος $\mathcal{V}$. Άρα υπάρχει $l \in I$, ώστε $\tau_i \in \sigma^{-1}(U_l)$, άρα $\sigma(\tau_i) \in \sigma(\sigma^{-1}(U_l)) \subseteq U_l$. □

Ορισμός 15.9.5. Κάθε ένα από τα τ_i της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται $\mathcal{U}$-**μικρό ιδιάζον πλέγμα**.

Έστω $\mathcal{V} = \{U_i, i \in I\}$ οικογένεια υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X τέτοιων, ώστε $X = \bigcup_{i\in I} U_i^0$. Αν $C_p^{\mathcal{V}}(X)$ είναι η υποομάδα της $C_p(X)$, η οποία παράγεται από τα $\mathcal{V}$-μικρά πλέγματα του X, τότε την p-ομολογία της $C_p^{\mathcal{V}}(X)$ συμβολίζουμε με $H_p^{\mathcal{V}}(X)$.

Πρόταση 15.9.8. *Η ένθεση $i : H_p^{\mathcal{V}}(X) \to H_p(X)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη:
- Έστω $[0] = i\big([\gamma_{\mathcal{V}}]\big) = [\gamma] \in H_p(X)$. Άρα $\partial(\gamma) = 0$ και , επιπλέον υπάρχει $\delta \in C_{p+1}(X)$, ώστε $\partial(\delta) = \gamma$. Εξ' άλλου, από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει φυσικός αριθμός k, ώστε $Sd^k(\delta) \in C_{p+1}^{\mathcal{V}}(X)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}Sd^k(\delta) - \delta = T(\partial(\delta)) - \partial(T(\delta)) &\Rightarrow \partial\big(Sd^k(\delta) - \delta\big) = \partial\big(T(\partial(\delta))\big) - \partial\big(\partial(T(\delta))\big) \\ &\Rightarrow \partial\big(Sd^k(\delta)\big) - \partial(\delta) = \partial\big(T(\partial(\delta))\big) \\ &\Rightarrow \gamma = \partial(\delta) = \partial\big(Sd^k(\delta) - T(\partial(\delta))\big)\end{aligned}$$

  και, επειδή $\delta' = Sd^k(\delta) - T(\partial(\delta)) \in C_{p+1}^{\mathcal{V}}(X)$ είναι $\gamma_{\mathcal{V}} = \partial(\delta') \in B_p^{\mathcal{V}}$, άρα $[\gamma_{\mathcal{V}}] = [0]$, άρα $\operatorname{Ker} i = \{[0]\}$, άρα η i είναι 1-1.

- Έστω $[\gamma] \in H_p(X)$, τότε $\gamma \in C_p(X)$ και $\partial(\gamma) = 0$. Επιπλέον υπάρχει φυσικός k, ώστε $[Sd^k(\gamma)] \in H_p^{\mathcal{V}}(X)$. Έχουμε
$$\begin{aligned} Sd^k(\gamma) - \gamma &= T(\partial(\gamma)) + \partial(T(\gamma)) \\ &= \partial(T(\gamma)) \end{aligned}$$
και, επειδή $T(\gamma) \in C_{p+1}(X)$ θα έχουμε $Sd^k(\gamma) \sim \gamma$, άρα $[Sd^k(\gamma)] = [\gamma]$, άρα $i([Sd^k(\gamma)]) = [\gamma]$, επομένως η i είναι επί.

Άρα η i είναι ισομορφισμός. □

Αν A είναι ένας υπόχωρος του χώρου X και $\mathcal{V}$ ένα κάλυμμα του X, όπως στην προηγούμενη πρόταση. Θεωρούμε το κάλυμμα $\mathcal{V}' = \{U \cap A / U \in \mathcal{V}\}$ του A και θέτουμε $C_p^{\mathcal{V}}(X, A) = C_p^{\mathcal{V}}(X)/C_p^{\mathcal{V}'}(A)$ και $H_p\big(C_p^{\mathcal{V}}(X, A)\big) = H_p^{\mathcal{V}}(X, A)$. Τότε

Πρόταση 15.9.9. *Η ένθεση* $i : H_p^{\mathcal{V}}(X, A) \to H_p(X, A)$ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα
$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_p^{\mathcal{V}'}(A) & \longrightarrow & C_p^{\mathcal{V}}(X) & \longrightarrow & C_p^{\mathcal{V}}(X, A) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & C_p(A) & \longrightarrow & C_p(X) & \longrightarrow & C_p(X, A) & \longrightarrow & \{0\} \end{array},$$
στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες είναι ακριβείς, επομένως επάγει στην ομολογία (πρόταση 15.6.7) το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα
$$\begin{array}{ccccccccc} H_p^{\mathcal{V}'}(A) & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & H_p^{\mathcal{V}}(X, A) & \longrightarrow & H_{p-1}^{\mathcal{V}'}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}^{\mathcal{V}'}(X) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ H_p(A) & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & H_p(X, A) & \longrightarrow & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(X) \end{array},$$
Από το λήμμα των πέντε έχουμε $H_p^{\mathcal{V}}(X, A) \simeq H_p(X, A)$. □

Μετά από αυτά μπορούμε να δούμε την **απόδειξη του θεωρήματος εκτομής**.

Απόδειξη: Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{V} = \{A, X \setminus Z\}$. Έχουμε
$$\begin{aligned} \overline{Z} \subseteq A^0 &\Rightarrow X \setminus A^0 \subseteq X \setminus \overline{Z} \\ &\Rightarrow X \supseteq A^0 \cup (X \setminus \overline{Z}) \supseteq A^0 \cup (X \setminus A^0) = X \\ &\Rightarrow X = A^0 \cup (X \setminus \overline{Z}). \end{aligned}$$
Επιπλέον το $X \setminus \overline{Z}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $X \setminus \overline{Z} \subseteq X \setminus Z$, άρα $X \setminus \overline{Z} \subseteq (X \setminus Z)^0$, επομένως $X = A^0 \cup (X \setminus \overline{Z}) \subseteq A^0 \cup (X \setminus Z)^0$, άρα, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $H_p^{\mathcal{V}}(X, A) \simeq H_p(X, A)$. Επιπλέον $C_p^{\mathcal{V}}(X) = C_p(A) + C_p(X \setminus Z)$ και $C_p(A \setminus Z) = C_p(A) \cap C_p(X \setminus Z)$. Από το 2ο θεώρημα των ισομορφισμών έχουμε $\frac{C_p(X \setminus Z)}{C_p(A) \cap C_p(X \setminus Z)} \simeq \frac{C_p(A) + C_p(X \setminus Z)}{C_p(A)}$, άρα $\frac{C_p(X \setminus Z)}{C_p(A \setminus Z)} \simeq \frac{C_p^{\mathcal{V}}(X)}{C_p(A)}$, επομένως υπάρχει ισομορφισμός $i_1 : \frac{C_p(X \setminus Z)}{C_p(X \setminus A)} \to \frac{C_p(X)}{C_p(A)}$, ο οποίος επάγει στην ομολογία τον ισομορφισμό $(i_1)_* : H_p(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_P^{\mathcal{V}}(X, A)$. Ακολούθως έχουμε το επόμενο διάγραμμα ενθέσεων

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{C_p(X\setminus Z)}{C_p(A\setminus Z)} & \xrightarrow{i_1} & \dfrac{C_p^{\mathcal{V}}(X)}{C_p(A)} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle i_2} & \\ \dfrac{C_p(X)}{C_p(A)} & & \end{array},$$

το οποίο επάγει στην ομολογία το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_p(X\setminus Z, A\setminus Z) & \xrightarrow[(i_1)_*]{} & H_p^{\mathcal{V}}(X,A) \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle (i_2)_*} & \\ H_p(X,A) & & \end{array}.$$

Οι ομομορφισμοί $(i_1)_*$ και $(i_2)_*$ είναι ισομορφισμοί. Επιπλέον δε, $i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*$, άρα και ο i_* είναι ισομορφισμός, συνεπώς $H_p(X \setminus Z, A \setminus Z) \simeq H_p(X, A)$. □

15.10 Καλά ζεύγη

Πρόταση 15.10.1. *Αν $A \subseteq V \subseteq X$ και το A είναι συστολή παραμόρφωσης του V, τότε ο ομομορφισμός ϕ που επάγει στην σχετική ομολογία η ένθεση $i : (X, A) \hookrightarrow (X, V)$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $H_n(X, V) \simeq H_n(X, A)$ για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη: Αν εφαρμόσουμε την πρόταση 15.6.7 για τους ομομορφισμούς που επάγει στην ομολογία η ένθεση $i : (X, A) \hookrightarrow (X, V)$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{p_*^n} & H_n(X,A) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*^{n-1}} & H_{n-1}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle k_*^n} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle k_*^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ H_n(V) & \xrightarrow{j_*^n} & H_n(X) & \xrightarrow{q_*^n} & H_n(X,V) & \xrightarrow{d'_{n-1}} & H_{n-1}(V) & \xrightarrow{j_*^{n-1}} & H_{n-1}(X) \end{array}.$$

Επειδή ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του V, ο ομομορφισμός $k_*^m : H_m(A) \to H_m(V)$ που επάγει η ένθεση $k : A \hookrightarrow V$ είναι ισομορφισμός για κάθε $m \geq 0$ (πρόταση 15.4.20). Επομένως, από το λήμμα των πέντε συμπεραίνουμε ότι η ϕ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 15.10.2. *Αν $A \subseteq Y \subseteq X$ και το Y είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε ο ομομορφισμός που επάγει στην ομολογία η ένθεση $i : (Y, A) \hookrightarrow (X, A)$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $H_n(X, A) \simeq H_n(Y, A)$ για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη: Αν εφαρμόσουμε την πρόταση 15.6.7 για τους ομομορφισμούς που επάγει στην ομολογία η ένθεση $i : (Y, A) \hookrightarrow (X, V)$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, στο οποίο οι οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle (i_A)^n_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle i^n_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle (i_A)^{n-1}_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle i^{n-1}_*} \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array} .$$

Ο ομομορφισμός i^m_* εισάγεται στην ομολογία από την ένθεση $i : Y \hookrightarrow X$ είναι (πρόταση 15.4.20 είναι ισομορφισμός. Οι ομομορφισμοί $(i_A)^m_*$ είναι προφανώς ισομορφισμοί, άρα από το λήμμα των πέντε συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 15.10.3. *Έστω $A \subseteq Y \subseteq X$ και $A \subseteq V \subseteq X$. Αν το Y είναι συστολή παραμόρφωσης του X και το A είναι συστολή παραμόρφωσης του V, τότε ο ομομορφισμός ϕ_*, που επάγει η ένθεση $\phi : (Y,A) \hookrightarrow (X,V)$ στην ομολογία είναι ισομορφισμός, δηλαδή $H_n(X,V) \simeq H_n(Y,A)$ για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη: Αν $i : (Y,A) \hookrightarrow (X,A)$ και $j : (X,A) \hookrightarrow (X,V)$ είναι ενθέσεις, τότε έχουμε $\phi = j \circ i$, άρα για τους ομομορφισμούς $\phi_* : H_n(Y,A) \to H_n(X,V)$, $j_* : H_n(X,A) \to H_n(X,V)$ και $i_* : H_n(Y,A) \to H_n(X,A)$ ισχύει η σχέση $\phi_* = j_* \circ i_*$. Από τις προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι οι ομομορφισμοί j_* και i_* είναι ισομορφισμοί, άρα ο ϕ_* είναι ισομορφισμός, ως σύνθεση ισομορφισμών. □

Λήμμα 15.10.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq U \subseteq X$. Αν το A είναι συστολή παραμόρφωσης του U, τότε το A/A είναι συστολή παραμόρφωσης του U/A.*

Απόδειξη: Αρχικά, ας παρατηρήσουμε ότι ο χώρος A/A αποτελείται από ένα μόνον στοιχείο, το $[a]$, όπου $a \in A$. Το A είναι συστολή παραμόρφωσης του U, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : U \times \mathbb{I} \to U$, ώστε

$$F(x,0) = x \quad \forall x \in U,$$
$$F(x,1) \in A \quad \forall x \in U,$$
$$F(a,t) = a \quad \forall a \in A \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $F' : U/A \times \mathbb{I} \to U/A$, με $F'([x],t) = \big[F(x,t)\big]$. Έχουμε

$$F'([x],0) = \big[F(x,0)\big] = [x] \quad \forall [x] \in U/A,$$
$$F'([x],1) = \big[F(x,1)\big] = [a] \wedge a \in A,$$

άρα $F'([x],1) \in A/A$. Έστω $[a] \in A/A$, τότε $a \in A$, άρα $F(a,t) = a$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα $F'\big([a],t\big) = \big[f(a,t)\big] = [a]$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$, άρα το A/A είναι συστολή παραμόρφωσης του U/A. □

Πρόταση 15.10.5. *Έστω A ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του X, το οποίο είναι συστολή παραμόρφωσης του ανοικτού υποσυνόλου U του X. Τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $H_n(X,A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$.*

Απόδειξη: Έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{r_1} & H_n(X,U) & \xleftarrow[\phi_1]{} & H_n(X\setminus A, U\setminus A) \\ \downarrow k & & \downarrow q & & \downarrow p \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{r_2} & H_n(X/A, U/A) & \xleftarrow[\phi_2]{} & H_n(X/A\setminus\{A/A\}, U/A\setminus\{A/A\}) \end{array}.$$

Οι r_1, r_2 είναι ισομορφισμοί, όπως συμπεραίνουμε από τις προηγούμενες προτάσεις. Το θεώρημα εκτομής, συνεπάγεται ότι οι ϕ_1, ϕ_2 και p είναι ισομορφισμοί. Ο q είναι ισομορφισμός, γιατί $q = \phi_2 \circ p \circ \phi_1^{-1}$. Επομένως ο k είναι ισομορφισμός, γιατί $k = r_2^{-1} \circ q \circ r_1$. Άρα $H_n(X, A) \simeq H_n(X/A, A/A)$ και, επειδή $H_n(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$, έχουμε το ζητούμενο. □

Σχόλιο: Αν (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος δεν ισχύει πάντα ο ισομορφισμός $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$.
Για παράδειγμα, αν $X = \mathbb{S}^1$ και $A = \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$, με $p \in \mathbb{S}^1$, τότε ο A είναι ένας συσταλτός χώρος. Επιπλέον η ακολουθία $\tilde{H}_1(A) \to \tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \to H_1(\mathbb{S}^1, A) \to \tilde{H}_0(A)$ είναι ακριβής και, επειδή $\tilde{H}_1(A) \simeq \tilde{H}_0(A) \simeq \{0\}$ έχουμε $H_1(\mathbb{S}^1, A) \simeq \tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Αλλά $\mathbb{S}^1/A \cong \{p\}$, άρα $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1/A) \simeq \{0\}$. Επομένως η $H_1\big(\mathbb{S}^1/A\big)$ δεν είναι ισόμορφη με την $H_1(\mathbb{S}^1, A)$.

Ορισμός 15.10.1. Αν ισχύει η $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$ λέμε ότι το τοπολογικό ζεύγος (X, A) είναι ένα **καλό ζεύγος**.

Παρατήρηση: Όπως προκύπτει από την πρόταση 15.10.5 μια ικανή συνθήκη για να είναι το ζεύγος (X, A) καλό είναι το A να είναι κλειστό υποσύνολο του X και να υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, ώστε $A \subset U$ και το A να είναι συστολή παραμόρφωσης του U.

Πρόταση 15.10.6. *Για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε $q \geq 0$ ισχύει*

$$H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση, για $X = \mathbb{D}^n$, $A = \mathbb{S}^{n-1}$ και $U = \big\{x \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1\big\}$ και έχουμε $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1})$. Επιπλέον $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$, άρα $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}$, δηλαδή το ζητούμενο. □

15.11 CW-συμπλέγματα

Το CW-σύμπλεγμα, που είναι μεταφορά στην γλώσσα μας του Αγγλικού όρου CW-complex είναι ένα είδος τοπολογικού χώρου και αποτελεί μια ιδιοφυή σύλληψη του Βρετανού μαθηματικού J. H. C. Whitehead (1904-1960). Οι περισσότεροι από τους γνωστούς χώρους, όπως θα δούμε, είναι CW-συμπλέγματα. Κατά συνέπεια η μελέτη της ομολογίας των CW-συμπλεγμάτων έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 15.11.1. Σε ένα τοπολογικό χώρο X ονομάζουμε **0-κύτταρα** τα σημεία του X και n-**κύτταρα**, με $n \in \mathbb{N}$ τα υποσύνολα του X, τα οποία είναι ομοιόμορφα με τον ανοικτό δίσκο $\mathbb{B}^n$ ή με τον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{B}^n$. Ο φυσικός αριθμός n ονομάζεται **διάσταση του κυττάρου**.

Παρατήρηση: Θα δούμε στην παράγραφο 16.1 πως $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$, αν $n \neq m$. Άρα ένα n-κύτταρο δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφο με ένα m-κύτταρο, όταν $n \neq m$. Επομένως η διάσταση του κυττάρου είναι καλώς ορισμένη.

Ορισμός 15.11.2. Ένας τοπολογικός χώρος X λέμε ότι είναι εφοδιασμένος με μια **κυτταρική διάσπαση** $\{e_i, i \in I\}$, αν και μόνον, αν τα e_i είναι για κάθε $i \in I$ ξένα μεταξύ τους κύτταρα του X, με ένα τουλάχιστον εξ' αυτών να είναι ένα 0-κύτταρο και $X = \bigsqcup_{i \in I} e_i$.

Ορισμός 15.11.3. Ένας χώρος Hausdorff εφοδιασμένος με μια κυτταρική διάσπαση $\{e_i, i \in I\}$ λέμε ότι είναι **CW-σύμπλεγμα**, αν και μόνον, αν ισχύουν τα

- **Αξίωμα χαρακτηριστικής απεικόνισης**: Για κάθε n-κύτταρο e_i, με $n > 0$ της κυτταρικής αυτής διάσπασης, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\phi_i : \mathbb{D}^n \to X$, ώστε ο περιορισμός της στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{B}^n$ να είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του $\mathbb{B}^n$ και του e_i. Η ϕ_i ονομάζεται **χαρακτηριστική απεικόνιση** που αντιστοιχεί στο κύτταρο e_i.
- **Αξίωμα του πεπερασμένου της κλειστότητας**: Αν ϕ_i είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση ενός n-κυττάρου e_i, τότε το σύνολο $\phi_i(\mathbb{S}^{n-1})$ είναι υποσύνολο της ένωσης πεπερασμένου πλήθους κυττάρων της κυτταρικής διάσπασης, τα οποία έχουν διάσταση το πολύ $n-1$.
- **Αξίωμα ασθενούς τοπολογίας**: Αν $A \subseteq X$ και το $A \cap \overline{e_i}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\overline{e_i}$ για κάθε $i \in I$, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Παρατήρηση: Το αξίωμα της ασθενούς τοπολογίας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Αν $A \subseteq X$ και το $A \cap \overline{e_i}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\overline{e_i}$ για κάθε $i \in I$, τότε το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Πράγματι
Αν ονομάσουμε $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_i$ τα σύνολα των ανοικτών υποσυνόλων των X και $\overline{e_i}$, αντιστοίχως και $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i$ τα σύνολα των κλειστών υποσυνόλων τους έχουμε

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow U^c \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow U^c \cap \overline{e}_i \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow \big(U^c \cap \overline{e}_i\big)^c \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow U^c \cup (\overline{e}_i)^c \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow [U^c \cup (\overline{e}_i)^c] \cap \overline{e}_i \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow U^c \cap \overline{e}_i \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Ορισμός 15.11.4. Η ένωση του συνόλου των κυττάρων ενός CW-συμπλέγματος στον X, τα οποία έχουν διάσταση $\leq n$ ονομάζεται n-**σκελετός** του συμπλέγματος και συμβολίζεται με X^n.

Ορισμός 15.11.5. Αν το πλήθος των κυττάρων ενός CW-συμπλέγματος είναι πεπερασμένο, τότε, και μόνον, τότε το CW-σύμπλεγμα X ονομάζεται **πεπερασμένο**. Στην περίπτωση αυτή, αν $X = X^n$ και $X^n \setminus X^{n-1} \neq \varnothing$, ορίζουμε τον φυσικό αριθμό n, ως **διάσταση του συμπλέγματος**.

Παρατηρήσεις:

1. Αν ϕ_i' είναι ο περιορισμός της ϕ_i στην σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε ο χώρος $\mathbb{D}^n \bigsqcup_{\phi_i'} X^{n-1}$ ονομάζεται χώρος που προκύπτει από την επικόλληση του κυττάρου e_i στον X^{n-1} σκελετό.
2. Η απεικόνιση ϕ_i δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Ο περιορισμός της ϕ_i στο σύνορο $\mathbb{S}^{n-1}$ του $\mathbb{D}^n$ ονομάζεται απεικόνιση επικόλλησης του n-κυττάρου e_i.
3. Η αντίστροφη συνεπαγωγή στο αξίωμα 3 του ορισμού 15.10.3. αληθεύει προφανώς.
4. Σε κάθε CW-σύμπλεγμα X αληθεύει η σχέση $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^n \subseteq \cdots$.
5. Η ονομασία CW-σύμπλεγμα οφείλεται στον J. H. Whitehead, [10]ο οποίος το ανακάλυψε. Το γράμμα C στον όρο CW προέρχεται από την έκφραση closure finiteness, η οποία ερμηνεύει το αξίωμα 2 του ορισμού. Το γράμμα W προέρχεται από την έκφραση weak topology και ερμηνεύει το αξίωμα 3 του ορισμού 15.10.3., το οποίο κατ' ουσίαν απαιτεί ο χώρος X να είναι εφοδιασμένος με μία τοπολογία που συμπίπτει με την ασθενή τοπολογία που εισάγεται από την οικογένεια $\{\overline{e_i}, i \in I\}$.
6. Για να εξετάσουμε αν μια κυτταρική διάσπαση του χώρου X, με πεπερασμένο πλήθος κυττάρων εισάγει στον χώρο X μια δομή ενός CW-συμπλέγματος χρειάζεται να ελέγξουμε αν αληθεύει το αξίωμα 1, γιατί τα αξιώματα 2 και 3 αληθεύουν προφανώς.
7. Η συνολοθεωρητική διαφορά $X^n \setminus X^{n-1}$ είναι η ξένη ένωση των n-κυττάρων του CW-συμπλέγματος.

Πρόταση 15.11.1. *Αν ϕ_i είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση που αντιστοιχεί στο n-διάστατο κύτταρο e_i, τότε $\phi_i(\mathbb{D}^n) = \overline{e_i}$.*

Απόδειξη: Έχουμε ότι $\phi_i(\mathbb{D}^n) = \phi_i(\overline{\mathbb{B}^n}) \subseteq \overline{\phi_i(\mathbb{B}^n)}$, άρα

$$\phi_i(\mathbb{D}^n) \subseteq \overline{e_i}. \tag{15.43}$$

Επιπλέον έχουμε ότι $\overline{e_i} = \overline{\phi_i(\mathbb{B}^n)}$ και $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{D}^n$, άρα $\phi_i(\mathbb{B}^n) \subseteq \phi_i(\mathbb{D}^n)$, άρα $\overline{\phi_i(\mathbb{B}^n)} \subseteq \overline{\phi_i(\mathbb{D}^n)}$. Το $\phi_i(\mathbb{D}^n)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, γιατί το $\mathbb{D}^n$ είναι συμπαγές και η ϕ_i είναι συνεχής και, επειδή ο X είναι Hausdorff, είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $\overline{\phi_i(\mathbb{D}^n)} = \phi_i(\mathbb{D}^n)$, επομένως

$$\overline{e_i} = \overline{\phi_i(\mathbb{B}^n)} \subseteq \overline{\phi_i(\mathbb{D}^n)} = \phi_i(\mathbb{D}^n),$$

άρα

$$\overline{e_i} \subseteq \phi_i(\mathbb{D}^n). \tag{15.44}$$

Από τις (15.43) και (15.44) έπεται το ζητούμενο. □

[10]J. H. Whitehead (1904-1960): Βρετανός μαθηματικός, ένας εκ των θεμελιωτών της σύγχρονης αλγεβρικής τοπολογίας.

Παρατήρηση: Αν $\{e_i,\ i \in I\}$ είναι το σύνολο των κυττάρων του CW-συμπλέγματος X διάστασης $\leq n$, τότε $X^n = \bigsqcup_{i\in I} e_i = \bigcup_{i\in I} \overline{e}_i$.

Πρόταση 15.11.2. *Αν ο X είναι ένα πεπερασμένο CW-σύμπλεγμα, τότε ο X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Αν η διάσταση του συμπλέγματος είναι 0, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές. Αν το σύμπλεγμα έχει διάσταση $n > 0$, τότε υπάρχει πεπερασμένο σύνολο I, ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει $e_i \subseteq \overline{e_i} = \phi_i(\mathbb{D}^n) \subseteq X$, όπου ϕ_i μια χαρακτηριστική απεικόνιση του κυττάρου e_i. Άρα

$$\begin{aligned} X &= \bigsqcup_{i\in I} e_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{e_i} \\ &= \bigcup_{i\in I} \phi_i(\mathbb{D}^n) \subseteq X \\ &\Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} \phi_i(\mathbb{D}^n) \end{aligned}$$

και, επειδή τα $\phi_i(\mathbb{D}^n)$ είναι συμπαγή, το ζητούμενο έπεται άμεσα. □

Πρόταση 15.11.3. *Έστω X ένα CW-σύμπλεγμα, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α΄) Η f είναι συνεχής.

β΄) Η $f/\overline{e_i}$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: α') $\Rightarrow$ β'): Προφανές
β') $\Rightarrow$ α'): Έστω $i \in I$ και B κλειστό υποσύνολο του Y, τότε το $(f/\overline{e}_i)^{-1}(B)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\overline{e}_i$. Αλλά $(f/\overline{e}_i)^{-1}(B) = \overline{e}_i \cap f^{-1}(B)$, επομένως, από το τρίτο αξίωμα του ορισμού 15.10.3, συμπεραίνουμε ότι το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα η f είναι συνεχής. □

Πρόταση 15.11.4. *Έστω X ένα CW-σύμπλεγμα, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \times \mathbb{I} \to Y$ απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α΄) Η f είναι συνεχής.

β΄) Ο περιορισμός της f στο $\overline{e}_i \times \mathbb{I}$ είναι συνεχής απεικόνιση για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι άμεσο. Για το ικανό έχουμε:
Αν $e_i, i \in I$ είναι μια κυτταρική διάσπαση του X, η οποία τον καθιστά ένα CW-σύμπλεγμα, τότε η $e_i \times \mathbb{I}, i \in I$ είναι μια κυτταρική διάσπαση του $X \times \mathbb{I}$, η οποία επίσης τον καθιστά ένα CW-σύμπλεγμα. Επιπλέον $\overline{e_i \times \mathbb{I}} = \overline{e_i} \times \mathbb{I}$, επομένως η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της προηγούμενης πρότασης. □

Ορισμός 15.11.6. Έστω X είναι ένα CW-σύμπλεγμα, το οποίο προκύπτει από την κυτταρική διάσπαση $\{e_i, i \in I\}$ και $\varnothing \neq J \subseteq I$. Το $Y = \bigsqcup_{i\in J} e_i$ λέγεται **υποσύμπλεγμα** του X, αν και μόνον, αν $\overline{e}_i \subseteq Y$ για κάθε $i \in J$.

Παρατηρήσεις:

1. Προφανώς, κάθε υποσύμπλεγμα ενός CW-συμπλέγματος είναι επίσης CW-σύμπλεγμα.
2. Οι n-σκελετοί ενός συμπλέγματος είναι υποσυμπλέγματα του συμπλέγματος αυτού.
3. Κάθε κύτταρο ενός CW-συμπλέγματος X ανήκει σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα του X.
4. Η ένωση των οποιονδήποτε n-κυττάρων ενός συμπλέγματος X, μαζί με τον X^{n-1} αποτελούν ένα υποσύμπλεγμα του X.

Πρόταση 15.11.5. *Αν Y είναι ένα υποσύμπλεγμα του CW-συμπλέγματος X, τότε το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό του CW-συμπλέγματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{e}\cap Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\overline{e}$ για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο κύτταρο e του X. Επειδή το $\overline{e}$, από τον ορισμό τέμνει πεπερασμένο πλήθος κυττάρων του X θα τέμνει και πεπερασμένο πλήθος κυττάρων του Y, ας πούμε τα $e_1, \dots, e_n$. Έχουμε $\overline{e}\cap Y = \overline{e}\cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} e_i\big) \subseteq \overline{e}\cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{e}_i\big)$. Αλλά $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{e}_i \subseteq Y$, άρα $\overline{e}\cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} e_i\big) \subseteq \overline{e}\cap Y$, άρα

$$\begin{aligned}\overline{e}\cap Y &= \overline{e}\cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{e}_i\Big)\\ &= \bigcup_{i=1}^{n}(\overline{e}\cap\overline{e}_i).\end{aligned}$$

Όμως τα $\overline{e}\cap\overline{e}_i$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\overline{e}$, άρα το $\overline{e}\cap Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\overline{e}$, άρα το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Ορισμός 15.11.7. Αν X είναι ένα CW-σύμπλεγμα και Y ένα υποσύμπλεγμα του X, τότε το ζεύγος (X, Y) ονομάζεται **CW-ζεύγος**.

Ορισμός 15.11.8. Αν X, Y είναι CW-συμπλέγματα, $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση, ώστε $f(X^n) \subseteq Y^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f ονομάζεται **κυτταρική απεικόνιση**.

Παραδείγματα 15.11.1.

1. Η πιο απλή και κατανοητή περίπτωση CW-συμπλέγματος είναι τα κανονικά πλέγματα Δ^n.
   i. Το Δ^0 είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα μόνο 0-κύτταρο.
   ii. Το Δ^1 είναι ένα CW-σύμπλεγμα με δύο 0-κύτταρα, τα σημεία A(1,0) και B(0,1) και ένα 1-κύτταρο το εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος AB. Χαρακτηριστική απεικόνιση του 1-κυττάρου είναι η $\Phi : \mathbb{D}^1 \cong \mathbb{I} \to \Delta^1$, με $\Phi(t) = (1-t, t)$.
   iii. Στο Δ^2 ορίζουμε την εξής κυτταρική διάσπαση:

α΄. Τρία 0-κύτταρα, τα σημεία A(1,0,0), B(0,1,0) και C(0,0,1).

β΄. Τρία 1-κύτταρα e_1^1, e_1^2, e_1^3, τα εσωτερικά των ευθύγραμμων τμημάτων BC, CA και AB, αντιστοίχως, δηλαδή $e_1^1 = \{(0, 1-t, t)/t \in (0,1)\}, e_1^2 = \{(t, 0, 1-t)/t \in (0,1)\}$ και $e_1^3 = \{(1-t, t, 0)/t \in (0,1)\}$.

γ΄. Ένα 2-κύτταρο, το εσωτερικό του τριγώνου ABC, δηλαδή το
$$e_2 = \{(t_1, t_2, t_3)/t_1 > 0, t_2 > 0, t_3 > 0 \wedge t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$
Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του ότι η πιο πάνω κυτταρική διάσπαση ορίζει ένα CW-σύμπλεγμα, πρέπει να οριστούν χαρακτηριστικές απεικονίσεις. Η πιο δύσκολη από αυτές είναι εκείνη που αφορά το κύτταρο e_2. Ο ορισμός των απεικονίσεων αυτών αφήνεται ως άσκηση.

2. Μια κυτταρική διάσπαση της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ αποτελείται από ένα 0-κύτταρο, το σημείο $N(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (βόρειος πόλος) και ένα n-κύτταρο το $\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{B}^n$ (Στερεογραφική προβολή). Για την εύρεση της χαρακτηριστικής απεικόνισης του n- κυττάρου εργαζόμαστε ως εξής:
Είδαμε στο 4ο από τα παραδείγματα 9.2.2. ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$, με
$$f(x_1, \ldots, x_n) = (2x_1\sqrt{1 - \|x\|^2}, \ldots, 2x_n\sqrt{1 - \|x\|^2}, 2\|x\|^2 - 1),$$
όπου $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής.
Για τον περιορισμό της f στην $\mathbb{S}^{n-1}$ έχουμε
$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}^{n-1} &\Rightarrow \|x\| = 1 \\ &\Rightarrow f(x) = (0, 0, \ldots, 1) = N, \end{aligned}$$
όπου N είναι ο βόρειος πόλος της $\mathbb{S}^n$.
Αν g είναι ο περιορισμός της f στην ανοικτή μπάλα $\mathbb{B}^n$, τότε

- $$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Rightarrow 2\|x\|^2 - 1 = 2\|y\|^2 - 1 \wedge 2x_i\sqrt{1 - \|x\|^2} = 2y_i\sqrt{1 - \|y\|^2} \\ &\Rightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 \wedge x_i = y_i \quad \forall i = 1, ..., n \\ &\Rightarrow x = y, \end{aligned}$$
  άρα η g είναι 1-1.
- Έστω $z \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, άρα $z = (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1})$, με $z_{n+1} < 1$ και $\sum\limits_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1$. Αν $x_i = \frac{z_i}{\sqrt{2}\sqrt{1 - z_{n+1}}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{2(1 - z_{n+1})} \\ &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}{2(1 - z_{n+1})} = \frac{1 - z_{n+1}^2}{2(1 - z_{n+1})} \\ &= \frac{z_{n+1} + 1}{2} < 1, \end{aligned}$$

άρα $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{B}^n$. Επιπλέον $g(x_1,\dots,x_n)=(z_1,\dots,z_n,z_{n+1})$, επομένως η g είναι επί του $\mathbb{S}^n\setminus\{N\}$.

- Η $g^{-1}:\mathbb{S}^n\setminus\{N\}\to\mathbb{B}^n$, με $g^{-1}(z_1,\dots,z_n)=\big(\frac{z_1}{\sqrt{2}\sqrt{1-z_{n+1}}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{2}\sqrt{1-z_{n+1}}}\big)$ είναι συνεχής.

Άρα η $g:\mathbb{B}^n\to\mathbb{S}^n\setminus\{N\}$ είναι ομοιομορφισμός και, επομένως είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση του μοναδικού n-κυττάρου. Άρα η παραπάνω κυτταρική διάσπαση ορίζει ένα CW-σύμπλεγμα στην $\mathbb{S}^n$.

3. Για να δούμε τη σφαίρα ως ένα CW-σύμπλεγμα με μία διαφορετική κυτταρική διάσπαση πρέπει να κατανοήσουμε πως "παίρνουμε" την $\mathbb{S}^n$ από την $\mathbb{S}^{n-1}$. Η απεικόνιση $i:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^n$, με $i(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0)$ είναι εμφύτευση. Άρα μπορούμε να "βλέπουμε" την $\mathbb{S}^{n-1}$, ως ένα γνήσιο υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$. Επομένως έχουμε την εξής ακολουθία γνήσιων εγκλεισμών $\mathbb{S}^0\subset\mathbb{S}^1\subset\cdots\subset\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{S}^n$. Έχουμε ότι $\mathbb{S}^1=\mathbb{S}^0\sqcup e_1^1\sqcup e_1^2$, όπου $\mathbb{S}^0=\{-1,1\}$, $e_1^1=\{e^{i\phi}\,/\,0<\phi<\pi\}\cong(0,1)$ και $e_1^2=\{e^{i\phi}\,/\,\pi<\phi<2\pi\}\cong(0,1)$, άρα ο $\mathbb{S}^1$ έχει μια κυτταρική διάσπαση με δύο 0-κύτταρα, τα (-1,0) και (1,0) και δύο 1-κύτταρα, τα e_1^1 και e_1^2. Χαρακτηριστικές απεικονίσεις των e_1^1 και e_1^2 είναι οι $f_1:\mathbb{D}^1=[-1,1]\to\mathbb{S}^1$, με $f_1(t)=e^{i\frac{t+1}{2}\pi}$ και $f_2:\mathbb{D}^1=[-1,1]\to\mathbb{S}^1$, με $f_1(t)=e^{i\frac{t+3}{2}\pi}$
Υποθέτουμε ότι η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με δύο κύτταρα σε κάθε μία από τις διαστάσεις από 0 έως και $n-1$. Για να ολοκληρώσουμε την επαγωγή θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f_1:\mathbb{D}^n\to\mathbb{S}^n$ και $f_2:\mathbb{D}^n\to\mathbb{S}^n$, με
$$f_1(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}(x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}\,), & (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{B}^n\\ (x_1,\dots,x_n,0), & (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\end{cases}\text{ και}$$
$$f_2(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}(x_1,\dots,x_n,-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}\,), & (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{B}^n\\ (x_1,\dots,x_n,0), & (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\end{cases}.$$
Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f_1(\mathbb{B}^n)\cong\mathbb{B}^n$, $f_2(\mathbb{B}^n)\cong\mathbb{B}^n$ και $(f_1/\mathbb{S}^{n-1})(\mathbb{D}^n)\in\mathbb{S}^{n-1}$, $(f_2/\mathbb{S}^{n-1})(\mathbb{D}^n)\in\mathbb{S}^{n-1}$ Άρα οι f_1,f_2 είναι χαρακτηριστικές απεικονίσεις των κυττάρων $f_1(\mathbb{B}^n)=e_n^1$ και $f_2(\mathbb{B}^n)=e_n^2$, αντιστοίχως. Επιπλέον έχουμε $\mathbb{S}^n=\mathbb{S}^{n-1}\sqcup e_n^1\sqcup e_n^2$. Συνεπώς η $\mathbb{S}^n$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με δύο κύτταρα σε κάθε διάσταση $k\in\{0,1,\dots,n\}$.

4. Πως μπορούμε να δούμε τον πραγματικό προβολικό χώρο ($P\mathbb{R}^n$), ως ένα CW-σύμπλεγμα; Κατ' αρχάς, εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $i:P\mathbb{R}^{n-1}\to P\mathbb{R}^n$, με $i\big([x_1;\cdots;x_{n-1}]\big)=[x_1;\cdots;x_{n-1};0]$ είναι μία εμφύτευση. Μ' αυτή την έννοια μπορούμε να θεωρούμε το $P\mathbb{R}^{n-1}$ γνήσιο υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$. Επομένως έχουμε την εξής ακολουθία γνήσιων εγκλεισμών $P\mathbb{R}^1\subset P\mathbb{R}^2\subset\cdots\subset P\mathbb{R}^{n-1}\subset P\mathbb{R}^n$. Από την άσκηση 9.7-11 έχουμε ότι $P\mathbb{R}^1\cong\mathbb{S}^1$. Στο 2ο παράδειγμα είδαμε ότι ο $\mathbb{S}^1$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα κύτταρο στη διάσταση 0 και ένα κύτταρο στη διάσταση 1. Συνεπώς το ίδιο θα ισχύει και με τον $P\mathbb{R}^1$. Δεχόμαστε ότι ο $P\mathbb{R}^{n-1}$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα κύτταρο σε κάθε μία διάσταση από 0 έως και $n-1$, δηλαδή $P\mathbb{R}^{n-1}=e_0\sqcup e_1\sqcup\cdots\sqcup e_{n-1}$, όπου e_i είναι κύτταρο διάστασης i, με $i=0,1,\dots,n-1$. Για την ολοκλήρωση της επαγωγικής υπόθεσης θεωρούμε την

απεικόνιση $f : \mathbb{D}^n \to P\mathbb{R}^n$, με

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow f(x) = [x_1; x_2; \cdots; x_n; 0] \in P\mathbb{R}^{n-1}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n \Rightarrow f(x) = [x_1; x_2; \cdots; x_n; \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\,].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{B}^n \cong f(\mathbb{B}^n)$, άρα η f είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση του n κυττάρου $f(\mathbb{B}^n) = e_n$, επομένως $P\mathbb{R}^n \cong P\mathbb{R}^{n-1} \sqcup f(\mathbb{B}^n) \cong P\mathbb{R}^{n-1} \sqcup e_n$. Συνεπώς ο $P\mathbb{R}^n$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα κύτταρο σε κάθε διάσταση από 0 έως n. Δηλαδή $P\mathbb{R}^n = e_0 \sqcup e_1 \sqcup \cdots \sqcup e_n$. Χρήσιμο είναι να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n > 1$ ισχύει $P\mathbb{R}^n \setminus P\mathbb{R}^{n-1} = e_n$.

5. Και τον μιγαδικό προβολικό χώρο μπορούμε να δούμε ως ένα CW-σύμπλεγμα. Κατ' αρχάς, όπως και στον πραγματικό προβολικό χώρο έχουμε μία ακολουθία γνήσιων εγκλεισμών $P\mathbb{C}^1 \subset P\mathbb{C}^2 \subset \cdots \subset P\mathbb{C}^{n-1} \subset P\mathbb{C}^n$. Από την άσκηση 9.7-14 έχουμε ότι $P\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{S}^2$, άρα (παράδειγμα 2) ο $P\mathbb{C}^1$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα 0-κύτταρο και ένα 2-κύτταρο. Επιχειρώντας μια γενίκευση θα ισχυριστούμε ότι ο $P\mathbb{C}^n$ είναι ένα CW-σύμπλεγμα με ένα $2k$ κύτταρο σε κάθε μία διάσταση k, με $k = 0, 1, \dots, n-1$. Για την απόδειξη του ισχυρισμού, αρκεί να δείξουμε ότι η συνολοθεωρητική διαφορά $P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$ είναι ένα $2n$-κύτταρο.
Έστω $S = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1}, 0) \,/\, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1} \in \mathbb{R} \wedge x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{S}^{2n+1}$. Παίρνουμε το σύνολο S', το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1}, 0)$ του S, για τα οποία $x_{n+1} \geq 0$. Προφανώς έχουμε $S' \cong \mathbb{S}^{2n}_+ \cong \mathbb{D}^{2n}$, $\mathrm{Bd}(\mathbb{S}^{2n}_+) = \mathbb{S}^{2n-1}$ και $Int(\mathbb{S}^{2n}_+) = \mathbb{B}^{2n}$.
Αν $w \in P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$, τότε $w = pr(z)$, με $z \in \mathbb{S}^{2n+1} \setminus \mathbb{S}^{2n-1}$, όπου $pr : \mathbb{S}^{2n+1} \to P\mathbb{C}^n$ η φυσική προβολή. Είναι $z = (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$, με $\|z\| = 1$. Υποθέτουμε ότι $x_{n+1} + iy_{n+1} = re^{i\theta}$ και $r > 0$. Ακολούθως θεωρούμε $\lambda = e^{-i\theta}$. Τότε $\lambda z = (\lambda x_1, \lambda y_1, \dots, \lambda x_n, \lambda y_n, r, 0) \in Int(\mathbb{S}^{2n}_+)$. Επιπλέον είναι $|\lambda| = 1$, άρα $pr(\lambda z) = pr(z)$, άρα $w = pr(z) \in pr\big(Int(\mathbb{S}^{2n}_+)\big)$. Επομένως ο περιορισμός της pr στο $Int(\mathbb{S}^{2n}_+)$ είναι επί του $P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$.
Έστω ότι τα $z = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1})$ και $w = (x'_1, y'_1, \dots, x'_n, y'_n, x'_{n+1})$ είναι δύο στοιχεία του $Int(\mathbb{S}^{2n}_+)$, με $pr(z) = pr(w)$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$, με $|\lambda| = 1$, ώστε $\lambda z = w$, άρα $\lambda x_{n+1} = x'_{n+1}$ και, επειδή $x_{n+1}, x'_{n+1} \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda = 1$, άρα $z = w$, επομένως ο περιορισμός της pr στο $Int(\mathbb{S}^{2n}_+)$ είναι 1-1.
Επιπλέον η pr είναι ανοικτή απεικόνιση, άρα ο περιορισμός της pr στην ανοικτή μπάλα $\mathbb{B}^{2n}$ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ της $\mathbb{B}^{2n}$ και του χώρου $P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$. Επομένως η pr είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση του $2n$ κυττάρου $P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

6. Η σπείρα $\mathbb{T}$, ως γνωστόν είναι ο χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ που προκύπτει από την ταύτιση των σημείων $(0, t)$ με τα σημεία $(1, t)$ και την ταύτιση των σημείων $(t, 0)$ με τα σημεία $(t, 1)$. Μπορούμε να "δούμε" την σπείρα ως ένα CW-σύμπλεγμα ως εξής:

α΄ Έχει ένα 2-κύτταρο, το $(\mathbb{I} \times \mathbb{I})^0$.

β΄ Έχει δύο 1-κύτταρα, τις κλάσεις ισοδυναμίας $\{[(0, t)]/0 < t < 1\}$ και $\{[(s, 0)]/0 < s < 1\}$ και

γ΄ Έχει ένα 0-κύτταρο το $[(0,0)]$.

Αφήνεται ως άσκηση η εύρεση χαρακτηριστικών απεικονίσεων για τα παραπάνω κύτταρα.

7. Στον $\mathbb{D}^2$ ορίζουμε μια κυτταρική διάσπαση, η οποία έχει ως 0-κύτταρα το κέντρο του δίσκου και όλα τα σημεία του συνόρου του και ως 1-κύτταρα τις ακτίνες του δίσκου χωρίς τα άκρα τους. Αν πάρουμε ένα ανοικτό τόξο στο σύνορο του δίσκου, τότε αυτό δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{D}^2$, παρότι η τομή του τόξου με την κλειστότητα του οποιουδήποτε κυττάρου είναι κλειστό υποσύνολο της κλειστότητας αυτής. Άρα δεν ικανοποιείται το τρίτο αξίωμα του ορισμού 15.11.3, συνεπώς αυτή η κυτταρική διάσπαση δεν καθιστά τον $\mathbb{D}^2$ ένα CW-σύμπλεγμα.

Πρόταση 15.11.6. *Έστω X ένα CW-σύμπλεγμα διάστασης n, το οποίο έχει k n-διάστατα κύτταρα $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Αν ϕ_i μία χαρακτηριστική απεικόνιση του i κυττάρου ($i \in \{1,\ldots,k\}$), τότε*

α΄) Η απεικόνιση $\phi : \coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}) \to X$, με $\phi(x,i) = (\phi_i/\mathbb{S}^{n-1})(x)$ είναι συνεχής.

β΄) $X \cong \big(\coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times i)\big) \coprod_{\phi} X^{n-1}$.

Απόδειξη: α΄) Έστω K κλειστό υποσύνολο του X, τότε το $\phi_i^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{D}^n$, γιατί η ϕ_i είναι συνεχής, άρα το $\phi_i^{-1}(K) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^{n-1}$, άρα το $\big(\phi_i^{-1}(K) \times \{i\}\big) \cap \big(\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}$, άρα το $\phi^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})$, επομένως η ϕ είναι συνεχής.

β΄) Η σχέση ισοδυναμίας $\sim$, η οποία δίνει τον χώρο πηλίκο $\big(\coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times i)\big) \coprod_{\phi} X^{n-1}$ είναι η

$$\begin{aligned} W \sim Z \Leftrightarrow W = Z &\vee \big(W = (x,i), Z = (y,i) \in (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}) \wedge \phi(x,i) = \phi(y,i)\big) \\ &\vee \big(W = (x,i) \in (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}) \wedge Z = y \in X^{n-1} \wedge \phi(x,i) = y\big) \end{aligned}$$

Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $F : \big(\coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times i)\big) \coprod X^{n-1} \to X^n$, με

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in X^{n-1} \\ (x,i), & (x,i) \in \mathbb{B}^n \times \{i\} \\ \phi(x,i), & (x,i) \in \coprod_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^n \times \{i\}) \end{cases}.$$

Η F είναι συμβατή με τη σχέση $\sim$ (η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση). Επιπλέον ο χώρος $\big(\bigsqcup_{i=1}^{k}(\mathbb{D}^n\times i)\big)\bigsqcup X^{n-1}$ είναι συμπαγής και ο $X^n = X$ είναι Hausdorff, επομένως η απεικόνιση G, η οποία καθιστά το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 9.2.3).

$$\begin{array}{ccc}
\big(\bigsqcup_{i=1}^{k}(\mathbb{D}^n\times i)\big)\bigsqcup X^{n-1} & \xrightarrow{F} & X^n = X \\
pr\big\downarrow & \nearrow_{G} & \\
\big(\bigsqcup_{i=1}^{k}(\mathbb{D}^n\times i)\big)\bigsqcup_{\phi} X^{n-1} & &
\end{array}.$$

□

Με τελικό στόχο τον υπολογισμό της ομολογίας των μιγαδικών προβολικών χώρων, που θα γίνει στο τέλος της παρούσας παραγράφου έχουμε τα εξής:

Ορισμός 15.11.9. Η απεικόνιση ζευγών $g : (X, A) \to (Y, B)$ ονομάζεται **σχετικός ομοιομορφισμός**, αν, και μόνον, αν ο περιορισμός f της g στο $X \setminus A$, δηλαδή η απεικόνιση $f : X \setminus A \to Y \setminus B$, με $f(x) = g(x)$ είναι ομοιομορφισμός.

Παραδείγματα 15.11.2.

1. Η απεικόνιση $f : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (P\mathbb{R}^n, P\mathbb{R}^{n-1})$, όπως ορίστηκε στο 4 από τα παραδείγματα 15.11.1 είναι σχετικός ομοιομορφισμός, γιατί η $f/\mathbb{B}^n : \mathbb{D}^n\setminus\mathbb{S}^{n-1} \to P\mathbb{R}^n\setminus P\mathbb{R}^{n-1}$ είναι ομοιομορφισμός.

2. Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και το A κλειστό υποσύνολο του X, τότε η απεικόνιση $pr : (X, A) \to (X/A, [A])$, είναι σχετικός ομοιομορφισμός. Με $[A]$ συμβολίζουμε το σημείο του χώρου X/A, το οποίο είναι εικόνα του A μέσω της φυσικής προβολής pr. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in X \setminus A$, τότε η σχέση $pr(x_1) = pr(x_2)$ συνεπάγεται την σχέση $x_1 = x_2$, γιατί οι κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του X, που δεν ανήκουν στο A είναι μονοσύνολα, επομένως η $pr' = pr/X \setminus A \to X/A \setminus \{[A]\}$ είναι 1-1. Το επί της pr' είναι προφανές.
   Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \setminus A$. Επειδή το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X το U θα είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επιπλέον $pr^{-1}\big(pr(U)\big) = U$, άρα το $pr(U) = pr'(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/A \setminus [A]$, επομένως η $pr' : X\setminus A \to X/A\setminus[A]$ είναι και ανοικτή απεικόνιση, άρα είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή η $pr : (X, A) \to (X/A, [A])$, είναι σχετικός ομοιομορφισμός.

Πρόταση 15.11.7. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff με $X \cap \mathbb{D}^n = \varnothing$, e ένα n-κύτταρο στον X και $Y = X \setminus e$. Αν υπάρχει σχετικός ομοιομορφισμός $F : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, Y)$ και f είναι ο περιορισμός της F στον $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε η απεικόνιση $G : Y_f = \mathbb{D}^n \bigsqcup_f Y \to X$, με*

$$G([x]) = \begin{cases} F(x), & x \in \mathbb{D}^n \\ x, & x \in Y \end{cases}$$ *είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $g : \mathbb{D}^n \sqcup Y \to X$, με $g(x) = \begin{cases} F(x), & x \in \mathbb{D}^n \\ x, & x \in Y \end{cases}$.
Αν $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας, η οποία ορίζει τον χώρο πηλίκο Y_f, τότε

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Leftrightarrow \big(x, y \in Y \setminus f(\mathbb{S}^{n-1}) \wedge x = y\big) \\ &\vee \big(x \in \mathbb{S}^{n-1} \wedge y \in Y \wedge y = f(x)\big) \\ &\vee \big(x, y \in \mathbb{B}^n \ \wedge \ x = y\big) \\ &\Leftrightarrow x \sim y, \end{aligned}$$

άρα η g είναι συμβατή με την σχέση $\sim$. Επιπλέον η g είναι συνεχής και επί. Επειδή ο χώρος $\mathbb{D}^n \sqcup Y$, είναι συμπαγής και ο $e \sqcup Y$ είναι Hausdorff η απεικόνιση G, η οποία καθιστά το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 9.2.3).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n \sqcup Y & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle pr}\downarrow & \nearrow_{G} & \\ Y_f & & \end{array}.$$

□

Πρόταση 15.11.8. *Αν οι $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ είναι απεικονίσεις ζευγών ομοτοπικά ισοδύναμες, τότε και οι απεικονίσεις $F, G : (X/A, [A]) \to (Y/B, [B])$, με $F\big([x]\big) = [f(x)]$ και $G\big([x]\big) = [g(x)]$ είναι επίσης ομοτοπικά ισοδύναμες απεικονίσεις ζευγών.*

Απόδειξη: Επειδή οι απεικονίσεις f, g είναι ομοτοπικά ισοδύναμες υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε

1. $H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$.
2. $H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$ και
3. $H(A \times \mathbb{I}) \subseteq B$.

Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $\Phi : (X/A) \times \mathbb{I} \to Y/B$, με $\Phi\big([x], t\big) = \big[H(x, t)\big]$, για την οποία ισχύουν τα

1. $\Phi([x], 0) = [H(x, 0)] = [f(x)] = F([x]) \quad \forall [x] \in X/A$.
2. $\Phi([x], 1) = [H(x, 1)] = [g(x)] = G([x]) \quad \forall [x] \in X/A$. και
3. $$\begin{aligned} [x] \in [A] \Rightarrow x \in A \Rightarrow H(x, t) \in B \Rightarrow [H(x, t)] \in [B] \\ \Rightarrow \Phi([x], t) \in [B] \Rightarrow \Phi([A] \times \mathbb{I}) \subseteq [B], \end{aligned}$$

άρα οι F και G είναι ομοτοπικά ισοδύναμες. □

Και μετά την καθαρά τοπολογική πραγμάτευση ερχόμαστε στην ομολογία.

Πρόταση 15.11.9. *Έστωσαν*

1. *Χώρος Hausdorff X, με $X \cap \mathbb{D}^n = \varnothing$.*
2. *e ένα n-κύτταρο του X, και $Y = X \setminus e$ ($n \geq 1$).*
3. *Συνεχής απεικόνιση $G : \mathbb{D}^n \to X$, με $G(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Y$, ώστε η $F : \mathbb{B}^n \to e$, με $F(x) = G(x)$ να είναι ομοιομορφισμός.*

Ονομάζουμε f τον περιορισμό της G στην $\mathbb{S}^{n-1}$ και θεωρούμε τον χώρο-πηλίκο $Y_f = \mathbb{D}^n \bigsqcup_f Y$. Τότε για κάθε $n \geq 1$ η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής

$$\cdots H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_p(Y) \xrightarrow{i_*} H_p(Y_f) \xrightarrow{d} H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathbb{Z} \oplus H_0(Y) \to H_0(Y_f) \to \{0\},$$

όπου i_* είναι ο ομομορφισμός που επάγει στην ομολογία η ένθεση $i : Y \hookrightarrow Y_f$.

Απόδειξη: Έστω $U' = S(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{B}^n$. Το e είναι ανοικτό υποσύνολο του Y_f και ο F είναι ομοιομορφισμός, άρα το $F(U') = U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του e, άρα ανοικτό υποσύνολο και του Y_f. Το $V = Y_f \setminus G(\mathbf{0}) = Y \sqcup (e \setminus G(\mathbf{0}))$ είναι επίσης ανοικτό υποσύνολο του Y_f. Έχουμε $U \cup V = Y_f$ και $V \cap U = U \setminus F(\mathbf{0})$. Ισχυριζόμαστε ότι ο Y είναι συστολή παραμόρφωσης του V. Τον ισχυρισμό θα αποδείξουμε στο τέλος, για να μην διακόψουμε την ροή της απόδειξης. Άρα, από το θεώρημα Mayer-Vietoris η επόμενη ακολουθία

$$\cdots H_p(U \cap V) \to H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(Y_f) \to H_{p-1}(U \cap V) \to \cdots \tag{15.45}$$

είναι ακριβής.
Για $p > 0$ έχουμε $H_p(U) \simeq \{0\}$, γιατί ο χώρος $U \cong U'$ είναι συσταλτός. Ο χώρος $U \cap V$ είναι ομοιόμορφος με έναν τρυπημένο ανοικτό δίσκο στον $\mathbb{R}^n$, άρα είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{S}^{n-1}$, δηλαδή $H_p(U \cap V) \simeq H_p(\mathbb{S}^{n-1})$. Επειδή ο Y είναι συστολή παραμόρφωσης του V έχουμε $H_p(V) \simeq H_p(Y)$, επομένως $H_p(U) \oplus H_p(V) \simeq \{0\} \oplus H_p(V) \simeq H_p(Y)$. Άρα η (15.45) δίνει την ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_p(Y) \to H_p(Y_f) \to H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Για $p = 0$, επειδή ο χώρος U είναι δρομοσυνεκτικός έχουμε $H_0(U) \simeq \mathbb{Z}$, άρα η ακολουθία τελειώνει ως εξής:

$$H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{Z} \oplus H_0(Y) \to H_0(Y_f) \to \{0\}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Διευκρινίζουμε ότι με pr συμβολίζουμε την φυσική προβολή του χώρου $\mathbb{D}^n \sqcup Y$ στον χώρο πηλίκο $\mathbb{D}^n \bigsqcup_f Y$. Θα δείξουμε ότι ο Y είναι συστολή παραμόρφωσης του V. Χάριν ευκολίας στη γραφή τον χώρο $\big(\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$ ονομάζουμε D και τον χώρο $\big(\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\big) \sqcup Y$ τον ονομάζουμε D'. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : V \times \mathbb{I} \to V$, με $\Phi(v,t) = \begin{cases} v, & v \in Y \\ G\big((1-t)z + t\frac{z}{\|z\|}\big), & v = G(z) \in e \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases}$. Η απεικόνιση Φ είναι, προφανώς καλώς ορισμένη. Για να αποδείξουμε την συνέχεια της Φ θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} D' \times \mathbb{I} & \xrightarrow{h} & D \sqcup Y \\ {\scriptstyle pr\times 1}\downarrow & \overset{pr\circ h}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle pr} \\ V \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\Phi]{} & V \end{array},$$

όπου $h : D' \times \mathbb{I} \to D \sqcup Y$ είναι η συνεχής απεικόνιση, με

$$h(x,t) = \begin{cases} (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}, & x \in D' \wedge t \in \mathbb{I} \\ x, & x \in Y \wedge t \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Η απεικόνιση $pr : D' \to V$ είναι ταυτισμική απεικόνιση και, επειδή ο χώρος $\mathbb{I}$ είναι συμπαγής και Hausdorff, από την πρόταση 9.3.4 συμπεραίνουμε ότι η $pr \times 1$ είναι ταυτισμική απεικόνιση. Επειδή έχουμε $h(x,t) = x$, αν $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η $pr \circ h$, είναι για κάθε $(v,t) \in V \times \mathbb{I}$ σταθερή σε κάθε σύνολο $\{(pr \times 1)^{-1}(v,t)\}$, επομένως, από την πρόταση 9.3.3, συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι συνεχής. Επιπλέον

$$\Phi(v,0) = v \quad \forall v \in V,$$

$$\Phi(v,1) \in Y \quad \forall v \in V,$$

$$\Phi(v,t) = v \quad \forall v \in Y,$$

άρα το Y, είναι συστολή παραμόρφωσης του V. □

Πρόταση 15.11.10. *Έστω $n \geq 2$ και Y_f όπως στην προηγούμενη πρόταση, τότε $H_p(Y) \simeq H_p(Y_f)$, αν $p \neq n, n-1$*

Απόδειξη: Προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση, αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι $H_p(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \{0\}$, επειδή $p \neq n, n-1$. □

Πρόταση 15.11.11. *Ισχύει* $H_p(P\mathbb{C}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0, 2, \ldots, 2n \\ \{0\}, & p \neq 2i \wedge i = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $P\mathbb{C}^1 \simeq \mathbb{S}^2$, επομένως $H_p(P\mathbb{C}^1) \simeq H_p(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0, 2 \\ \{0\}, & p \neq 0, 2 \end{cases}$.

Άρα η πρόταση αληθεύει για $n = 1$. Για την εφαρμογή της επαγωγής δεχόμαστε ότι $H_p(P\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{Z}$, για άρτια $p \leq 2n$ και $H_p(P\mathbb{C}^n) \simeq \{0\}$, για τα υπόλοιπα p. Είναι γνωστό ότι το $P\mathbb{C}^{n+1}$ προκύπτει από το $P\mathbb{C}^n$ με την επικόλληση ενός $2n+2$-κυττάρου. Εφαρμόζοντας την πρόταση 15.11.9 για $p = 2n+2$, $Y = P\mathbb{C}^n$ και $Y_f = P\mathbb{C}^{n+1}$ έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{cccccccccccc} H_{2n+2}(P\mathbb{C}^n) & \to & H_{2n+2}(P\mathbb{C}^{n+1}) & \to & H_{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) & \to & H_{2n+1}(P\mathbb{C}^n) & \to & H_{2n+1}(P\mathbb{C}^{n+1}) & \to & H_{2n}(\mathbb{S}^{2n+1}) \\ \downarrow\simeq & & & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & & & \downarrow \\ \{0\} & & & & \mathbb{Z} & & \{0\} & & & & \{0\} \end{array}$$

Επειδή $H_{2n+2}(P\mathbb{C}^n) \simeq H_{2n+1}(P\mathbb{C}^n) \simeq H_{2n}(\mathbb{S}^{2n+1}) \simeq \{0\}$, από την επαγωγή υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι $H_{2n+2}(P\mathbb{C}^{n+1}) \simeq \mathbb{Z}$ και $H_{2n+1}(P\mathbb{C}^{n+1}) \simeq \{0\}$. Επιπλέον, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $H_p(P\mathbb{C}^n) \simeq H_p(P\mathbb{C}^{n+1})$ για $p \neq 2n+2, 2n+1$, επομένως η επαγωγική απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση: Αν έχουμε ένα CW-σύμπλεγμα, στο οποίο η διαφορά $X^n \setminus X^{n-1}$ είναι ένα n-κύτταρο, τότε θέτοντας στην απόδειξη του ισχυρισμού για την συστολή παραμόρφωσης (απόδειξη της πρότασης 15.11.9) στην θέση του Y το X^{n-1} μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο X^{n-1} είναι συστολή παραμόρφωσης του $X^n \setminus G(\mathbf{0})$, το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X^n. Επομένως το ζεύγος (X^n, X^{n-1}) είναι ένα καλό ζεύγος. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε, αν η διαφορά $X^n \setminus X^{n-1}$ είναι ξένη ένωση k το πλήθος n-κυττάρων.

Η πιο πάνω τεχνική δεν μπορεί να εφαρμοστεί για να δώσει την ομολογία των πραγματικών προβολικών χώρων. Για τον λόγο αυτόν θα μας χρειαστεί η πραγμάτευση της κυτταρικής ομολογίας, που ακολουθεί.

15.12 Κυτταρική ομολογία

Το επόμενο λήμμα είναι μια ισοδύναμη εκδοχή της πρότασης 15.6.9.

Λήμμα 15.12.1. *Αν $f : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός, A ένας υπόχωρος του X και $f(A) = B$, τότε $H_p(X, A) \simeq H_p(Y, B)$ για κάθε $p \geq 0$.*

Πρόταση 15.12.2. *Έστω e ένα n-κύτταρο στο CW-σύμπλεγμα X και f μια χαρακτηριστική απεικόνιση του κυττάρου e, τότε η απεικόνιση ζευγών $f : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (\overline{e}_i, \overline{e}_i \setminus e_i)$ επάγει στην σχετική ομολογία ισομορφισμό, δηλαδή η $f_* : H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to H_q(\overline{e}, \overline{e} \setminus e)$ για κάθε $q \geq 0$ ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Ως γνωστόν ο $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Αν $G : (\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{I} \to (\mathbb{D}^{\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{0}\})$ είναι μια απεικόνιση παραμόρφωσης, τότε

$$G(x,0) = x \quad \forall x \in (\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}),$$
$$G(x,1) \in \mathbb{S}^{n-1} \quad \forall x \in (\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}),$$
$$G(a,t) = a \quad \forall a \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Έστω $\hat{0} = f(\mathbf{0})$. Για κάθε $y \in \overline{e}$ επιλέγουμε $x = x_y \in \mathbb{D}^n$, ώστε $f(x_y) = y$. Τότε για την συνεχή απεικόνιση $F : (\overline{e} \setminus \{\hat{0}\}) \times \mathbb{I} \to (\overline{e} \setminus \{\hat{0}\})$, με $F(y,t) = f\big(G(x_y,t)\big)$ έχουμε

$$F(y,0) = f\big(G(x_y,0)\big) = f(x_y) = y \quad \forall y \in \overline{e} \setminus \{\hat{0}\}$$
$$F(y,1) = f\big(G(x_y,1)\big) \in f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq \overline{e} \setminus e \quad \forall y \in \overline{e} \setminus \{\hat{0}\}$$
$$F(b,t) = f\big(G(x_b,t)\big) = f(x_b) = b \quad \forall b \in \overline{e} \setminus e.$$

Άρα το $\overline{e} \setminus e$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\overline{e} \setminus \{\hat{0}\}$. Στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{a} & H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) & \xleftarrow[\beta]{} & H_q(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma \\ H_q(\overline{e}, \overline{e} \setminus e) & \xrightarrow{\zeta} & H_q(\overline{e}, \overline{e} \setminus \{\hat{0}\}) & \xleftarrow[\epsilon]{} & H_q(e, e \setminus \{\hat{0}\}) \end{array},$$

Ο ομομορφισμός a είναι ισομορφισμός, γιατί ο $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ (πρόταση 15.10.1). Για τον ίδιο λόγο και ο ζ είναι ισομορφισμός. Ο β είναι ισομορφισμός, επειδή $\mathbb{B}^n = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ (θεώρημα εκτομής). Επίσης ο ϵ είναι ισομορφισμός, επειδή $e_i = \overline{e}_i \setminus (\overline{e}_i \setminus e_i)$ (θεώρημα εκτομής). Ο γ είναι ισομορφισμός (λήμμα 15.12.1). Επομένως ο δ είναι ισομορφισμός, γιατί είναι σύνθεση ισομορφισμών, $\delta = \epsilon \circ \gamma \circ \beta^{-1}$. Τέλος έχουμε $f_* = \zeta^{-1} \circ \delta \circ a$, άρα ο f_* είναι ισομορφισμός, ως σύνθεση ισομορφισμών □

Παρατήρηση: Από την πρόταση 15.10.6 σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $H_q(\overline{e}_i, \overline{e}_i \setminus e_i) \simeq H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}$.

Έστω ότι $X^n \setminus X^{n-1} = \bigsqcup_{i=1}^{k} e_i$, όπου τα e_i είναι n-κύτταρα. Αν $\phi_i : \mathbb{D}^n \times \{i\} \to X^n$ είναι μια χαρακτηριστική απεικόνιση του κυττάρου e_i και $\phi = \bigsqcup_{i=1}^{k} \phi_i : \bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times \{i\}) \to X^n$ η απεικόνιση για την οποία: $\phi(x) = \phi_i(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{D}^n \times \{i\}$, τότε ισχύει η πρόταση

Πρόταση 15.12.3. *Η απεικόνιση ζευγών* $\phi : \big(\bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times \{i\}), \bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})\big) \to (X^n, X^{n-1})$ *επάγει στην ομολογία τον ομομορφισμό* $\phi^* : H_q\big(\bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times \{i\}), \bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})\big) \to H_q(X^n, X^{n-1})$, *ο οποίος είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Όπως η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης. □

Επειδή τα $\mathbb{D}^n \times \{i\}$ είναι ξένα μεταξύ τους, το ίδιο και τα $\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
H_q(X^n, X^{n-1}) &\simeq H_q\Big(\bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{D}^n \times \{i\}), \bigsqcup_{i=1}^{k} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})\Big) \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \\
&\simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

Πρόταση 15.12.4. *Αν* $X^n \setminus X^{n-1} = \bigsqcup_{i=1}^{k} e_i$, *όπου τα* e_i *είναι* n*-κύτταρα, τότε για κάθε* $q \geq 0$, *ισχύει*

$$H_q(X^n, X^{n-1}) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}.$$

Σχόλιο: Η ομάδα $H_n(X^n, X^{n-1})$ είναι ελεύθερη αβελιανή με πλήθος γεννητόρων ίσο με το πλήθος των n-κυττάρων του συμπλέγματος.

Πρόταση 15.12.5. *Έστω X ένα CW-σύμπλεγμα διάστασης n, δηλαδή $X = X^n$ και $q > n$. Τότε $H_q(X) \simeq H_q(X^n) \simeq \{0\}$.*

Απόδειξη: Επειδή η $q > n$, συνεπάγεται την $q + 1 \neq n$ έχουμε $H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) \simeq \{0\}$. Επίσης $q \neq n$, άρα $H_q(X^n, X^{n-1}) \simeq \{0\}$. Η επόμενη ακριβής ακολουθία

$$H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_{q+1}} H_q(X^{n-1}) \xrightarrow{(i_q)_*} H_k(X^n) \xrightarrow{p_q} H_q(X^n, X^{n-1}),$$

επειδή $H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) \simeq \{0\}$ και $H_q(X^{n+1}, X^n) \simeq \{0\}$ δίνει ότι $H_q(X^n) \simeq H_q(X^{n-1})$, επομένως

$$H_q(X^n) \simeq H_q(X^{n-1}) \simeq \cdots \simeq H_q(X^1) \simeq H_q(X^0).$$

Αλλά το X^0 είναι ένα σύνολο σημείων του X και $q > 0$, επομένως $H_q(X^0) \simeq \{0\}$, άρα $H_q(X) = H_q(X^n) \simeq \{0\}$. □

Πρόταση 15.12.6. *Αν $q < m \leq n$, τότε η ένθεση $i : X^m \to X^n$ επάγει ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων $H_q(X^m)$ και $H_q(X^n)$.*

Απόδειξη: Επειδή $H_{q+1}(X^{m+1}, X^m) \simeq H_q(X^{m+1}, X^m) \simeq \{0\}$ η ακριβής ακολουθία

$$H_{q+1}(X^{m+1}, X^m) \to H_q(X^m) \xrightarrow{i_*^m} H_q(X^{m+1}) \to H_q(X^{m+1}, X^m)$$

συνεπάγεται ότι ο ομομορφισμός $i_*^m : H_q(X^m) \to H_q(X^{m+1})$ που επάγεται από την ένθεση $i_m : X^m \to X^{m+1}$ είναι ισομορφισμός. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο $i_*^{m+1} : H_q(X^{m+1}) \to H_q(X^{m+2})$ είναι ισομορφισμός κ.ο.κ. ο ομομορφισμός $i_*^{n-1} : H_q(X^{n-1}) \to H_q(X^n)$ είναι ισομορφισμός. Άρα ο ομομορφισμός $i_* = i_*^{n-1} \circ \cdots i_*^m : H_q(X^m) \to H_q(X^n)$ είναι ισομορφισμός, γιατί $i_* = i_*^{n-1} \circ \cdots \circ i_*^m : H_q(X^m) \to H_q(X^n)$ (παρατήρηση της πρότασης 15.4.11). □

Άμεση συνέπεια της πιο πάνω πρότασης είναι η

Πρόταση 15.12.7. *Αν X είναι ένα CW-σύμπλεγμα διάστασης m και $q < n \leq m$, τότε η ένθεση $i : X^n \hookrightarrow X$ επάγει στην q-ομολογία ισομορφισμό, δηλαδή $H_q(X^n) \simeq H_q(X)$.*

Ορισμός 15.12.1. Έστω ένα CW-σύμπλεγμα X. Θεωρούμε την ακολουθία των ομάδων $D_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ και τους ομομορφισμούς $\theta_n : D_n(X) \to D_{n-1}(X)$, με $\theta_n = p_*^{n-1} \circ d_n$, όπου $p_*^{n-1} : H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ είναι ο ομομορφισμός που επάγει στην $(n-1)$- ομολογία η προβολή $p_{n-1} : C_{n-1}(X^{n-1}) \to C_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ και $d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1})$ ο συνδετικός ομομορφισμός.

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}) \\ & \searrow^{\theta_n} & \downarrow p_*^{n-1} \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \end{array}.$$

Επειδή η ακολουθία

$$H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{p_*^{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow{d_{n-1}} H_{n-2}(X^{n-2})$$

είναι ακριβής έχουμε $d_{n-1} \circ p_*^{n-1} = \hat{0}$, άρα

$$\theta_{n-1} \circ \theta_n = p_*^{n-2} \circ d_{n-1} \circ p_*^{n-1} \circ d_n = p_*^{n-2} \circ \hat{0} \circ d_n = \hat{0},$$

επομένως το ζεύγος $(D_n(X), \theta_n)$ είναι ένα σύμπλεγμα. Την ομολογία του συμπλέγματος αυτού ονομάζουμε **CW-ομολογία του** X **ή κυτταρική ομολογία του** X και την n-οστή ομάδα της συμβολίζουμε με $H_n^{CW}(X)$, δηλαδή $H_n^{CW} = \frac{\operatorname{Ker}\theta_n}{\operatorname{Im}\theta_{n+1}}$.

Για την CW-ομολογία ισχύει το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα

Πρόταση 15.12.8. *Αν* X *είναι ένα CW-σύμπλεγμα διάστασης* m *και* $n \leq m$, *τότε*

$$H_n(X) \simeq H_n^{CW}(X) = \frac{\operatorname{Ker}\theta_n}{\operatorname{Im}\theta_{n+1}}.$$

Απόδειξη: Έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & H_n(X^{n+1}, X^n) \simeq \{0\} \\
 & & & & & \nearrow^{p_{n+1}} & \\
H_n(X^{n-1}) \simeq \{0\} & & & & H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X) & & \\
 & \searrow & & \nearrow^{i_n} & & & \\
 & & H_n(X^n) & & & & \\
 & \nearrow^{d_{n+1}} & & \searrow^{p_n} & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\theta_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & & & \searrow^{d_n} & \uparrow p_{n-1} \\
 & & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X^{n-2}) \simeq \{0\}
\end{array}.$$

Διευκρινήσεις πάνω στο διάγραμμα:

- Τα διαγώνια βέλη προκύπτουν από τις ακριβείς ακολουθίες ζευγών $H_k(X^{n+1}, X^n)$.
- $H_n(X^{n+1}, X^n) \simeq \{0\}$ (Πρόταση 15.12.4).
- Από την πρόταση 15.12.7 έχουμε ότι $H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X)$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η i_n είναι επί, άρα, από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $H_n(X) \simeq H_n(X^n)/\operatorname{Ker} i_n$. Επιπλέον, επειδή $\operatorname{Ker} i_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$ έχουμε $H_n(X) \simeq H_n(X^n)/\operatorname{Im} d_{n+1}$. Εξάλλου

$$\begin{aligned} \theta_n(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow p_{n-1}(d_n(\alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_n(\alpha) = 0, \end{aligned}$$

επειδή η p_{n-1}, όπως φαίνεται από το διάγραμμα είναι 1-1. Άρα $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Ker} \theta_n$. Επιπλέον $\operatorname{Im} \theta_{n+1} \simeq \operatorname{Im} d_{n+1}$, γιατί $\theta_{n+1} = p_n \circ d_{n+1}$ και ο p_n είναι μονομορφισμός. Επειδή η p_n, όπως προκύπτει από το διάγραμμα είναι 1-1 έχουμε $H_n(X^n) \simeq \operatorname{Im} p_n$. Επιπλέον από την ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to H_n(X^n) \xrightarrow{p_n} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1})$$

έχουμε ότι $\operatorname{Im} p_n = \operatorname{Ker} d_n$, άρα

$$\begin{aligned} H_n(X) &\simeq H_n(X_n)/\operatorname{Im} d_{n+1} \\ &\simeq \operatorname{Im} p_n/\operatorname{Im} d_{n+1} \\ &\simeq \operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1} \\ &\simeq \operatorname{Ker} \theta_n/\operatorname{Im} \theta_{n+1} \\ &\simeq H_n^{CW}(X). \end{aligned}$$

□

Ο υπολογισμός της κυτταρικής ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου που μπορεί να γίνει CW-σύμπλεγμα δεν είναι καθόλου εύκολος. Παρότι ο υπολογισμός των ομάδων $H_n(X^n, X^{n-1})$ είναι απλός, η δυσκολία βρίσκεται στην εύρεση των συνοριακών ομομορφισμών θ_n. Όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί, όπου επιχειρούμε να υπολογίσουμε την κυτταρική ομολογία των πραγματικών προβολικών χώρων, χρειάζονται αρκετά και πολύπλοκα βήματα για τον υπολογισμό του θ_n. Στα επόμενα, χάριν ευκολίας τον χώρο $P\mathbb{R}^n$ θα συμβολίζουμε με P^n. Πριν μπούμε στο κύριο μέρος της απόδειξης πρέπει να πούμε ότι η αντιποδική απεικόνιση $\mathrm{a} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $\mathrm{a}(x) = -x$ είναι, προφανώς ομοιομορφισμός. Επιπλέον ο περιορισμός $\mathrm{a}/\mathbb{S}^{n-1}$ της a στον ισημερινό $\mathbb{S}^{n-1}$ της $\mathbb{S}^n$ είναι ένας ομοιομορφισμός της $\mathbb{S}^{n-1}$ στον εαυτό της.

Βήμα 1ο: Θα αποδείξουμε ότι η ένθεση του ζεύγους $(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1})$ στο ζεύγος $(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$ επάγει στην σχετική q-ομολογία ισομορφισμό.

Απόδειξη: Έστω S ο νότιος πόλος της σφαίρας $\mathbb{S}^n$. Από το θεώρημα εκτομής ο ομομορφισμός $j_* : H_q(\mathbb{S}^n \backslash S, \mathbb{S}^n_- \backslash S) \to H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$, που επάγει η ένθεση $j : (\mathbb{S}^n \backslash S, \mathbb{S}^n_- \backslash S) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$ είναι ισομορφισμός. Επιπλέον έχουμε $\mathbb{S}^n_- \setminus S \cong \mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Εξ' άλλου η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, άρα θα είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{S}^n_- \setminus S$. Επίσης $\mathbb{S}^n_+ \cong \mathbb{D}^n$ και ο $\mathbb{D}^n$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n \backslash S$, επομένως η $\mathbb{S}^n_+$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{S}^n \backslash S$. Άρα ο ομομορφισμός $k_* : H_q(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \to H_q(\mathbb{S}^n \backslash S, \mathbb{S}^n_- \backslash S)$, που επάγει η ένθεση $k : (\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n \setminus S, \mathbb{S}^n_- \setminus S)$ είναι ισομορφισμός (πρόταση 15.10.3).

Η $j \circ k$ είναι η ένθεση του ζεύγους $(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1})$ στο ζεύγος $(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$ και επάγει στην q-ομολογία τον ομοιομορφισμό $j_* \circ k_*$, ο οποίος είναι ισομορφισμός, ως σύνθεση των ισομορφισμών k_* και j_*. [11]

$$H_q(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{k_*} H_q(\mathbb{S}^n \setminus S, \mathbb{S}^n_- \setminus S) \xrightarrow{j_*} H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$$

[11] Η απόδειξη του ότι ο $\mathbb{D}^n$ είναι συστολή παραμόρφωσης του $\mathbb{R}^n$ είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση με την υπόδειξη ότι η απεικόνιση $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, με $H(x,t) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{D}^n \\ (1-t)x + \frac{x}{\|x\|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n \end{cases}$ είναι μια απεικόνιση συστολής.

. □

Βήμα 2ο: Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, στο οποίο η οριζόντια ακολουθία είναι ακριβής.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_n(\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^{n-1}) & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \\ H_n(\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle\simeq} & & & \searrow^{m_*} & \downarrow{\scriptstyle l_*} & & \\ \{0\} & & & & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-) & & \end{array}$$

Αν α είναι ένας γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^{n-1})\simeq\mathbb{Z}$ [12]θα αποδείξουμε ότι, υπάρχει γεννήτορας β της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n)$, ώστε $p_*(\beta)=\gamma=i_*(\alpha)+(-1)^{n-1}\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)$, όπου a είναι η αντιποδική απεικόνιση.

Απόδειξη: Έχουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(\mathbb{S}^n_-) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{m_*} & H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{S}^n_-) \\ \downarrow{\scriptstyle\simeq} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι ο m_* είναι ισομορφισμός.
Από τη σχέση $\gamma=i_*(\alpha)+(-1)^{n-1}\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} d_n(\gamma) &= d_n\big(i_*(\alpha)\big)+d_n\big((-1)^{n-1}\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)\big) \\ &= d_n\big(i_*(\alpha)\big)+(-1)^{n-1}\big(\mathrm{a}/\mathbb{S}^{n-1}\big)_*\big(d_n(i_*(\alpha)\big), \end{aligned}$$

επειδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{a}_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{a}/\mathbb{S}^{n-1})_*} \\ H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή ο ομομορφισμός $(\mathrm{a}/\mathbb{S}^{n-1})_*$ είναι ένας πολλαπλασιασμός με $(-1)^n$ θα έχουμε $d_n(\gamma)=0$, άρα $\gamma\in\operatorname{Ker}d_n=\operatorname{Im}p_*$, συνεπώς, υπάρχει $\beta\in H_n(\mathbb{S}^n)$, ώστε $\gamma=p_*(\beta)$.
Πρέπει να δείξουμε ότι το β είναι γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n)$. Επειδή, όμως ο m_* είναι ισομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι ο $m_*(\beta)$ είναι γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-)$. Αλλά $l_*\big(p_*(\beta)\big)=l_*(\gamma)$, άρα $m_*(\beta)=l_*(\gamma)$, επομένως θα υπολογίσουμε το $l_*(\gamma)$. Έχουμε $l_*(\gamma)=l_*\big(i_*(\alpha)\big)+(-1)^{n-1}l_*\big(\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)\big)$. Το $l_*\big(i_*(\alpha)\big)$, επειδή ο $l_*\circ i_*$ είναι ισομορφισμός (Βήμα 1ο), είναι γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-)$. Επιπλέον έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συνεχών απεικονίσεων, οι οποίες, εκτός των αντιποδικών είναι όλες ενθέσεις.

[12]Να υπογραμμίσουμε ότι, από την πρόταση 15.10.6 συμπεραίνουμε ότι $H_n(\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^{n-1})\simeq H_n(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1})\simeq\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)\simeq\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\ i\ } & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{a}/\mathbb{S}^n_+} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{a}} \\
(\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\ \phi\ } & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle l} \\
(\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^n_-) & \xrightarrow{\ t\ } & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)
\end{array},$$

το οποίο επάγει στην ομολογία αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
H_n(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\ i_*\ } & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{a}/\mathbb{S}^n_+)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{a}_*} \\
H_n(\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\ \phi_*\ } & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle r_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle l_*} \\
H_n(\mathbb{S}^n_-, \mathbb{S}^n_-) & \xrightarrow{\ t_*\ } & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)
\end{array}.$$

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι $t_* = \hat{0}$, τότε $l_*\big(\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)\big) = t_*\big(r_*((\mathrm{a}/\mathbb{S}^n_+))\big)(a)) = 0$, άρα το $l_*(\gamma) = l_*(i_*(a))$ είναι γεννήτορας του $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Βήμα 3ο: Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό:
Αν $pr : \mathbb{S}^n \to P^n$ είναι η φυσική προβολή και $j : P^n \to (P^n, P^{n-1})$ η ένθεση, τότε ο ομομορφισμός $j_* \circ pr_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(P^n, P^{n-1})$ είναι μηδενικός, αν ο n είναι άρτιος και πολλαπλασιασμός του γεννήτορα της $H_n(P^n, P^{n-1})$ επί δύο, αν ο n είναι περιττός.

Απόδειξη: Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) & & \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_*} & & \\
H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\ p_*\ } & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\ \mathrm{a}_*\ } & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle pr_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle pr_*} & \swarrow{\scriptstyle pr_*} & \\
H_n(P^n) & \xrightarrow{\ j_*\ } & H_n(P^n, P^{n-1}) & &
\end{array}.$$

Επιλέγουμε γεννήτορες α και β, όπως στο προηγούμενο βήμα, δηλαδή ο α είναι γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ και ο β είναι γεννήτορας της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$. Η απεικόνιση $pr \circ i : (\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \to (P^n, P^{n-1})$ είναι η χαρακτηριστική απεικόνιση του n-κυττάρου του συμπλέγματος P^n και επάγει στην ομολογία τον ισομορφισμό $pr_* \circ i_*$ (πρόταση 15.12.3), συνεπώς ο $pr_*\big(i_*(\alpha)\big)$ είναι ένας γεννήτορας της ομάδας $H_n(P^n, P^{n-1})$. Αν

λάβουμε υπόψη μας ότι $pr_* \circ \mathrm{a}_* = pr_*$ έχουμε

$$\begin{aligned} j_*\big(pr_*(\beta)\big) &= pr_*\big(p_*(\beta)\big) \\ &= pr_*\Big(i_*(\alpha) + (-1)^{n-1}\mathrm{a}_*\big(i_*(\alpha)\big)\Big) \\ &= \big[1 + (-1)^{n-1}\big]pr_*\big(i_*(\alpha)\big) \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 2pr_*(i_*(a)), & n = 2k+1 \end{cases}, \end{aligned}$$

επομένως το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Βήμα 4ο: Θα αποδείξουμε ότι για τον ομομορφισμό $\theta_{n+1} : H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) \to H_n(P^n, P^{n-1})$ ισχύει

- $n = 2k \Rightarrow \theta_{n+1}\big(a\big) = 0$
- $n = 2k+1 \Rightarrow \theta_{n+1}\big(a\big) = 2a.$

Απόδειξη: Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}_+, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(\mathbb{S}^n) & & \\ \big\downarrow \phi & & \big\downarrow pr_* & & \\ H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) & \xrightarrow{d'_{n+1}} & H_n(P^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(P^n, P^{n-1}) \end{array}.$$

Από την πρόταση 3.4.4 συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι ισομορφισμός. Επιπλέον έχουμε την ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}_+, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^{n+1}_+) \\ \big\downarrow \simeq & & & & & & \big\downarrow \simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array},$$

άρα ο d_{n+1} είναι ισομορφισμός.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= j_* \circ d'_{n+1} \\ &= (j_* \circ pr_*) \circ (d_{n+1} \circ \phi^{-1}). \end{aligned}$$

Επειδή ο $d_{n+1} \circ \phi^{-1}$ είναι ισομορφισμός, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το 3ο βήμα. Επομένως, αφού υπολογίσαμε τους ομομορφισμούς θ_n και, επειδή οι ομάδες $H_n(P^n, P^{n-1})$

είναι ισόμορφες με την $\mathbb{Z}$ έχουμε:

- **Αν ο n είναι άρτιος > 0, τότε**

$$\theta_{n+1}\big(a\big) = 0,$$
$$\theta_n\big([a]\big) = 2a,$$
$$\theta_{n-1}\big(a\big) = 0.$$

(Το πρώτο ισχύει, γιατί $H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) = H_{n+1}(P^n, P^n) \simeq \{0\}$). Άρα

$$H_n(P^n, P^{n-1}) = \frac{\operatorname{Ker}\theta_n}{\operatorname{Im}\theta_{n+1}} \simeq \frac{\{0\}}{\{0\}} \simeq \{0\} \Rightarrow H_n(P^n) \simeq \{0\}$$

$$H_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}) = \frac{\operatorname{Ker}\theta_{n-1}}{\operatorname{Im}\theta_n} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2 \Rightarrow H_{n-1}(P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$$

κ.ο.κ.

- **Αν ο n είναι περιττός > 1, τότε**

$$\theta_{n+1}\big(a\big) = 0,$$
$$\theta_n\big(a\big) = 0,$$
$$\theta_{n-1}\big(a\big) = 2a.$$

(Το πρώτο ισχύει, γιατί $H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) = H_{n+1}(P^n, P^n) \simeq \{0\}$). Άρα

$$H_n(P^n, P^{n-1}) = \frac{\operatorname{Ker}\theta_n}{\operatorname{Im}\theta_{n+1}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z} \Rightarrow H_n(P^n) \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}) = \frac{\operatorname{Ker}\theta_{n-1}}{\operatorname{Im}\theta_n} \simeq \frac{\{0\}}{\{0\}} \simeq \{0\} \Rightarrow H_{n-1}(P^n) \simeq \{0\}$$

κ.ο.κ.

Εξ' άλλου ο P^n είναι δρομοσυνεκτικός, ως εικόνα του δρομοσυνεκτικού $\mathbb{S}^n$, μέσω της συνεχούς pr, άρα $H_0(P^n) \simeq \mathbb{Z}$. □

Έχουμε λοιπόν τα συμπεράσματα για την ομάδα $H_k(P^n)$ στον παρακάτω πίνακα

k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
P^0	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\cdots$
P^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\cdots$
P^2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\cdots$
P^3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\cdots$
P^4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\cdots$
P^5	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

15.13 Απλή ομολογία

Πριν την ιδιάζουσα ομολογία οι μαθηματικοί μελετούσαν την ομολογία χώρων που ονομάζουμε πολύεδρα. Με την λέξη πολύεδρα εννοούμε εκείνους του υπόχωρους των Ευκλείδειων χώρων, οι οποίοι μπορούν να γραφούν ως ενώσεις πλεγμάτων ή χώρων ομοιόμορφων με πλέγματα, έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε m-πλέγματα που τέμνονται να έχουν τομή ίση ή με μία κορυφή ή με μία από τις $m-1$ όψεις τους. Η διαδικασία αυτή των υπολογισμών των ομάδων ομολογίας είναι αρκετά πολύπλοκη εξαιτίας του μεγάλου πλήθους των πλεγμάτων, τα οποία χρειάζονται για να καλύψουν τα πολύεδρα. Για παράδειγμα για να καλύψουμε την σπείρα χρειαζόμαστε τουλάχιστον δεκατέσσερα 2-πλέγματα (τρίγωνα), εικοσιένα 1-πλέγματα και επτά σημεία. Με τα σύμπλοκα που θα δούμε στην παράγραφο αυτοί οι υπολογισμοί απλοποιούνται πολύ, αλλά παραμένει το μειονέκτημα πως δεν μπορούμε να αναφερόμαστε σε όλους τους τοπολογικούς χώρους, όπως γίνεται με την ιδιάζουσα ομολογία, παρά μόνον σε εκείνους που μπορεί να εφοδιαστούν με δομή συμπλόκου. Παρόλα αυτά εξετάζουμε την ομολογία μέσω συμπλόκων, γιατί μας παρέχεται μία καθαρή γεωμετρική εικόνα.

Ορισμός 15.13.1. Σε έναν τοπολογικό χώρο X ονομάζουμε **σύμπλοκο** την οικογένεια των εικόνων των συνεχών απεικονίσεων $\sigma_i^n : \Delta^n \to X$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $i \in J_n$, όταν ικανοποιούνται οι εξής απαιτήσεις:

1. $J_0 \neq \varnothing$.
2. Ο περιορισμός της απεικόνισης σ_i^n στο εσωτερικό του Δ^n είναι μια εμφύτευση στον χώρο X για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $i \in J_n$.
3. Κάθε σημείο του $x \in X$ ή ανήκει σε ένα και μόνον $\sigma_i^0(\Delta^0)$ ή υπάρχει μοναδικό $n \geq 1$ και μοναδικό $i \in J_n$, ώστε $x \in \sigma_i^n\big((\Delta^n)^0\big)$.
4. Ο περιορισμός της σ_i^n σε κάθε όψη του Δ^n είναι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $i \in J_n$ μια απεικόνιση $\sigma_j^{n-1} : \Delta^{n-1} \to X$ για ένα ακριβώς $j \in J_{n-1}$.
5. Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, αν και μόνον, αν το $\Delta^n \cap (\sigma_i^n)^{-1}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Δ^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i \in J_n$.

Παρατηρήσεις:

1. Η απαίτηση 5 του πιο πάνω ορισμού περιττεύει, όταν το σύνολο $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ είναι πεπερασμένο.
2. Το ενδιαφέρον μας θα περιοριστεί στα πεπερασμένα σύμπλοκα. Στην περίπτωση αυτή, όταν $J_n \neq \varnothing$ και $J = \varnothing$ για κάθε $k > n$ λέμε ότι η διάσταση του συμπλόκου είναι n. Κάθε ένα από τα $\sigma_i^k\big(\Delta^k)^0\big)$, ονομάζουμε k-κύτταρο του συμπλόκου και κάθε ένα από τα $\sigma_i^k(\Delta^k)$ ονομάζεται k-μονόπλοκο του συμπλόκου. Το σύνολο $X^k = \bigcup_{r\leq k \wedge i\in J_r} \sigma_i^r(\Delta^r)$ ονομάζουμε k-σκελετό του συμπλόκου.
3. Σε έναν χώρο μπορούμε να ορίσουμε περισσότερα του ενός σύμπλοκα και το ερώτημα που θέλει απάντηση είναι το αν η ομολογία του χώρου αλλάζει ή παραμένει με την επιλογή διαφορετικού συμπλόκου.

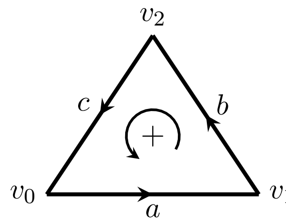
Ορισμός 15.13.2. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\Delta = \{\sigma_i^k(\Delta^k)\,/\,0 \leq k \leq n \wedge i \in J_k\}$ ένα σύμπλοκο διάστασης n στον X. Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με γεννήτορες τα μονόπλοκα $\sigma_i^k(\Delta^k)$, $i \in J_n$ του Δ-συμπλόκου ονομάζεται **ομάδα των απλών** k**-αλυσίδων του χώρου** X **σε σχέση με το σύμπλοκο Δ**. Την ομάδα αυτή συμβολίζουμε με $C_k^\Delta(X)$ και το σύνολο των k-μονοπλόκων συμβολίζουμε με $S_k^\Delta(X)$.

Ορισμός 15.13.3. Η απεικόνιση $\partial_k : S_k^\Delta \to C_{k-1}^\Delta(X)$, με

$$\partial_k\big(\sigma_i^k(\Delta^k)\big) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\sigma_i^k/F_j)(\Delta^{k-1}) \tag{15.46}$$

επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό $\partial_k : C_k^\Delta(X) \to C_{k-1}^\Delta(X)$ (πρόταση 15.2.6), ο οποίος ονομάζεται k**-οστός συνοριακός ομομορφισμός του Δ-συμπλόκου του** X.

Παρατήρηση: Η εφαρμογή του τύπου (15.46) στον υπολογισμό του συνόρου του 1-μονοπλόκου $[u_i, u_{i+1}]$ είναι απλή. Έχουμε $\partial\big([u_i, u_{i+1}]\big) = u_{i+1} - u_i$. Για να υπολογίσουμε το σύνορο του 2-μονοπλόκου $[u_0, u_1, u_2]$ πρέπει να δώσουμε στο τρίγωνο έναν προσανατολισμό (σχ. 15.3)



Σχήμα 15.3

Επιλέγουμε προσανατολισμό αντίθετο από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Ονομάζοντας τα 1-μονόπλοκα $[u_0, u_1]$, $[u_1, u_2]$ και $[u_0, u_2]$ με τα γράμματα a, b και $-c$, αντιστοίχως έχουμε $\partial\big([u_0, u_1, u_2]\big) = [u_1, u_2] - [u_0, u_2] + [u_0, u_1] = b - (-c) + a = a + b + c$.

Πρόταση 15.13.1. *Για τους συνοριακούς ομομορφισμούς ∂_{n+1} και ∂_n του συμπλόκου Δ του χώρου X ισχύει $\partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0}$.*

Απόδειξη: Όπως εκείνη της πρότασης 15.4.2. □

Ορισμός 15.13.4. Η υποομάδα $Z_n^\Delta(X) = \operatorname{Ker}\partial_n$ της $C_n^\Delta(X)$ ονομάζεται **ομάδα των απλών** n**-κύκλων του χώρου** X **σε σχέση με το σύμπλοκο Δ**.

Ορισμός 15.13.5. Η υποομάδα $B_n^\Delta(X) = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ της $C_n^\Delta(X)$ ονομάζεται **ομάδα των απλών** n**-συνόρων του χώρου** X **σε σχέση με το σύμπλοκο Δ**.

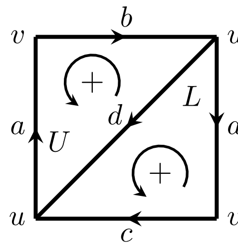
Πρόταση 15.13.2. *Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $B_n^\Delta(X) \leq Z_n^\Delta(X)$.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της πρότασης 15.13.1.

Ορισμός 15.13.6. Η ομάδα πηλίκο $H_n^{\Delta} = Z_n^{\Delta}(X)/B_n^{\Delta}(X)$ ονομάζεται n-**οστή ομάδα απλής ομολογίας του χώρου X σε σχέση με το σύμπλοκο Δ**.

Παραδείγματα 15.13.1.

1. **Στην λωρίδα Moebius** ($\mathbb{M}$), η οποία προκύπτει ως χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο από την ταύτιση των κατακορύφων πλευρών του με αντίθετο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.4



Σχήμα 15.4

ορίζουμε σύμπλοκο Δ με μηδέν n-μονόπλοκα, αν $n > 2$, δύο 2-μονόπλοκα, τα U και L. Τέσσερα 1-μονόπλοκα, τα a, b, c, d και δύο 0-μονόπλοκα, τα u, v. Έτσι έχουμε $C_n^{\Delta}(\mathbb{M}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$, $C_2^{\Delta}(\mathbb{M}) = \langle U, L\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $C_1^{\Delta}(\mathbb{M}) = \langle a, b, c, d\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και $C_0^{\Delta}(\mathbb{M}) = \langle u, v\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια ορίζεται το ακόλουθο σύμπλεγμα

$$\cdots \{0\} \xrightarrow{\partial_3} C_2^{\Delta}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{\Delta}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\Delta}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

- Προφανώς, $H_n^{\Delta}(\mathbb{M}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$.
- Είναι

$$\begin{aligned} \lambda U + \mu L \in \operatorname{Ker} \partial_2 &\Leftrightarrow \partial(\lambda U + \mu L) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(U) + \mu\partial(L) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(-a - d - b) + \mu(d - c - a) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-\lambda - \mu)a - \lambda b - \mu c + (-\lambda + \mu)d = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = 0, \end{aligned}$$

  άρα $\operatorname{Ker} \partial_2 = \{0\}$, επομένως $H_2^{\Delta}(\mathbb{M}) = \{0\}$.

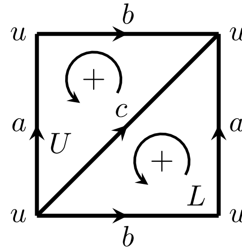
- Είναι

$$\begin{aligned}\lambda a+\mu b+\nu d+\kappa c\in \operatorname{Ker}\partial_1 &\Leftrightarrow \partial(\lambda a+\mu b+\nu d+\kappa c)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(a)+\mu\partial(b)+\nu\partial(d)+\kappa\partial(c)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda(v-u)+\mu(u-v)+\kappa(u-v)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda=\mu+\kappa\wedge\nu\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\partial_1=\{\mu(a+b)+\kappa(a+c)+\nu d/\mu,\kappa,\nu\in\mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker}\partial_1=\langle a+b,a+c,d\rangle\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Επιπλέον $\operatorname{Im}\partial_2=\langle\partial_2(U),\partial_2(L)\rangle=\langle -a-d-b,d-c-a\rangle\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.
Επομένως $H_1^{\Delta}(\mathbb{M})=\frac{\operatorname{Ker}\partial_1}{\operatorname{Im}\partial_2}\simeq\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}$.

- Είναι $\operatorname{Ker}\partial_0=\langle u,v\rangle\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ και $\operatorname{Im}\partial_1=\langle\partial(a),\partial(b),\partial(c),\partial(d)\rangle=\langle u-v\rangle\simeq\mathbb{Z}$.
Επομένως $H_0^{\Delta}(\mathbb{M})=\frac{\operatorname{Ker}\partial_0}{\operatorname{Im}\partial_1}\simeq\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}$.

2. **Στην σπείρα** ($\mathbb{T}$), η οποία προκύπτει ως χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο από την ταύτιση των απέναντι πλευρών του, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.5



Σχήμα 15.5

ορίζουμε σύμπλοκο Δ με μηδέν n-μονόπλοκα, αν $n>2$, δύο 2-μονόπλοκα, τα U και L. Τρία 1-μονόπλοκα, τα a,b,c και ένα 0-μονόπλοκο, το u. Έτσι έχουμε $C_n^{\Delta}(\mathbb{T})\simeq\{0\}$ για κάθε $n>2$, $C_2^{\Delta}(\mathbb{T})=\langle U,L\rangle\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $C_1^{\Delta}(\mathbb{T})=\langle a,b,c\rangle\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ και $C_0^{\Delta}(\mathbb{T})=\langle u\rangle\simeq\mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια ορίζεται το ακόλουθο σύμπλεγμα

$$\cdots\{0\}\xrightarrow{\partial_3}C_2^{\Delta}(\mathbb{T})\xrightarrow{\partial_2}C_1^{\Delta}(\mathbb{T})\xrightarrow{\partial_1}C_0^{\Delta}(\mathbb{T})\xrightarrow{\partial_0}\{0\}.$$

- Προφανώς, $H_n^{\Delta}(\mathbb{T}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$.
- Είναι

$$\begin{aligned}\lambda U + \mu L \in \operatorname{Ker}\partial_2 &\Leftrightarrow \partial(\lambda U + \mu L) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(U) + \mu\partial(L) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda(c - b - a) + \mu(b + a - c) = 0\\ &\Leftrightarrow (-\lambda + \mu)a + (-\lambda + \mu)b + (\lambda - \mu)c = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu,\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker}\partial_2 = \langle U + L\rangle \simeq \mathbb{Z}$. Επιπλέον $\operatorname{Im}\theta_3 = \{0\}$.
Επομένως $H_2^{\Delta}(\mathbb{T}) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_2}{\operatorname{Im}\partial_3} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$.

- Είναι

$$\begin{aligned}\lambda a + \mu b + \kappa c \in \operatorname{Ker}\partial_1 &\Leftrightarrow \partial(\lambda a + \mu b + \kappa c) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(a) + \mu\partial(b) + \kappa\partial(c) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda(u - u) + \mu(u - u) + \kappa(u - u) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle a, b, c\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Επιπλέον $\operatorname{Im}\partial_2 = \{\lambda\partial(U) + \mu\partial(L) \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\} = \{\lambda(c - b - a) + \mu(b + a - c) \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\} = \langle a + b - c\rangle \simeq \mathbb{Z}$.
Επομένως $H_1^{\Delta}(\mathbb{T}) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_1}{\operatorname{Im}\partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

- Είναι $\operatorname{Ker}\partial_0 = C_0^{\Delta}(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$ και $\operatorname{Im}\partial_1 = \{\lambda\partial(a) + \mu\partial(b) + \nu\partial(c) \,/\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}\} \simeq \{0\}$, επομένως $H_0^{\Delta}(\mathbb{T}) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_0}{\operatorname{Im}\partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$.

3. **Στην μποτίλια του Klein** $(\mathbb{K})$, η οποία προκύπτει ως χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο από την ταύτιση των απέναντι πλευρών, όπου οι δύο οριζόντιες ταυτίζονται αντίθετο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.6 ορίζουμε σύμπλοκο Δ με μηδέν n-μονόπλοκα, αν $n > 2$, δύο 2-μονόπλοκα, τα U και L. Τρία 1-μονόπλοκα, τα a, b, c και ένα 0-μονόπλοκο, το u. Έτσι έχουμε $C_n^{\Delta}(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$, $C_2^{\Delta}(\mathbb{K}) = \langle U, L\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $C_1^{\Delta}(\mathbb{K}) = \langle a, b, c\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και $C_0^{\Delta}(\mathbb{K}) = \langle u\rangle \simeq \mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια ορίζεται το ακόλουθο σύμπλεγμα

$$\cdots \{0\} \xrightarrow{\partial_3} C_2^{\Delta}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{\Delta}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\Delta}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

- Προφανώς, $H_n^{\Delta}(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$.
- Είναι

$$\begin{aligned}\lambda U + \mu L \in \operatorname{Ker}\partial_2 &\Leftrightarrow \partial(\lambda U + \mu L) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(U) + \mu\partial(L) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda(c - b - a) + \mu(-b + a - c) = 0\\ &\Leftrightarrow (-\lambda + \mu)a + (-\lambda - \mu)b + (\lambda - \mu)c = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = 0,\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker}\partial_2 \simeq \{0\}$.
Επομένως $H_2^{\Delta}(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$.

- Είναι

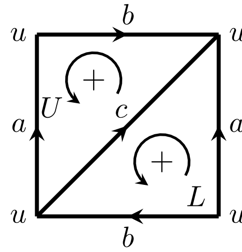
$$\begin{aligned}\lambda a + \mu b + \kappa c \in \operatorname{Ker}\partial_1 &\Leftrightarrow \partial(\lambda a + \mu b + \kappa c) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\partial(a) + \mu\partial(b) + \kappa\partial(c) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda(u-u) + \mu(u-u) + \kappa(u-u) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda,\mu,\kappa \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle a,b,c\rangle \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\partial_2 &= \{\lambda\partial(U) + \mu\partial(L)\,/\,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{\lambda(c-b-a) + \mu(-b+a-c)\,/\,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{\lambda'(c-b-a-b+a-c) + \mu(-b+a-c)\,/\,\lambda',\mu\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{\lambda'(-2b) + \mu(-b+a+c)\,/\,\lambda',\mu\in\mathbb{Z}\}\\ &= \langle 2b, -a-b+c\rangle\\ &\simeq 2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Επομένως $H_1^{\Delta}(\mathbb{K}) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_1}{\operatorname{Im}\partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$.

- Είναι $\operatorname{Ker}\partial_0 = C_0^{\Delta}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{Z}$ και $\operatorname{Im}\partial_1 = \{\lambda\partial(a)+\mu\partial(b)+\nu\partial(c)\,/\,\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{Z}\} \simeq \{0\}$.
Επομένως $H_0^{\Delta}(\mathbb{K}) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_0}{\operatorname{Im}\partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$.



Σχήμα 15.6

4. **Στο προβολικό επίπεδο** ($P\mathbb{R}^2$), το οποίο προκύπτει ως χώρος πηλίκο στο μοναδιαίο τετράγωνο από την ταύτιση των απέναντι πλευρών του με αντίθετο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.7 ορίζουμε σύμπλοκο Δ με μηδέν n-μονόπλοκα, αν $n>2$, δύο 2-μονόπλοκα, τα U και L. Τρία 1-μονόπλοκα, τα a,b,c και δύο 0-μονόπλοκα, τα u,v. Έτσι έχουμε $C_n^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$ για κάθε $n>2$, $C_2^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) = \langle U,L\rangle \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $C_1^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) = \langle a,b,c\rangle \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ και $C_0^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) = \langle u,v\rangle \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια ορίζεται το ακόλουθο σύμπλεγμα

$$\cdots\{0\} \xrightarrow{\partial_3} C_2^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

- Προφανώς, $H_n^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 2$.
- Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda U + \mu L \in \operatorname{Ker}\partial_2 &\Leftrightarrow \partial(\lambda U + \mu L) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\partial(U) + \mu\partial(L) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(c - b - a) + \mu(-b - a - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\lambda - \mu)a + (-\lambda - \mu)b + (\lambda - \mu)c = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = \mu = 0,
\end{aligned}$$

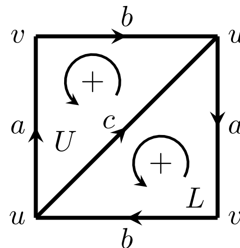
  άρα $\operatorname{Ker}\partial_2 \simeq \{0\}$.
  Επομένως $H_2^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$.
- Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda a + \mu b + \kappa c \in \operatorname{Ker}\partial_1 &\Leftrightarrow \partial(\lambda a + \mu b + \kappa c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\partial(a) + \mu\partial(b) + \kappa\partial(c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(v - u) + \mu(u - v) + \kappa(u - u) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = \mu \wedge \kappa \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

  άρα $\operatorname{Ker}\partial_1 = \langle a - b, c\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\partial_2 &= \{\lambda\partial(U) + \mu\partial(L) \,/\, \lambda, \kappa \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\lambda(c - b - a) + \mu(-b - a - c) \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\lambda'(c - b - a - (-b - a - c)) + \mu(-b - a - c) \,/\, \lambda', \mu \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\lambda'(2c) + \mu(-b - a - c) \,/\, \lambda', \mu \in \mathbb{Z}\} \\
&= \langle 2c, -b - a - c\rangle \\
&\simeq 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

  Επομένως $H_1^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_1}{\operatorname{Im}\partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2$.
- Είναι $\operatorname{Ker}\partial_0 = C_0^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ και $\operatorname{Im}\partial_1 = \{\lambda\partial(a) + \mu\partial(b) + \nu\partial(c) \,/\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}\} = \{\lambda(u - v) \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\} = \langle u - v\rangle \simeq \mathbb{Z}$.
  Επομένως $H_0^{\Delta}(P\mathbb{R}^2) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_0}{\operatorname{Im}\partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$.



Σχήμα 15.7

Στα επόμενα θα αποδείξουμε ότι με την αλλαγή του Δ-συμπλόκου σε έναν χώρο δεν έχουμε αλλαγή της ομολογίας του χώρου.

Ορισμός 15.13.7. Έστω $\Delta = \{\sigma_i^k(D^k)\,/\,i \in J_k \wedge 0 \leq k \leq n\}$ ένα n-διάστατο σύμπλοκο στον χώρο X και A ένα υποσύνολο του Δ, το οποίο είναι σύμπλοκο στον υπόχωρο $Y = \bigcup\limits_{\sigma_i^k(\Delta^k)\in A} \sigma_i^k(\Delta^k)$ του X, τότε το A ονομάζουμε υποσύμπλοκο του Δ, τον δε χώρο Y ονομάζουμε βάση του υποσυμπλόκου A.

Έστω Δ ένα σύμπλοκο στον χώρο X και A ένα υποσύμπλοκο του Δ, το οποίο έχει ως βάση τον υπόχωρον Y του X. Οι αβελιανές ομάδες $C_q^\Delta(X,Y) = C_q^\Delta(X)/C_q^A(Y)$ ορίζουν ένα σύμπλεγμα

$$\cdots C_{n+1}^\Delta(X,Y) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta(X,Y) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X,Y) \to \cdots,$$

η n-οστή ομάδα ομολογίας του οποίου συμβολίζεται με $H_n^\Delta(X,Y)$.
Είναι γνωστό το ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi_k : \Delta^k \to \mathbb{D}^k$, ώστε $\phi_k\big(Int(\Delta^k)\big) = \mathbb{B}^k$ και $\phi_k\big(\mathrm{Bd}(\Delta^k)\big) = \mathbb{S}^{n-1}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σύμπλοκο στον χώρο X ορίζει ένα CW-σύμπλεγμα στο ίδιο χώρο, το οποίο έχει $m = |J_k|$ k-κύτταρα και αν e_i είναι ένα από αυτά, τότε $e_i = \sigma_i^k\big(\phi_k^{-1}(\mathbb{B}^k)\big)$.
Για τον υπολογισμό της ομολογίας $H_q^\Delta(X^n, X^{n-1})$, ο οποίος θα μας χρειαστεί στην απόδειξη της επόμενης θεμελιώδους πρότασης έχουμε να παρατηρήσουμε ότι κατ' αναλογίαν με την πρόταση 15.12.4 αποδεικνύεται ότι, αν $|J_k| = m$, τότε για κάθε $q \geq 0$ έχουμε

$$H_q^\Delta(X^n, X^{n-1}) \simeq \begin{cases} \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases} \simeq H_q(X^n, X^{n-1}).$$

Πρόταση 15.13.3. *Έστω X στον οποίον έχουμε ορίσει ένα σύμπλοκο Δ διάστασης m, τότε για κάθε $q \geq 0$ ισχύει $H_q^\Delta(X) \simeq H_q(X)$.*

Απόδειξη: Κατ'αρχάς ισχύουν τα $H_q^\Delta(X) = H_q^\Delta(X^m)$ και $H_q(X) = H_q(X^m)$. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ έχουμε $X^0 = \{x_1, \ldots, x_r\}$, άρα $H_q^\Delta(X) \simeq \begin{cases} \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \{0\}, & q \neq 0 \end{cases} \simeq H_q(X)$, επομένως η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $k \in \{0, ..., n-1\}$. Στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{q+1}^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_q^\Delta(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_q^\Delta(X^n) & \longrightarrow & H_q^\Delta(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}^\Delta(X^{n-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle a_1} & & \downarrow{\scriptstyle a_2} & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle a_3} & & \downarrow{\scriptstyle a_4} \\ H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(X^n) & \longrightarrow & H_q(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X^{n-1}) \end{array}$$

οι ομομορφισμοί a_2 και a_4 είναι ισομορφισμοί από την επαγωγική υπόθεση. Οι ομομορφσμοί a_1 και a_3 είναι ισομορφισμοί, όπως επισημάναμε στα προλεγόμενα της παρούσης πρότασης. Η απεικόνιση $i : S_q^\Delta(X) \to C_q(X)$, με $i\big(\sigma_i^q(\Delta^q)\big) = \sigma_i^q$ επεκτείνεται μονοσήμαντα στον ομομορφισμό $a : H_q^\Delta(X) \to H_q(X)$, ο οποίος είναι ισομορφισμός, όπως προκύπτει από το λήμμα των πέντε. Επομένως η επαγωγική διαδικασία ολοκληρώθηκε. □

Μετά την πρόταση 15.13.3 με την οποία αποδείξαμε την ισομορφία της απλής και της ιδιάζουσας ομολογίας, ως άμεση συνέπεια των παραδειγμάτων που προηγήθηκαν έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις

Πρόταση 15.13.4. *Η ομολογία της λωρίδας Moebius είναι* $H_q(\mathbb{M}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ \{0\}, & q > 1 \end{cases}.$

Πρόταση 15.13.5. *Η ομολογία της σπείρας είναι* $H_q(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 1 \\ \{0\}, & q > 2 \end{cases}.$

Πρόταση 15.13.6. *Η ομολογία της μποτίλιας Klein είναι* $H_q(\mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & q = 1 \\ \{0\}, & q \geq 2 \end{cases}.$

Πρόταση 15.13.7. *Η ομολογία του προβολικού επιπέδου είναι* $H_q(P\mathbb{R}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & q = 1 \\ \{0\}, & q \geq 2 \end{cases}.$

15.14 Η θεμελιώδης ομάδα και η πρώτη ομάδα ομολογίας

Αρχικά παραθέτουμε κάποιες γνώσεις από τη θεωρία ομάδων, οι οποίες είναι απαραίτητες για την πραγμάτευση των θεμάτων της ενότητας. Η πράξη στις ομάδες που συναντάμε στην ενότητα αυτή είναι ο πολλαπλασιασμός, γιατί οι ομάδες αυτές δεν είναι απαραίτητα αβελιανές.

Ορισμός 15.14.1. Αν G μία ομάδα, τότε κάθε στοιχείο της μορφής $aba^{-1}b^{-1}$, με $a, b \in G$ ονομάζεται **αντιμεταθέτης** της G.

Ορισμός 15.14.2. Την ομάδα, η οποία παράγεται από το σύνολο όλων των αντιμεταθετών A της ομάδας G ονομάζουμε **αντιμεταθέτρια υποομάδα** της G και τη συμβολίζουμε με $[G, G]$.

Παρατήρηση: Αν η G είναι αβελιανή, τότε $[G, G] = \{e\}$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G.

Πρόταση 15.14.1. *Αν G μία ομάδα, τότε η αντιμεταθέτρια υποόμαδα $[G, G]$ είναι κανονική υποομάδα της G.*

Απόδειξη: Έστω $x \in [G, G]$ και $g \in G$. Θα δείξουμε ότι $gxg^{-1} \in [G, G]$. Επειδή, αν $x \in [G, G]$, υπάρχουν γεννήτορες $x_1, ..., x_n$ της $[G, G]$, ώστε $x = x_1 \cdots x_n$, θα έχουμε $gxg^{-1} = gx_1 \cdots x_n g^{-1} = (gx_1g^{-1})(gx_2g^{-1}) \cdots (gx_ng^{-1})$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε τη

σχέση αυτή, υποθέτοντας ότι το x είναι ένας γεννήτορας της $[G,G]$, δηλαδή $x = aba^{-1}b^{-1}$, με $a,b \in G$. Έχουμε

$$\begin{aligned} gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} &= gaba^{-1}g^{-1}b^{-1}(bg)b^{-1}g^{-1} \\ &= [(ga)b(ga)^{-1}b^{-1}][bgb^{-1}g^{-1}] \in [G,G], \end{aligned}$$

συνεπώς η $[G,G]$ είναι κανονική υποομάδα της G. □

Πρόταση 15.14.2. *Αν η G είναι ομάδα, τότε η $G/[G,G]$ είναι αβελιανή.*

Απόδειξη: Αν $a,b \in G$, τότε

$$\begin{aligned} (a[G,G])(b[G,G]) &= ab[G,G] \\ &= ab(b^{-1}a^{-1}ba)[G,G] \\ &= ba[G,G] = (b[G,G])(a[G,G])\,, \end{aligned}$$

άρα η $G/[G,G]$ είναι αβελιανή. □

Πρόταση 15.14.3. *Αν M κανονική υποομάδα της G, τότε*

$$\text{η } G/M \text{ είναι αβελιανή} \Leftrightarrow [G,G] \subseteq M$$

.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$: Έστω $aba^{-1}b^{-1}$ ένας αντιμεταθέτης της G. Έχουμε

$$\begin{aligned} (aM)(bM) &= (bM)(aM) \\ &\Rightarrow abM = baM \\ &\Rightarrow aba^{-1}b^{-1} \in M\,. \end{aligned}$$

Άρα $[G,G] \subseteq M$.
$(\Leftarrow)$: Αν $a,b \in M$, τότε $b^{-1}a^{-1}ba \in [G,G]$, άρα $b^{-1}a^{-1}ba \in M$, συνεπώς

$$\begin{aligned} (aM)(bM) &= (ab)M \\ &= (ab)(b^{-1}a^{-1}ba)M \\ &= (ba)M = (bM)(aM)\,, \end{aligned}$$

άρα η G/M είναι αβελιανή. □

Παρατήρηση: Δηλαδή η $[G,G]$ είναι η μικρότερη από τις κανονικές υποομάδες M της G, για την οποία η G/M είναι αβελιανή. Για τον λόγο αυτόν καλούμε την ομάδα πηλίκο $G/[G,G]$ **αβελιανοποίηση** της G. Προφανώς, αν η G είναι αβελιανή, τότε $G \simeq G/[G,G]$.

Σε οτιδήποτε πραγματευτούμε στην ενότητα αυτή ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος X θα είναι ένας δρομοσυνεκτικός χώρος και το $x_0 \in X$, το οποίο είναι η βάση της $\pi_1(X,x_0)$ θα παραμένει σταθερό. Ως εκ τούτου εφεξής την $\pi_1(X,x_0)$ θα γράφουμε $\pi_1(X)$. Έστω γ

είναι ένας δρόμος στον X. Η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{I} \to X$ είναι συνεχής. Η απεικόνιση $\phi : \Delta^1 \to \mathbb{I}$, με $\phi\big((1-t,t)\big) = t$, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ένας ομοιομορφισμός, με $\phi(1,0) = 0$ και $\phi(0,1) = 1$, άρα η απεικόνιση $\gamma \circ \phi : \Delta^1 \to X$ είναι ένα ιδιάζον 1-πλέγμα στον χώρο X. Αντιστρόφως, αν α είναι ένα ιδιάζον 1-πλέγμα στον X, με $\alpha(1,0) = x_0$, τότε η απεικόνιση $\alpha \circ \phi^{-1} : \mathbb{I} \to X$ είναι ένας δρόμος στον X με αρχή το x_0. Επομένως μπορούμε να ταυτίσουμε τους δρόμους του X με τα ιδιάζοντα 1-πλέγματα του X και αντιστρόφως. Επιπλέον αν ο γ είναι ένας βρόχος στον X, τότε ο $\gamma \circ \phi$ είναι ένας ιδιάζον 1-κύκλος στον X και αν ο α είναι ένας ιδιάζον 1-κύκλος στον X, τότε ο $\alpha \circ \phi^{-1}$ είναι ένας βρόχος στον X.

Λήμμα 15.14.4.

α΄) Ένας σταθερός δρόμος στον X είναι ένα ιδιάζον 1-σύνορο.

β΄) Αν γ είναι ένας δρόμος στον X, με αρχή το x_0 και πέρας το x_1, τότε η ιδιάζουσα 1-αλυσίδα $\gamma + \overline{\gamma}$ είναι ένα ιδιάζον 1-σύνορο.

Απόδειξη: α΄) Έστω $\alpha : \Delta^1 \to X$, με $\alpha(t_1, t_2) = x_0$, όπου $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$ και $t_1 + t_2 = 1$ ένας σταθερός δρόμος στον X. Θεωρούμε το 2-πλέγμα $\tau : \Delta^2 \to X$, με $\tau(t_0, t_1, t_2) = x_0$, όπου $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{I}$ και $t_0 + t_1 + t_2 = 1$. Έχουμε

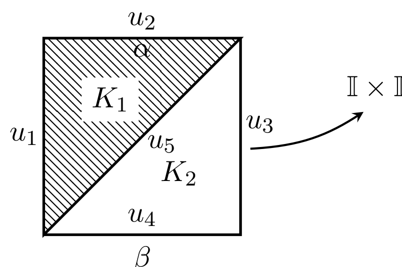
$$\begin{aligned}\partial(\tau) &= \tau \circ d_0^1 - \tau \circ d_1^1 + \tau \circ d_1^1 \\ &= x_0 - x_0 + x_0 \\ &= \alpha(t_1, t_2),\end{aligned}$$

άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

β΄) Θεωρούμε το ιδιάζον 2-πλέγμα $\sigma : \Delta^2 \to X$, το οποίο απεικονίζει συνεχώς την πλευρά $[e_0, e_1]$ του Δ^2 στον δρόμο γ, την πλευρά $[e_0, e_2]$ στο σημείο x_0, άρα θα απεικονίζει την πλευρά $[e_1, e_2]$ του Δ^2 στον δρόμο $\overline{\gamma}$. Επομένως έχουμε: $\partial(\sigma) = \gamma - x_0 + \overline{\gamma}$, άρα $\partial(\sigma + x_0) = \gamma + \overline{\gamma}$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 15.14.5. *Αν α, β είναι δρόμοι στον X, με αρχή το x_0 και πέρας το x_1, ώστε $\alpha \approx_p \beta$, τότε $\alpha \sim \beta$.*

Απόδειξη: Επειδή $\alpha \approx_p \beta$ υπάρχει ομοτοπία $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$, η οποία απεικονίζει συνεχώς την πλευρά u_1 του μοναδιαίου τετραγώνου στο σημείο x_0, την πλευρά u_2 στο 1-πλέγμα α, την πλευρά u_3 στο σημείο x_1 και την πλευρά u_4 στο 1-πλέγμα β.



Σχήμα 15.8

Φέρνουμε την διαγώνιο u_5 του μοναδιαίου τετραγώνου και το χωρίζουμε σε δύο τρίγωνα K_1, K_2, καθένα εκ των οποίων είναι ομοιόμορφο με το Δ^2, μέσω των ομοιομορφισμών $h_1 : \Delta^2 \to K_1$ και $h_2 : \Delta^2 \to K_2$. Θεωρούμε τα ιδιάζοντα 2-πλέγματα $\sigma_1 = H \circ h_1$ και $\sigma_2 = H \circ h_2$. Έχουμε ότι η H/u_1 είναι το σταθερό σημείο x_0, η H/u_2 είναι το 1-πλέγμα α, η H/u_3 είναι το σταθερό σημείο x_1 και η H/u_4 είναι το 1-πλέγμα β. Επομένως

$$\begin{aligned}\partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= H/u_1 - H/u_2 + H/u_5 - \big(H/u_3 - H/u_4 + H/u_5\big)\\ &= x_0 - \alpha - x_1 + \beta,\end{aligned}$$

άρα $\partial(\sigma_1 - \sigma_2 - x_0 + x_1) = \beta - \alpha$, άρα το $\beta - \alpha$ είναι ένα 1-σύνορο, άρα $\alpha \sim \beta$. □

Για να μην την συγχέουμε με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει στην ομάδα $H_1(X)$ ο κύκλος γ με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει στην ομάδα $\pi_1(X)$ ο βρόχος γ θα την συμβολίζουμε την πρώτη με $[[\gamma]]$ και την δεύτερη με $[\gamma]$.

Λήμμα 15.14.6. *Αν α και β δρόμοι στον X, ώστε $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε $\alpha * \beta \sim \alpha + \beta$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το ιδιάζον 2-πλέγμα σ, ώστε $\sigma/[e_0, e_1] = \alpha$, $\sigma/[e_1, e_2] = \beta$ και ο περιορισμός του σ σε όλα τα κάθετα στο $[e_0, e_2]$ ευθύγραμμα τμήματα του Δ_2 να είναι σταθερή απεικόνιση, άρα $\sigma/[e_0, e_2] = \alpha * \beta$, άρα

$$\begin{aligned}\partial\sigma &= \sigma/[e_1, e_2] - \sigma/[e_0, e_2] + \sigma/[e_0, e_1]\\ &= \alpha - (\alpha * \beta) + \beta\\ &\Rightarrow \alpha * \beta \sim \alpha + \beta.\end{aligned}$$

Ορισμός 15.14.3. Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi : \pi_1(X) \to H_1(X)$, με $\Phi([\gamma]) = [[\gamma]]$, την οποία ονομάζεται **απεικόνιση Hurewitz**.[13].

Πρόταση 15.14.7. *Η απεικόνιση Φ είναι καλώς ορισμένη.*

Απόδειξη: Έστω ότι $[\alpha] = [\beta]$, άρα $\alpha \approx_p \beta$, άρα $\alpha \sim \beta$ (λήμμα 15.14.5), άρα $[[\alpha]] = [[\beta]]$, άρα $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta])$, δηλαδή η Φ είναι καλώς ορισμένη. □

Πρόταση 15.14.8. *Η απεικόνιση Φ είναι ένας ομομορφισμός.*[14]

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi\big([\alpha][\beta]\big) &= \Phi\big([\alpha * \beta]\big)\\ &= [[\alpha + \beta]]\\ &= [[\alpha]] + [[\beta]]\\ &= \Phi\big([\alpha]\big) + \Phi\big([\beta]\big),\end{aligned}$$

άρα η Φ είναι ομομορφισμός. □

[13] Witold Hurewitz (1904-1956): Πολωνός μαθηματικός.

[14] Για αυτόν τον λόγο η Φ ονομάζεται και ομομορφισμός Hurewitz.

Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι η πρόταση που έπεται.

Πρόταση 15.14.9. *Αν $f: X \to Y$ συνεχής απεικόνιση, τότε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_*} & H_1(Y) \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Εφεξής, για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε την αντιμεταθέτρια υποομάδα $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ της ομάδας $\pi_1(X)$ με Π και την αβελιανοποίηση της ομάδας $\pi_1(X)$, δηλαδή την ομάδα πηλίκο $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, με $\tilde{\Pi}$.

Ορισμός 15.14.4. Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi_*: \tilde{\Pi} \to H_1(X)$, με $\Phi_*\big([\alpha]\Pi\big) = [[\alpha]]$.

Πρόταση 15.14.10. *Η απεικόνιση Φ_* είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη: Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 15.14.8. □

Πρόταση 15.14.11. *(**Θεώρημα Hurewitz**) Ο ομομορφισμός Φ_* είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: **(Glen Brendon)** Αρχικά θα ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση της Φ_*. Για κάθε σημείο $x \in X$ επιλέγουμε έναν δρόμο λ_x στον X, που έχει αρχή το σημείο x_0 και πέρας το σημείο x. Ο δρόμος λ_{x_0} είναι ο σταθερός. Έστω $f \in S_1(X)$. Θέτουμε $\hat{f} = \lambda_{f(0)} * f * \overline{\lambda_{f(1)}}$. Προφανώς ο $\hat{f}$ είναι ένας βρόχος με βάση το x_0. Ορίζουμε $\psi(f) = [\hat{f}] + \Pi$ και επεκτείνουμε (πρόταση 15.2.6) την απεικόνιση ψ σε έναν ομομορφισμό $\psi: C_1(X) \to \tilde{\Pi}$.

- **Βήμα 1ο**: Θα αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός ψ "στέλνει" την ομάδα $B_1(X)$ στο $1 \in \tilde{\Pi}$.
  Έστω $\sigma: \Delta^2 \to X$ ένα 2-πλέγμα στον X. Θέτουμε $\sigma(e_0) = y_0$, $\sigma(e_1) = y_1$, $\sigma(e_2) = y_2$, $\sigma/[e_0, e_1] = f$, $\sigma/[e_1, e_2] = g$ και $\sigma/[e_2, e_0] = \overline{h}$. Τότε

$$\begin{aligned} \psi(\partial(\sigma)) &= \psi\big(\sigma/[e_1, e_2] - \sigma/[e_2, e_0] + \sigma/[e_0, e_1]\big) \\ &= \psi(g - \overline{h} + f\big) \\ &= \psi(f)\psi(g)\psi(\overline{h})^{-1} \\ &= [\hat{f} * \hat{g} * \overline{(\hat{\overline{h}})}] \\ &= \big[\lambda_{y_0} * f * \overline{\lambda_{y_1}} * \lambda_{y_1} * g * \lambda_{y_2} * \overline{(\lambda_{y_0} * \overline{h} * \lambda_{y_2})}\big] \\ &= \big[\lambda_{y_0} * f * g * \overline{\overline{h}} * \overline{\lambda_{y_0}}\big] \\ &= \big[\lambda_{y_0} * f * g * h * \overline{\lambda_{y_0}}\big] \\ &= [\lambda_{x_0}] = 1, \end{aligned}$$

άρα $\psi\big(B_1(X)\big) = \{1\}$, επομένως η ψ επάγει έναν ομομορφισμό $\Psi_* : H_1(X) \to \tilde{\Pi}$. Αν $[f] \in \pi_1(X)$, τότε

$$\begin{aligned}(\Psi_* \circ \Phi_*)([f]) &= \Psi_*([[f]]) \\ &= [\lambda_{x_0} * f * \overline{\lambda_{x_0}}] = [f],\end{aligned}$$

άρα

$$\Phi_* \circ \Psi_* = i_{\tilde{\Pi}} \tag{15.47}$$

Στο επόμενο βήμα θα δείξουμε ότι $\Psi_* \circ \Phi_* = i_{H_1(X)}$. Η απεικόνιση $x \mapsto \lambda_x$ στέλνει τα 0-πλέγματα σε 1-πλέγματα, επομένως (πρόταση 15.2.6) επεκτείνεται μονοσήμαντα σε έναν ομομορφισμό $\lambda : C_0(X) \to C_1(X)$, με $\lambda(\sum n_x x) = \sum n_x \lambda_x)$[15]

- Θα δείξουμε ότι, αν σ είναι ένα 1-πλέγμα στον X, τότε $\Phi_*(\psi(\sigma)) = [[\sigma + \lambda_{\sigma(0)} - \lambda_{\sigma(1)}]] = [[\sigma - \lambda_{\partial(\sigma)}]]$.
  Έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_*(\psi(\sigma)) &= \Phi_*\big([\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \overline{\lambda_{\sigma(1)}}]\big) \\ &= [[\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \overline{\lambda_{\sigma(1)}}]] \\ &= [[\lambda_{\sigma(0)} + \sigma + \overline{\lambda_{\sigma(1)}}]] \\ &= [[\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}]] \\ &= [[\sigma - \lambda_{\partial(\sigma)}]].\end{aligned}$$

  Προφανώς, αν σ είναι ένας 1-κύκλος, τότε $\partial(\sigma) = 0$, άρα $\Phi_*(\Psi_*([[c]]) = [[c]]$ για κάθε $[[c]] \in H_1(X)$, άρα

$$\Phi_* \circ \Psi_* = i_{H_1(X)}. \tag{15.48}$$

Επομένως η Φ_* είναι ισομορφισμός, δηλαδή $H_1(X) \simeq \tilde{\Pi}$.

[15] Το $\sum$ σημαίνει πεπερασμένο άθροισμα

15.15 Ασκήσεις

1. Αν $x_0 \in \mathbb{S}^n$, $n > 1$, να αποδειχθεί ότι $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) \simeq \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$.
   Απόδειξη: Έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία:
   $$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) \xrightarrow{d} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\})$$
   Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$, ως ομοιόμορφος του $\mathbb{R}^n$ έχουμε $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) \simeq \{0\}$ για κάθε $k \geq 0$, άρα, από την πιο πάνω ακριβή ακολουθία έπεται το ζητούμενο.

2. Αν CX είναι ο κώνος υπεράνω του χώρου X, να δειχθεί ότι $\tilde{H}_n(CX) \simeq \{0\}$ για κάθε $n \geq 0$.
   Απόδειξη: Από την πρόταση 10.3.7, ο χώρος CX είναι συσταλτός, άρα το συμπέρασμα είναι άμεσο.

3. Αν SX είναι η ανάρτηση υπεράνω του χώρου X, να δειχθεί ότι $\tilde{H}_n(SX) \simeq \tilde{H}_{n-1}(X)$ για κάθε $n \geq 1$.
   Υπόδειξη: Αν $pr : X \times \mathbb{I} \to SX$ είναι η φυσική προβολή, τότε τα σύνολα $U = pr\big(X \times [0, \frac{2}{3})\big)$ και $V = pr\big(X \times (\frac{2}{3}, 1]\big)\big)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του SX. Επιπλέον οι χώροι U, V είναι συσταλτοί (γιατί;), άρα $\tilde{H}_n(U) \simeq \tilde{H}_n(V) \simeq \{0\}$. Αφετέρου $U \cap V = pr\big(X \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\big) \approx X$, άρα $\tilde{H}_n(U \cap V) \simeq \tilde{H}_n(X)$.
   Η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής (Θεώρημα Mayer-Vietoris)
   $$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(SX) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(U) \oplus \tilde{H}_{n-1}(V) \\ \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array}$$
   επομένως $\tilde{H}_n(SX) \simeq \tilde{H}_{n-1}(X)$.

4. Να αποδειχθεί ότι $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}$.
   Απόδειξη: Υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$, με $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Επίσης υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με $g(x_0) = \mathbf{0}$. Άρα υπάρχει ομοιομορφισμός $h = f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$, με $h(x_0) = \mathbf{0}$. Επομένως, από την πρόταση 15.6.9 έχουμε ότι $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \simeq H_q(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Θεωρούμε την $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = \frac{1}{2}\}$, η οποία είναι συστολή παραμόρφωσης της $\mathbb{B}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, άρα $H_q(\mathbb{B}^n, \mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}) \simeq H_q(\mathbb{B}^n, S)$. Από την πρόταση 15.6.9 συμπεραίνουμε ότι $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \simeq H_q(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$, επομένως $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \simeq H_q(\mathbb{B}^n, S)$. Η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής:
   $$\tilde{H}_q(S) \to \tilde{H}_q(\mathbb{B}^n) \to H_q(\mathbb{B}^n, S) \to \tilde{H}_{q-1}(S) \to \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{B}^n).$$

Επιπλέον $\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{B}^n) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{B}^n) \simeq \{0\}$, επομένως $H_q(\mathbb{B}^n, S) \simeq \tilde{H}_{q-1}(S)$, άρα

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) &\simeq H_q(\mathbb{B}^n, S) \\ &\simeq \tilde{H}_{q-1}(S) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ &\simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}. \end{aligned}$$

5. Να υπολογιστεί η ομολογία του χώρου $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(2,0)\}$.

   Λύση: Θεωρούμε τα σύνολα $U = \{(x,y)/x > \frac{3}{2}\} \setminus \{(2,0)\}$ και $V = \{(x,y)/x < \frac{7}{4}\} \setminus \{(1,0)\}$, τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X, με $U \cup V = X$ και $U \cap V = \{(x,y)/\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}\} \cong \mathbb{R}^2$. Επιπλέον, $U \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathbb{S}^1$, άρα $\tilde{H}_n(U) = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 1 \end{cases}$. Ομοίως $\tilde{H}_n(V) = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 1 \end{cases}$.
   Η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής (Θεώρημα Mayer-Vietoris)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(U \cap V) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\ \tilde{H}_n(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\} & & & & & & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\} \end{array}.$$

   Επομένως

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(X) &\simeq \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) \\ &\simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

6. Να υπολογιστεί η ομολογία του χώρου $X = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \{(i,0)\}$.

   Λύση: Στη προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι για $k = 2$ έχουμε

$$\tilde{H}_n(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}.$$

   Δεχόμαστε ότι, αν $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{(i,0)\}$, τότε $\tilde{H}_n(Y) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}$.

   Θεωρούμε τα σύνολα $U = \{(x,y)/x < \frac{4k-1}{4}\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (i,0)$ και $V = \{(x,y)/x > \frac{2k-1}{2}\} \setminus \{(k,0)\}$, τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Επιπλέον $U \cup V = X$ και $U \cap V = \{(x,y)/\frac{2k-1}{2} < x < \frac{4k-1}{4}\} \cong \mathbb{R}^2$. Επίσης $U \approx Y$ και $V \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathbb{S}^1$, άρα

$\tilde{H}_n(U) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}$ και $\tilde{H}_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}$. Επιπλέον $U \cap V \cong \mathbb{R}^2$, άρα $\tilde{H}_n(U \cap V) \simeq \tilde{H}_n(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$.
Η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής (Θεώρημα Mayer-Vietoris)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(U \cap V) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\ \tilde{H}_n(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\} & & & & & & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^2) \simeq \{0\} \end{array}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(X) &\simeq \tilde{H}_n(U) \oplus \tilde{H}_n(V) \\ &\simeq \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}, n = 1 \\ \{0\}, n \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

7. Να αποδειχθεί ότι η ομολογία του σφηνοειδούς αθροίσματος $\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$ είναι

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = n \\ \{0\} & 0 \leq q \neq n \end{cases}.$$

Απόδειξη: Έχουμε τα εξής:

- Πρώτον: $\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n \cong S_1 \cup S_2$, όπου
$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x - A\| = 1\}, \text{ με } A = (-1, 0, \ldots, 0)$$
και
$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x - B\| = 1\} \text{ με } B = (1, 0, \ldots, 0).$$
(σχήμα 15.9)
- Δεύτερον: Ο S_1 είναι συστολή παραμόρφωσης του $U = S_1 \cup S_2 \setminus \{(2, 0, \ldots, 0)\}$, συνεπώς
$$\tilde{H}_q(U) \simeq \tilde{H}_q(S_1) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n)$$
για κάθε q.
Ο S_2 είναι συστολή παραμόρφωσης του $V = S_1 \cup S_2 \setminus \{(-2, 0, \ldots, 0)\}$, συνεπώς
$$\tilde{H}_q(V) \simeq \tilde{H}_q(S_2) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n)$$
για κάθε q.
- Τρίτον: Ο $U \cap V = (S_1 \cup S_2) \setminus \{(-2, 0, \ldots, 0), (2, 0, \ldots, 0)\}$ είναι συστολή παραμόρφωσης του σφηνοειδούς αθροίσματος $\mathbb{R}^n \bigvee \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι χώρος συσταλτός (γιατί;), άρα

$$\tilde{H}_q(U \cap V) \simeq \{0\}$$

για κάθε q.

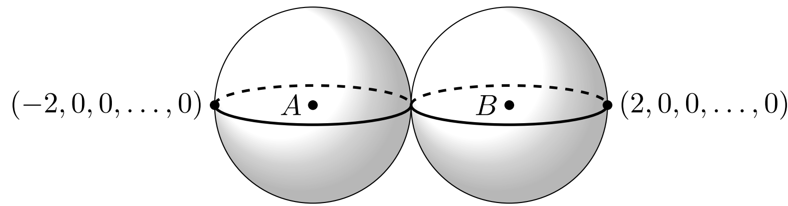
- Τέταρτον: Τα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$, με $U \cup V = \mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$. Από το θεώρημα Mayer-Vietoris συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$\{0\} \simeq \tilde{H}_q(U \cap V) \to \tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V) \to \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) \simeq \{0\}$$

είναι ακριβής. Επομένως, $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n) \simeq \tilde{H}_q \oplus \tilde{H}_q$, δηλαδή

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}.$$

□



Σχήμα 15.9

Συμπέρασμα: Το σφηνοειδές άθροισμα $\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$ έχει δύο τρύπες στην διάσταση n.

Παρατήρηση: Το παραπάνω γενικεύεται ως εξής

$$\tilde{H}_q(\bigvee_{k=1}^{n} \mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{S}^n, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}.$$

8. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει απεικόνιση συστολής της σπείρας $\mathbb{T}$ στον μεσημβρινό της κύκλο $\mathbb{S}^1 \times \{\mathbf{1}\}$.
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση συστολής $r : \mathbb{T} \to \mathbb{S}^1 \times \{\mathbf{1}\}$. Αν i η ένθεση του $\mathbb{S}^1 \times \{\mathbf{1}\}$ στον $\mathbb{T}$, τότε είναι

$$r \circ i = i_{\mathbb{S}^1 \times \{\mathbf{1}\}}. \tag{15.49}$$

Για τους επαγόμενους ομομορφισμούς

$$H_2(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{T}) \xrightarrow{r_*} H_2(\mathbb{S}^1 \times \{\mathbf{1}\}) \simeq H_2(\mathbb{S}^1)$$

έχουμε $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$. Επιπλέον $H_2(\mathbb{S}^1) \simeq \{0\}$, άρα $r_* = \hat{0}$. Από την (15.49) έχουμε

$$r \circ i = i_{\mathbb{S}^1} \Rightarrow (i_{\mathbb{S}^1})_* = i_* \circ r_*$$
$$\Rightarrow (i_{\mathbb{S}^1})_* = i_* \circ \hat{0} = \hat{0}\,,$$

άτοπο.

9. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει απεικόνιση συστολή της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ στον ισημερινό της, $S = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})/x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{S}^{n-1}$.
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση συστολής $r : \mathbb{S}^n \to S \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Αν i η ένθεση του $\mathbb{S}^{n-1}$ στον $\mathbb{S}^n$, τότε είναι

$$r \circ i = i_{\mathbb{S}^{n-1}}. \tag{15.50}$$

Για τους επαγόμενους ομομορφισμούς

$$H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{r_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

έχουμε $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$. Επιπλέον, $H_{n-1}(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$, άρα $r_* = \hat{0}$. Από την (15.50) έχουμε

$$\begin{aligned} r \circ i = i_{\mathbb{S}^{n-1}} &\Rightarrow (i_{\mathbb{S}^{n-1}})_* = i_* \circ r_* \\ &\Rightarrow (i_{\mathbb{S}^{n-1}})_* = i_* \circ \hat{0} = \hat{0}\,, \end{aligned}$$

άτοπο.

10. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει απεικόνιση συστολής του $\mathbb{R}^3$ σε έναν υπόχωρο του ομοιομορφικό με τον $\mathbb{S}^1$.
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση συστολής $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^1$. Αν i η ένθεση του $\mathbb{S}^1$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε είναι

$$r \circ i = i_{\mathbb{S}^1}. \tag{15.51}$$

Για τους επαγόμενους ομομορφισμούς

$$H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{r_*} H_1(\mathbb{S}^1),$$

έχουμε $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$. Επιπλέον, $H_1(\mathbb{R}^3) \simeq \{0\}$, άρα $r_* = \hat{0}$. Από την (15.51) έχουμε

$$\begin{aligned} r \circ i = i_{\mathbb{S}^1} &\Rightarrow (i_{\mathbb{S}^1})_* = i_* \circ r_* \\ &\Rightarrow (i_{\mathbb{S}^1})_* = i_* \circ \hat{0} = \hat{0}\,, \end{aligned}$$

άτοπο.

11. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει απεικόνιση συστολής του $P\mathbb{R}^2$ στο $P\mathbb{R}^1$.
Απόδειξη: Στην παράγραφο 15.10 είδαμε ότι $P\mathbb{R}^1 = e^0 \sqcup e^1$ και $P\mathbb{R}^2 = e^0 \sqcup e^1 \sqcup e^1$, επομένως $P\mathbb{R}^1 \subset P\mathbb{R}^2$. Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση συστολής $r : P\mathbb{R}^2 \to P\mathbb{R}^1$. Αν i η ένθεση του $P\mathbb{R}^1$ στον $P\mathbb{R}^2$, τότε είναι

$$r \circ i = i_{P\mathbb{R}^1}. \tag{15.52}$$

Για τους επαγόμενους ομομορφισμούς:

$$\pi_1(P\mathbb{R}^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(P\mathbb{R}^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(P\mathbb{R}^1)$$

έχουμε $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$. Επιπλέον, $\pi_1(P\mathbb{R}^1) \simeq \mathbb{Z}$ και $\pi_1(P\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Αν $r_*(\overline{1}) = a$, τότε

$$\begin{aligned} 0 = r_*(\overline{0}) &= r_*(\overline{1} + \overline{1}) = 2a \\ &\Rightarrow a = 0 \Rightarrow r_* = \hat{0} \\ &\Rightarrow \left(i_{i_{P1}}\right)_* = \hat{0}\,, \end{aligned}$$

άτοπο.

16 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΔΙΑΖΟΥΣΑΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Η θεωρία της ομολογίας, η οποία είναι μία από τις επαναστατικές ανακαλύψεις της μαθηματικής σκέψης είναι ένα πάντρεμα της τοπολογίας και της άλγεβρας. Ξεκίνησε από τις εργασίες του Poincare και έφτασε στο κορύφωμα της με τις εργασίες του Eilenberg και του Streenrod. Είναι δε ένα εξαιρετικά εκτεταμένο θέμα που δεν μπορεί να καλυφθεί στα πλαίσια ενός βιβλίου βασικής τοπολογίας. Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε μια εισαγωγή στην έννοια και τις βασικές ιδιότητες της ιδιάζουσας ομολογίας, έτσι ώστε με τη βοήθειά της να ανταποκριθούμε στις ανάγκες της πραγμάτευσης μερικών σημαντικών προβλημάτων της τοπολογίας, τα οποία θα εξετάσουμε στο παρόν κεφάλαιο. Εδώ θα μελετήσουμε τις σφαιρικές απεικονίσεις, θα εξετάσουμε τα διανυσματικά πεδία επί των σφαιρών, θα αποδείξουμε το αναλλοίωτο της διάστασης και της δομής (ανοικτά σύνολα) των Ευκλείδειων χώρων, θα αποδείξουμε το θεώρημα Brouwer στη γενική του μορφή και, τέλος το θεώρημα διαχωρισμού του Jordan.

16.1 Το αναλλοίωτο της διάστασης - Θεώρημα Brouwer

Πρόταση 16.1.1. *Για κάθε $n \geq 1$ η σφαίρα $\mathbb{S}^n$ είναι χώρος μη συσταλτός.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, τότε $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq 0$, άρα $\mathbb{Z} \simeq 0$, άτοπο. □

Οι επόμενες δύο προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται στη μη ομοιομορφία των χώρων $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^m$, καθώς και των χώρων $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, όταν $n \neq m$, δείχνουν το πόσο η ιδιάζουσα ομολογία απλουστεύει τα συγκεκριμένα προβλήματα ταξινόμησης των Ευκλείδειων χώρων, τα οποία στη γενική τους περίπτωση είναι άλυτα ή πολύ δύσκολα επιλύσιμα με επιχειρήματα γενικής τοπολογίας.

Πρόταση 16.1.2. *Αν $n \neq m$, τότε οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^m$ δεν είναι ομοιόμορφοι χώροι.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^m$, τότε $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq H_n(\mathbb{S}^m)$, άρα $\mathbb{Z} \simeq \{0\}$, άτοπο. □

Πρόταση 16.1.3. ***(Το αναλλοίωτο της διάστασης)*** *Αν $n \neq m$, τότε οι χώροι $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ δεν είναι ομοιόμορφοι.*

Απόδειξη: Την περίπτωση $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^m$ για $m > 1$ έχουμε ήδη αποδείξει με επιχείρημα συνεκτικότητας. Για τον λόγο αυτόν, υποθέτουμε ότι $1 < n < m$. Για την εφαρμογή της απαγωγής σε άτοπο, υποθέτουμε ότι, υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{f(x)\}$, άρα $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \approx \mathbb{R}^m \setminus \{f(x)\}$. Αλλά $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$ και $\mathbb{R}^m \setminus \{x\} \approx \mathbb{S}^{m-1}$. Επομένως $\mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^{m-1}$, άρα $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1})$, άρα $\mathbb{Z} \simeq \{0\}$, άτοπο. □

Παρατήρηση: Παρόμοια αποδεικνύεται ότι, αν $n \neq m$, τότε οι χώροι $\mathbb{D}^n$ και $\mathbb{D}^m$ δεν είναι ομοιόμορφοι.

Πρόταση 16.1.4. ***(Το αναλλοίωτο της διάστασης των ανοικτών συνόλων)*** *Αν U, V είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, αντιστοίχως και $U \cong V$, τότε $n = m$.*

Απόδειξη: Έστω $f : U \to V$ ένας ομοιομορφισμός, $x \in U$ και $y = f(x)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα εκτομής για $X = \mathbb{R}^n$, $A = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ και $Z = U^c$ έχουμε

$$H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_p(U, U \setminus \{x\}). \tag{16.1}$$

Από το θεώρημα ακριβούς τριγώνου για την σχετική ομολογία συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \tilde{H}_{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \tilde{H}_{p-1}(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array}$$

είναι ακριβής, άρα $H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \tilde{H}_{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$.
Αλλά, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$, συνεπώς

$$\tilde{H}_{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \tilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n \\ \{0\}, & p \neq n \end{cases}.$$

Επομένως από την (16.1) συμπεραίνουμε ότι

$$H_p(U, U \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n \\ \{0\}, & p \neq n \end{cases}. \tag{16.2}$$

Ομοίως καταλήγουμε στο

$$H_p(V, V \setminus \{f(x)\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = m \\ \{0\}, & p \neq m \end{cases}. \tag{16.3}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} U \cong V &\Rightarrow U \setminus \{x\} \cong V \setminus \{f(x)\} \\ &\Rightarrow H_p(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_p(V, V \setminus \{f(x)\}) \quad \forall p \geq 0 . \end{aligned}$$

Επομένως από τις (16.2) και (16.3), συμπεραίνουμε ότι $n = m$. □

Παρατήρηση: Με άλλα λόγια ανοικτά σύνολα που περιέχονται σε Ευκλείδειους χώρους διαφορετικής διάστασης δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα.

Πρόταση 16.1.5. *Για κάθε $n > 1$, η $\mathbb{S}^{n-1}$ δεν είναι συστολή του $\mathbb{D}^n$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει συστολή $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Αν $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ είναι η ένθεση, τότε $r \circ i = i_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Επομένως για τους ομομορφισμούς που επάγουν στις n-οστές ομάδες ομολογίας οι πιο πάνω απεικονίσεις θα έχουμε

$$r_* \circ i_* = (i_{\mathbb{S}^{n-1}})_* \tag{16.4}$$

Όμως $H_n(\mathbb{D}^n) \simeq \{0\}$, άρα $i_* = \hat{0}$, επομένως η (16.4) δίνει $(i_{\mathbb{S}^{n-1}})_* = \hat{0}$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 16.1.6. ***(Θεώρημα Brouwer)*** *Για κάθε $n \geq 1$ η συνεχής απεικόνιση*

$$f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n,$$

έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{D}^n$, ώστε $f(x) = x$.

Απόδειξη: Ακριβώς ίδια με την αλγεβρική απόδειξη της πρότασης 13.3.3, αρκεί να αντικατασταθεί η ομάδα π_1 με την ομάδα H_{n-1}. □

Η πρόταση που ακολουθεί είναι γενίκευση στη διάσταση n της πρότασης 13.3.4 και η απόδειξη της είναι ίδια με εκείνη της πρότασης 13.3.4 και για αυτόν τον λόγο παραλείπεται.

Πρόταση 16.1.7. *Αν K είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με μη κενό εσωτερικό, τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f : K \to K$ έχει σταθερό σημείο.*

16.2 Σφαιρικές απεικονίσεις

Ορισμός 16.2.1. **Σφαιρική απεικόνιση** θα ονομάζουμε κάθε συνεχή απεικόνιση

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, n \geq 1.$$

Έστω f μια σφαιρική απεικόνιση και f_* ο επαγόμενος από αυτήν ομομορφισμός της ομάδας $H_n(\mathbb{S}^n)$ στον εαυτό της. Επειδή $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m, ώστε $f_*([a]) = m[a]$ για κάθε $[a] \in H_n(\mathbb{S}^n)$. Ο m ονομάζεται **βαθμός** της f και συμβολίζεται με $\deg(f)$.

Στην παράγραφο 13.2. δώσαμε τον ορισμό του βαθμού μιας συνεχούς απεικόνισης

$$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,$$

μέσω της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου. Θα αποδείξουμε ότι ο βαθμός της f είναι ο ίδιος ακέραιος, είτε αυτός ορισθεί όπως στην παράγραφο 13.2, είτε όπως στον ορισμό 16.2.1. Για τον λόγο αυτόν προσωρινά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $D(f)$ για τον βαθμό της f του ορισμού 16.2.1, και $\deg(f)$ για τον βαθμό της f, όπως αυτός δόθηκε στην παράγραφο 13.2. Με Φ συμβολίζουμε τον ομομορφισμό Hurewitz. Επειδή η $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ είναι αντιμεταθετική, η αβελιανοποίηση της $\pi_1(\mathbb{S}^1)/[\pi_1(\mathbb{S}^1), \pi_1(\mathbb{S}^1)]$ είναι ισόμορφη με την ίδια, άρα ο ομομορφισμός Φ είναι ισομορφισμός, άρα επιμορφισμός. Έστω F ο επαγόμενος από την f ομομορφισμός της ομάδας $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ στον εαυτό της. Από την πρόταση 15.14.9, συμπεραίνουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{F} & \pi_1(\mathbb{S}^1) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ H_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{f_*} & H_1(\mathbb{S}^1) \end{array}$$

είναι μεταθετικό ($\Phi \circ F = f_* \circ \Phi$). Αν $\deg(f) = n$, τότε $F([\beta]) = n[\beta]$ για κάθε $[\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$. Επομένως

$$\begin{aligned} [[\alpha]] \in H_1(\mathbb{S}^1) &\Rightarrow \exists [\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1); \Phi([\beta]) = [[\alpha]] \\ &\Rightarrow f_*(\Phi([\beta])) = f_*([[\alpha]]) \\ &\Rightarrow \Phi(F([\beta])) = f_*([[\alpha]]) \\ &\Rightarrow \Phi(n[\beta]) = f_*([[\alpha]]) \\ &\Rightarrow n[[\alpha]] = f_*([[\alpha]]) \\ &\Rightarrow D(f) = n\,, \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Πρόταση 16.2.1. *Αν* $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *συνεχείς απεικονίσεις, τότε*

α΄) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

β΄) $\deg(i) = 1$.

γ΄) Αν η f *δεν είναι επί, τότε* $\deg(f) = 0$.

δ΄) Αν $c : \mathbb{S}^n \to \{x_0\} \subseteq \mathbb{S}^n$, *τότε* $\deg(c) = 0$.

ε΄) $f \approx g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$. [1]

ϛ΄) Αν η f *είναι ομοιομορφισμός, τότε* $\deg(f) = \pm 1$.

ζ΄) Αν η f *είναι μηδενοτοπική, τότε* $\deg(f) = 0$.

[1] Ο Hopf απέδειξε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Επομένως ο βαθμός χαρακτηρίζει πλήρως τις σφαιρικές απεικονίσεις. Η απόδειξη του θεωρήματος Hopf είναι εκτός των στόχων του παρόντος.

Απόδειξη: α΄) Έστω ότι $\deg(f) = k$ και $\deg(g) = m$. Είναι

$$\begin{aligned}[\alpha] \in H_n(\mathbb{S}^n) &\Rightarrow (f \circ g)_*([\alpha]) = f_*(g_*([\alpha])) \\ &= f_*(m[\alpha]) = mf_*([\alpha]) = mk[\alpha] \\ &\Rightarrow deg(f \circ g) = mk\,.\end{aligned}$$

β΄) Προφανές.

γ΄) Επειδή η f δεν είναι επί υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^n)$. Θεωρούμε την $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$, με $g(x) = f(x)$ και έχουμε

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{g} \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n,$$

δηλαδή $f = i \circ g$, όπου i η ένθεση του $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ στην $\mathbb{S}^n$. Άρα $f_* = i_* \circ g_*$, όπου $H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{g_*} H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathbb{S}^n)$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ είναι συσταλτός και $n > 0$ έχουμε $H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}) \simeq \{0\}$, άρα $g_* = \hat{0}$, επομένως $f_* = \hat{0}$, άρα $\deg(f) = 0$.

δ΄) Άμεση συνέπεια του γ), επειδή η c δεν είναι επί.

ε΄) $f \approx g \Rightarrow f_*^n = g_*^n \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$.

ϛ΄) Επειδή η f είναι ομοιομορφισμός υπάρχει $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, ώστε

$$f \circ g = g \circ f = i_{\mathbb{S}^n}\,. \tag{16.5}$$

Από την (16.5) συμπεραίνουμε ότι $f \approx g$, άρα $\deg(f) = \deg(g)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}f \circ g = i &\Rightarrow \deg(f \circ g) = 1 \\ &\Rightarrow \deg(f)\ \deg(g) = 1 \\ &\Rightarrow (\deg(f))^2 = 1 \\ &\Rightarrow \deg(f) = \pm 1\,.\end{aligned}$$

ζ΄) Επειδή η f είναι μηδενοτοπική υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n$, ώστε $f \approx c$, όπου $c : \mathbb{S}^n \to \{x_0\}$. Άρα $\deg(f) = \deg(c) = 0$.

□

Πρόταση 16.2.2. *Αν $r_1 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $r_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, x_{n+1})$ (ανάκλαση στην πρώτη συντεταγμένη), τότε $deg(r_1) = -1$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για $n = 1$, γιατί από την πρόταση 13.2.9 έχουμε ότι, αν η f είναι μια ανάκλαση, τότε $\deg(f) = -1$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n - 1$, δηλαδή δεχόμαστε ότι, αν $r_1(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\deg r_1 = -1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για n.[2] Έστω N ο βόρειος πόλος και S ο νότιος πόλος της $\mathbb{S}^n$. Θεωρούμε τα σύνολα $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ και $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Είναι $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, άρα $H_{n-1}(U \cap V) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$. Συμβολίζουμε με i_* έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ και $H_{n-1}(U \cap V)$.
Οι χώροι U, V είναι συσταλτοί και $n - 1 > 0$, άρα $H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq H_{n-1}(U) \simeq H_{n-1}(V) \simeq \{0\}$. Από την ακολουθία Mayer-Vietoris

[2]Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U)\oplus H_n(V) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{d} & H_n(U\cap V) & \longrightarrow & H_{n-1}(U)\oplus H_{n-1}(V) \\ \downarrow\simeq & & & & & & \downarrow\simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\} \end{array}$$

συμπεραίνουμε ότι ο ομομορφισμός d είναι ισομορφισμός. Έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(U\cap V) & \xleftarrow[i_*]{} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \downarrow (r_1)_* & & \downarrow k & & \downarrow g_* \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(U\cap V) & \xleftarrow[i_*]{} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array},$$

όπου g_* ο ομομορφισμός που επάγει ο περιορισμός της r_1 στην $\mathbb{S}^{n-1}$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $g_*([\alpha]) = -[\alpha]$ για κάθε $[\alpha] \in H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Επιπλέον $(r_1)_* = d^{-1}\circ i_* \circ g_* \circ i_*^{-1} \circ d$, άρα

$$\begin{aligned} [\alpha] \in H_n(\mathbb{S}^n) \Rightarrow (r_1)_*([\alpha]) &= d^{-1}(i_*(g_*(i_*^{-1}(d([\alpha]))))) \\ &= -d^{-1}(i_*(i_*^{-1}(d([\alpha])))) \\ &= -d^{-1}(d([\alpha])) = -[\alpha] \\ &\Rightarrow \deg(r_1) = -1\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 16.2.3. *Αν $1 < i \leq n+1$ και $r_i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με*

$$r_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}),$$

(i-ανάκλαση), τότε $deg(r_i) = -1$.

Απόδειξη: Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \text{ με } f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{n+1}) = (x_i,\ldots,x_1,\ldots,x_{n+1})$$

είναι, προφανώς ομοιομορφισμός. Επιπλέον $r_i = f\circ r_1\circ f$, άρα $\deg(r_i) = (\deg(f))^2\deg(r_1)$ και, επειδή $\deg(f) = \pm 1$ έχουμε το ζητούμενο. □

Υπενθυμίζουμε ότι την απεικόνιση $\mathrm{a} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με $\mathrm{a}(x) = -x$, ονομάζουμε **αντιποδική**.

Πρόταση 16.2.4. *Η αντιποδική απεικόνιση $\mathrm{a} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ έχει βαθμό $(-1)^{n+1}$.*

Απόδειξη: Είναι $\mathrm{a} = r_1\circ\cdots\circ r_{n+1}$, άρα $\deg(\mathrm{a}) = \prod_{i=1}^{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$. □

Πρόταση 16.2.5. *Αν η $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ δεν έχει σταθερό σημείο, τότε $f \approx \mathrm{a}$.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n$ και $t \in (0,1)$, ώστε $(1-t)\mathrm{a}(x_0) + tf(x_0) = 0$. Τότε $f(x_0) = \frac{t-1}{t}\mathrm{a}(x_0)$, άρα $\|f(x_0)\| = \frac{1-t}{t}\|\mathrm{a}(x_0)\|$, άρα $t = 1-t$, άρα $f(x_0) = -\mathrm{a}(x_0) = x_0$, άρα το x_0 είναι σταθερό σημείο της f, άτοπο. Επομένως $\|(1-t)\mathrm{a}(x) + tf(x)\| \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Συνεπώς η $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)\mathrm{a}(x)+tf(x)}{\|(1-t)\mathrm{a}(x)+tf(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $H(x,0) = \mathrm{a}(x)$ και $H(x,1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, άρα $f \approx \mathrm{a}$. □

Πόρισμα. *Αν η* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *δεν έχει σταθερό σημείο, τότε* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

Πρόταση 16.2.6. *Αν η* $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *είναι μηδενοτοπική, τότε έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.*

Απόδειξη: Έστω ότι η g δεν έχει σταθερό σημείο, τότε $g \approx \mathrm{a}$, άρα $\deg(g) = \deg(\mathrm{a})$, άρα $0 = (-1)^{n+1}$, άτοπο. □

Την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα δούμε στη παράγραφο 17.3.

Πρόταση 16.2.7. *Αν για τη συνεχή απεικόνιση* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *ισχύει* $f(-x) = -f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{S}^n$, *τότε* $\deg(f) = 2k + 1$.

Πρόταση 16.2.8. *Αν* $m > n > 0$, *τότε δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση* $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$, *η οποία διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, δηλαδή* $f(-x) = -f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{S}^m$.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η συνεχής $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ διατηρεί τα αντιποδικά σημεία. Θεωρούμε την ένθεση

$$i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^m, \text{ με } (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \xrightarrow{i} (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^m.$$

Οι πιο πάνω απεικονίσεις επάγουν στην m-οστή ομάδα ομολογίας ομομορφισμούς f_* και i_*, για τους οποίους ισχύει ότι

$$H_m(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{f_*} H_m(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{i_*} H_m(\mathbb{S}^m). \tag{16.6}$$

Επειδή, $H_m(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$ έχουμε $i_* = \hat{0}$. Για την $i \circ f$ έχουμε

$$\begin{aligned}(i \circ f)(-x) &= i(f(-x)) \\ &= f(-x) = \\ &= -f(x) = -(i \circ f)(x)\,,\end{aligned}$$

άρα η $i \circ f$ διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, επομένως

$$\deg(i \circ f) = 2n + 1. \tag{16.7}$$

Επιπλέον η (16.6) δίνει $(i \circ f)_* = i_* \circ f_* = \hat{0} \circ f_* = \hat{0}$, άρα

$$\deg(i \circ f) = 0. \tag{16.8}$$

Από τις (16.7) και (16.8), συμπεραίνουμε ότι $2n + 1 = 0$, άτοπο. □

Πρόταση 16.2.9. *Αν η τοπολογική ομάδα* G *δρα ελεύθερα επί της σφαίρας* $\mathbb{S}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε* $G \simeq \mathbb{Z}_2$.

Απόδειξη: Έστω F μία ελεύθερη δράση της G στην $\mathbb{S}^{2n}$ και $g \in G$. Τότε ο $F(g) = F_g$ είναι ένας ομοιομορφισμός της $\mathbb{S}^{2n}$ στον εαυτό της. Επομένως από την πρόταση 16.2.1

συμπεραίνουμε ότι $\deg(F_g) = \pm 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : G \to \{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$, με $\Phi(g) = \deg(F_g)$, για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(gh) &= \deg(F_{gh}) \\ &= \deg(F_g \circ F_h) \\ &= \deg(F_g)\deg(F_h) \\ &= \Phi(g)\Phi(h),\end{aligned}$$

άρα η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων. Αν $g \in G$ και $g \neq e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G, τότε επειδή η F είναι ελεύθερη δράση, ο F_g δεν έχει σταθερό σημείο, άρα, από το πόρισμα της πρότασης 16.2.5 έχουμε ότι $\Phi(g) = \deg(F_g) = (-1)^{2n+1} = -1$. Επομένως ο ομοιομορφισμός Φ είναι επί, με $\operatorname{Ker}\Phi = \{e\}$. Από το πρώτο θεώρημα των ισομορφισμών έχουμε

$$\begin{aligned}G/\operatorname{Ker}\Phi \simeq \mathbb{Z}_2 &\Rightarrow G/\{e\} \simeq \mathbb{Z}_2 \\ &\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2,\end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 16.2.10. *Αν G είναι μια τοπολογική ομάδα, τότε υπάρχει δράση $L : G \to Homeo(G)$, η οποία είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $L_g : G \to G$, με $L_g(x) = g \bullet x$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ένας ομοιομορφισμός, άρα η απεικόνιση $L : G \to Homeo(G)$, με $L(g) = L_g$ είναι μια δράση της ομάδας G στον εαυτό της. Έχουμε

$$\begin{aligned}L_g(x) = x &\Rightarrow g \bullet x = x \\ &\Rightarrow x = e,\end{aligned}$$

άρα η δράση της L είναι ελεύθερη. □

Πρόταση 16.2.11. *Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε η σφαίρα S^{2n} δεν μπορεί να εφοδιαστεί με αλγεβρική δομή, η οποία την καθιστά τοπολογική ομάδα.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε, από το λήμμα 16.2.10 η $\mathbb{S}^{2n}$ δρα ελεύθερα στον εαυτό της, άρα, από την πρόταση 16.2.9 έχουμε $\mathbb{S}^{2n} \simeq \mathbb{Z}_2$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί η πρώτη ομάδα έχει άπειρη τάξη, ενώ η δεύτερη έχει τάξη δύο. □

Το θεώρημα Borsuk-Ulam, που ακολουθεί είναι ένα από τα θεωρήματα της τοπολογίας με τις περισσότερες εφαρμογές. Θα το βρούμε εφαρμοζόμενο από τη συνδυαστική, τη θεωρία γραφημάτων, τις διαφορικές εξισώσεις, μέχρι και την οικονομία. Προτάθηκε στο περίφημο Scottish cafe του Lvov από τον Ulam και αποδείχθηκε από τον Borsuk το 1933.

Πρόταση 16.2.12. ***(Θεώρημα Borsuk-Ulam)*** *Αν $n \geq 2$ και $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{S}^n$, ώστε $f(x) = f(-x)$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f(-x) \neq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Άρα η απεικόνιση $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, με $h(x) = \frac{f(-x)-f(x)}{\|f(-x)-f(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $h(-x) = -h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Επομένως η h διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, άτοπο (πρόταση 16.2.8). □

Πρόταση 16.2.13. *Η $\mathbb{S}^n$ δεν εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, για το οποίο ισχύει $\mathbb{S}^n \cong A$ και $f : \mathbb{S}^n \to A$ ένας ομοιομορφισμός. Θεωρούμε $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, με $g(x) = f(x)$. Από το θεώρημα των Borsuk- Ulam υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n$, ώστε $g(-x_0) = g(x_0)$, άρα $f(-x_0) = f(x_0)$, άρα, επειδή η f είναι 1-1 θα έχουμε $-x_0 = x_0$, άρα , $x_0 = \mathbf{0}$, άτοπο. □

Πρόταση 16.2.14. *Αν $m > n$, τότε δεν υπάρχει εμφύτευση της σφαίρας $\mathbb{S}^m$ στην σφαίρα $\mathbb{S}^n$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ μια εμφύτευση. Από την πρόταση 16.1.2 συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιομορφισμός, άρα δεν είναι επί. Επομένως υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^n$, ώστε η $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ να είναι επίσης εμφύτευση. Όμως το $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{R}^n$. Έστω $g : \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ ένας ομοιομορφισμός και $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, με $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^m$ η φυσική εμφύτευση. Τότε η $i \circ g \circ f$ είναι μια εμφύτευση της $\mathbb{S}^m$ στον $\mathbb{R}^m$, το οποίο, από την προηγούμενη πρόταση είναι άτοπο. □

Πρόταση 16.2.15. *Δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο της σφαίρας $\mathbb{S}^n$, το οποίο να είναι ομοιόμορφο με την $\mathbb{S}^n$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $\mathbb{S}^n \cong A \subseteq \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Επειδή $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$ υπάρχει υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, ώστε $\mathbb{S}^n \cong B$, άρα υπάρχει εμφύτευση της $\mathbb{S}^n$ στον $\mathbb{R}^n$, άτοπο (πρόταση 16.2.13). □

Πόρισμα. *Κάθε εμφύτευση της $\mathbb{S}^n$ στον εαυτό της είναι ομοιομορφισμός.*

Πρόταση 16.2.16. ***(Θεώρημα Schnirelmann)*** *Αν το $\{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$ είναι ένα κάλυμμα του $\mathbb{S}^n$, με κλειστά υποσύνολα του, τότε κάποιο από τα A_i περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων της $\mathbb{S}^n$.*

Απόδειξη: Είναι παρόμοια με την απόδειξη της πρότασης 13.3.9 και αφήνεται ως άσκηση. □

16.3 Διανυσματικά πεδία στις σφαίρες

Ορισμός 16.3.1. Αν $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε n-**διάστατο διανυσματικό πεδίο επί του** S, ονομάζουμε κάθε συνεχή απεικόνιση $U : S \to \mathbb{R}^n$. Αν, επιπλέον για κάθε $x \in S$ ισχύει $U(x) \neq 0$, τότε το διανυσματικό πεδίο ονομάζεται **μη μηδενιζόμενο**. Στην περίπτωση που , επιπλέον ισχύει $\langle U(x), x \rangle = 0$, όπου $\langle ..., ... \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ το διανυσματικό πεδίο ονομάζεται **κάθετο**. Εφεξής, όταν αναφερόμαστε στα διανυσματικά πεδία θα εννοούμε ότι είναι κάθετα.

Πρόταση 16.3.1. *Αν ο n είναι περιττός, τότε η αντιποδική απεικόνιση* $\mathrm{a} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την ταυτοτική* $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

Απόδειξη: Είναι $n = 2k+1$, συνεπώς η απεικόνιση $U : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, με

$$U(x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}) = (-y_1, \ldots, -y_{k+1}, x_1, \ldots, x_{k+1})$$

είναι προφανώς ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο επί της $\mathbb{S}^n$, γιατί

$$\begin{aligned}\langle U(x), x\rangle &= \langle U(x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}), (-y_1, \ldots, -y_{k+1}, x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k+1}(-y_i)x_i + \sum_{i=1}^{k+1} y_i x_i = 0\,.\end{aligned}$$

και $U(x) \neq 0$, γιατί $\|U(x)\| = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\langle U(x) + x, x\rangle &= \langle U(x), x\rangle + \langle x, x\rangle \\ &= 0 + \|x\|^2 \neq 0 \\ &\Rightarrow U(x) + x \neq 0\,,\end{aligned}$$

άρα η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, με

$$f(x) = \frac{x + U(x)}{\|x + U(x)\|}$$

είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Αν για κάποιο $x \in \mathbb{S}^n$ ισχύει $f(x) = x$, τότε

$$\begin{aligned}\langle f(x), U(x)\rangle = \langle x, U(x)\rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\langle x, U(x)\rangle}{\|x + U(x)\|} + \frac{\langle U(x), U(x)\rangle}{\|x + U(x)\|} = 0 \\ &\Rightarrow \langle U(x), U(x)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|U(x)\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow 1 = 0\,,\end{aligned}$$

άτοπο. Επομένως $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, άρα (πρόταση 16.2.5)

$$\mathrm{a} \approx f. \tag{16.9}$$

Έστω ότι για κάποιο $x \in \mathbb{S}^n$ και για κάποιο $t \in \mathbb{I}$ ισχύει $x + tU(x) = \mathbf{0}$, τότε

$$\begin{aligned}\langle x + tU(x), x\rangle = 0 &\Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|x\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow 1 = 0\,,\end{aligned}$$

άτοπο, άρα για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$ είναι $x + tU(x) \neq \mathbf{0}$, συνεπώς η απεικόνιση $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)x + t(x+U(x))}{\|(1-t)x + t(x+U(x))\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $H(x,0) = i(x)$ και $H(x,1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, άρα

$$f \approx i. \tag{16.10}$$

Από τις (16.9) και (16.10) προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 16.3.2. *Αν είναι $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ συνεχείς απεικονίσεις, με $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, τότε $\mathrm{a} \circ f \approx g$.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$ έχουμε ότι $(\mathrm{a} \circ f)(x) = -f(x)$ και, επειδή η χορδή του $\mathbb{S}^n$ με άκρα τα $-f(x)$ και $g(x)$ δεν διέρχεται από το κέντρο του $\mathbb{S}^n$. Γιατί σε αντίθετη περίπτωση για κάποιο $t \in \mathbb{I}$ θα είχαμε

$$\begin{aligned}(1-t)g(x) - tf(x) = 0 &\Rightarrow (1-t)g(x) = tf(x)\\ &\Rightarrow \|(1-t)g(x)\| = \|tf(x)\|\\ &\Rightarrow 1 - t = t\\ &\Rightarrow f(x) = g(x),\end{aligned}$$

άτοπο. Συνεπώς για κάθε $t \in \mathbb{I}$ και για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$ έχουμε $(1-t)(\mathrm{a} \circ f)(x) + tg(x) \neq 0$. Επομένως η απεικόνιση $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$, με $H(x,t) = \frac{(1-t)(\mathrm{a} \circ f)(x) + tg(x)}{\|(1-t)(\mathrm{a} \circ f)(x) + tg(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον $H(x,0) = (\mathrm{a} \circ f)(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, άρα $\mathrm{a} \circ f \approx g$. □

Λήμμα 16.3.3. *Αν $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{S}^{2n}$, ώστε $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f(x) \neq x$ και $f(x) \neq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^{2n}$. Άρα $f(x) \neq i(x)$ και $f(x) \neq \mathrm{a}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^{2n}$. Επομένως , από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{a} \circ f \approx i \wedge \mathrm{a} \circ f \approx \mathrm{a} &\Rightarrow \mathrm{a} \approx i\\ &\Rightarrow \deg(\mathrm{a}) = \deg(i)\\ &\Rightarrow (-1)^{2n+1} = 1\,,\end{aligned}$$

άτοπο. □

Πρόταση 16.3.4. *Δεν υπάρχει μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο επί της $\mathbb{S}^{2n}$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $U : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο. Τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, με $f(x) = \frac{U(x)}{\|U(x)\|}$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής. Συνεπώς

$$\begin{aligned}x \in \mathbb{S}^{2n} \Rightarrow 0 = \langle U(x), x\rangle &= \langle \|U(x)\| f(x), x\rangle\\ &\Rightarrow \|U(x)\|\langle f(x), x\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle f(x), x\rangle = 0\,,\end{aligned}$$

άρα για κάθε $x \in \mathbb{S}^{2n}$ ισχύει $\langle f(x), x\rangle = 0$. Όμως, από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^{2n}$, ώστε $f(x_0) = \pm x_0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\langle f(x_0), x_0\rangle = 0 \Rightarrow \pm\langle x_0, x_0\rangle = 0 &\Rightarrow \pm\|x_0\|^2 = 0\\ &\Rightarrow \pm 1 = 0\,,\end{aligned}$$

άτοπο. □

16.4 Θεώρημα Jordan- Το αναλλοίωτο του χωρίου

Ορισμός 16.4.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Τα σημεία του X θα ονομάζουμε **0-κελύφη**. Για $k \geq 1$ κάθε υποσύνολο του X ομοιόμορφο με τον $\mathbb{D}^k \cong \mathbb{I}^k$ θα ονομάζουμε k-**κέλυφος**. Με άλλα λόγια, αν $k \geq 1$, τότε k-κέλυφος στον X είναι κάθε εμφύτευση του $\mathbb{I}^k$ στον X.

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 16.4.1. *Αν B είναι ένα k-κέλυφος, το οποίο περιέχεται στην $\mathbb{S}^m$, τότε ο χώρος $\mathbb{S}^m \setminus B$ είναι ακυκλικός.*

Για την καλύτερη κατανόηση της πρότασης παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

1. Αν αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{S}^1$ ένα 0-κέλυφος, δηλαδή ένα σημείο, προκύπτει ένα σύνολο ομοιόμορφο με το $\mathbb{R}$, άρα ο χώρος που προκύπτει είναι ακυκλικός.

2. Αν αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{S}^1$ ένα 1-κέλυφος, δηλαδή ένα τόξο, προκύπτει ένα σύνολο ομοιόμορφο με το ανοικτό διάστημα (0,1), άρα ο χώρος που προκύπτει είναι ακυκλικός.

3. Αν αφαιρέσουμε από την $\mathbb{S}^2$ ένα σημείο, προκύπτει χώρος ομοιόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$ (στερεογραφική προβολή), άρα ο χώρος που προκύπτει είναι ακυκλικός.

4. Αν αφαιρέσουμε από την $\mathbb{S}^2$ ένα 1-κέλυφος, προκύπτει ένας δρομοσυνεκτικός χώρος, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με την ξένη ένωση των χώρων:

   α΄) Του ισημερινού της μείον ένα τόξο.

   β΄) Του χώρου $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 / z > 0\}$ και

   γ΄) Του χώρου $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 / z < 0\}$.

   Καθένας εξ αυτών έχει μηδενική q ομάδα ελαττωμένης ομολογίας ($q \geq 0$), άρα ο χώρος που προκύπτει είναι ακυκλικός.

Με απλά λόγια η πρόταση σημαίνει πως, αν εξαιρέσουμε από την $\mathbb{S}^n$ ένα οποιοδήποτε k-κέλυφος που μπορεί να εξαιρεθεί, προκύπτει χώρος, ο οποίος είναι ακυκλικός, επομένως δρομοσυνεκτικός.

Λήμμα 16.4.2. *Έστω X τοπολογικός χώρος, με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, όπου τα U_n είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, με $U_n \subseteq U_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $q \geq 0$ έχουμε*

$$H_q(X) \simeq \varinjlim H_q(U_n).$$

Απόδειξη: Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, με $n \leq m$ θεωρούμε τους ομομορφισμούς $\phi_m^n : H_q(U_n) \to H_q(U_m)$ που επάγει στην q-ομολογία η ένθεση $i_m^n : U_n \hookrightarrow U_m$ και τους ομομορφισμούς $f_n : H_q(U_n) \to H_q(X)$ που επάγει στην q-ομολογία η ένθεση $i_n : U_n \hookrightarrow X$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι οι αβελιανές ομάδες $H_q(U_n), H_q(U_m)$ μαζί με τους ομομορφισμούς ϕ_m^n είναι ένα ευθύ σύστημα υπεράνω του $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_q(U_n) & \xrightarrow{\quad f \quad} & H_q(X) \\ & {\scriptstyle r_n}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle f_n} & \\ {\scriptstyle r_m}\nwarrow & H_q(U_n) & \nearrow{\scriptstyle f_m} \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi_m^n} & \\ & H_q(U_m) & \end{array}$$

Επιπλέον θεωρούμε τον ομομορφισμό $f : \varinjlim H_q(U_n) \to H_q(X)$ της πρότασης 15.3.11 για $B = H_q(X)$. Για να δείξουμε ότι ο f είναι ισομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι δύο απαιτήσεις της πρότασης 15.3.12.
Για την απόδειξη της πρώτης απαίτησης, αρχίζουμε από την παρατήρηση ότι, αν C είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X, τότε, επειδή το $U_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του C υπάρχουν $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, ώστε $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{n_i}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $n_1 < \cdots < n_k$, επομένως $C \subseteq U_n$ για κάθε $n \geq n_k$. Αν $[a] \in H_q(X)$, τότε $a = \sum k_i \sigma_i$, όπου $\sigma_i : \Delta^q \to X$ είναι ιδιάζοντα q-πλέγματα. Το σύνολο $\bigcup \sigma_i(\Delta^q)$ είναι συμπαγές, επομένως υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$, ώστε $\bigcup \sigma_i(\Delta^q) \subseteq U_n$ για κάθε $n \geq n_k$, άρα $[\sum k_i \sigma_i] = [b] \in H_q(U_n)$ και $f_n([b]) = [a]$, δηλαδή η πρώτη απαίτηση ικανοποιείται.
Για τη δεύτερη απαίτηση: Έστω ότι $f_n([a]) = [0]$, με $[a] \in H_q(U_n)$, άρα υπάρχουν ιδιάζοντα q-πλέγματα $\sigma_i : \Delta^q \to U_n$, ώστε $a = \sum_i k_i \sigma_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$. Επειδή η f_n είναι ο ομομορφισμός από την ομάδα $H_q(U_n)$ στην ομάδα $H_q(X)$ που επάγει η ένθεση του U_n στον X και $f_n([a]) = 0$ υπάρχουν ιδιάζοντα $q+1$ πλέγματα $t_j : \Delta^{q+1} \to X$, ώστε $f_n([a]) = \big[\sum_j l_j t_j\big]$, $l_j \in \mathbb{Z}$. Το $C = \big(\bigcup_i \sigma_i(\Delta^q)\big) \cup \big(\bigcup_j t_j(\Delta^{q+1})\big)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, επομένως υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, ώστε $C \subseteq U_m$. Έχουμε $\bigcup_i \sigma_i(\Delta^q) \subseteq U_n$, άρα $U_n \subseteq C \subseteq U_m$, επομένως $0 = f_n([a]) = \phi_m^n([a])$. Επομένως αποδείχθηκε και η δεύτερη απαίτηση της πρότασης 15.3.12, άρα ο f είναι ισομορφισμός. □

Στην περίπτωση της ελαττωμένης ομολογίας δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο και αντί των ομάδων $H_q(U_n)$ παίρνουμε τις ομάδες $H_q(U_n, x_0) = \tilde{H}_q(U_n)$ για κάποιο $x_0 \in U_1$, άρα

Λήμμα 16.4.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος, με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, όπου τα U_n είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, με $U_n \subseteq U_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $q \geq 0$ είναι*

$$\tilde{H}_q(X) \simeq \varinjlim \tilde{H}_q(U_n).$$

Λήμμα 16.4.4. *Έστω $q \geq 0$. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ένας συμπαγής χώρος, με την ιδιότητα $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(Y)\big) \simeq \{0\}$ για κάθε εμφύτευση $f : Y \to \mathbb{S}^m$. Τότε $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I} \times Y)\big) \simeq \{0\}$.*

Απόδειξη: Έστω $f : Y \to \mathbb{S}^m$ μια εμφύτευση. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $[a] \in \tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I} \times Y)\big)$, με $[a] \neq 0$. Θέτουμε $U_0 = \mathbb{S}^m \setminus f\big([0, \frac{1}{2}] \times Y\big)$ και $U_1 = \mathbb{S}^m \setminus f\big([\frac{1}{2}, 1] \times Y\big)$. Τότε $U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^m \setminus f\big(\mathbb{I} \times Y\big)$ και $U_0 \cup U_1 = \mathbb{S}^m \setminus f\big(\{\frac{1}{2}\} \times Y\big) \cong \mathbb{S}^m \setminus f(Y)$. Από την υπόθεση έχουμε $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(Y)\big) \simeq \{0\}$ για κάθε q.
Το θεώρημα Mayer-Vietoris δίνει την επόμενη ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_{q+1}(U_0 \cup U_1) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U_0 \cap U_1) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U_0) \oplus \tilde{H}_q(U_1) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U_0 \cup U_1) \\ \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\ \{0\} & & & & & & \{0\}, \end{array}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I} \times Y)\big) \simeq \tilde{H}_q(U_0 \cap U_1) \simeq \tilde{H}_q(U_0) \oplus \tilde{H}_q(U_1),$$

επομένως το $[a]$ έχει εικόνα ένα μη μηδενικό στοιχείο $[a_1]$ μιας εκ των $\tilde{H}_q(U_0)$ ή $\tilde{H}_q(U_1)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτή είναι η $\tilde{H}_q(U_0)$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία βάζοντας στη θέση του $\mathbb{I}$ το $[0, \frac{1}{2}]$. Με τον τρόπο αυτόν επαγωγικά κατασκευάζουμε μία ακολουθία κλειστών κιβωτισμένων διαστημάτων $\mathbb{I} \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$, όπου το I_n έχει μήκος 2^{-n}, άρα $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$ (πρόταση 7.1.5), με $x \in \mathbb{I}$. Τα $U_n = \mathbb{S}^m \setminus f(I_n \times Y)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{S}^m \setminus f(\{x\} \times Y)$, με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{S}^m \setminus f(\{x\} \times Y)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} I_{n+1} \subseteq I_n &\Rightarrow I_{n+1} \times Y \subseteq I_n \times Y \\ &\Rightarrow f(I_{n+1} \times Y) \subseteq f(I_n \times Y) \\ &\Rightarrow \mathbb{S}^m \setminus f(I_{n+1} \times Y) \supseteq \mathbb{S}^m \setminus f(I_n \times Y) \\ &\Rightarrow U_{n+1} \supseteq U_n \end{aligned}$$

και το $[a]$ έχει εικόνα ένα $0 \neq [a_k] \in \tilde{H}_q(U_k)$, μέσω ενός ομομορφισμού για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι υπάρχει $[0] \neq [b] \in \varinjlim \tilde{H}_q(U_k) = \tilde{H}_q(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^m \setminus f(\{x\} \times Y))$, άτοπο, γιατί $\mathbb{S}^m \setminus f(\{x\} \times Y) \cong \mathbb{S}^m \setminus f(Y)$, επομένως $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^m \setminus f(\{x\} \times Y)) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^m \setminus f(Y)) \simeq \{0\}$ ☐

Μετά από το λήμμα 16.4.4, μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση 16.4.1.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, ένα 0-κέλυφος είναι ένα σημείο $x \in \mathbb{S}^m$. Έχουμε $\mathbb{S}^m \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^m$, άρα $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus \{x\}\big) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{R}^m) \simeq \{0\}$, συνεπώς η πρόταση αληθεύει για $n = 1$. Δεχόμαστε ότι αληθεύει για $n-1$, δηλαδή $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I}^{n-1})\big) \simeq \{0\}$, όπου f μια εμφύτευση στον $\mathbb{S}^m$. Από το προηγηθέν λήμμα, επειδή το $\mathbb{I}^{n-1}$ είναι συμπαγές, συμπεραίνουμε ότι $\tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I}^n)\big) = \tilde{H}_q\big(\mathbb{S}^m \setminus f(\mathbb{I} \times \mathbb{I}^{n-1})\big) \simeq \{0\}$. Επομένως η επαγωγή ολοκληρώθηκε, άρα, αν από τη σφαίρα $\mathbb{S}^m$ αφαιρέσουμε ένα k-κέλυφος B που περιέχεται σ' αυτήν, τότε ο χώρος $\mathbb{S}^m \setminus B$ είναι ακυκλικός. ☐

Πρόταση 16.4.5. *Έστω $n > k \geq 0$ και η απεικόνιση $h : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, με $h(x_0, \ldots, x_k) = (x_0, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, τότε για κάθε $q \geq 0$ ισχύει*

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n-k-1 \\ \{0\}, & q \neq n-k-1 \end{cases}. \tag{16.11}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το n σταθερό και εργαζόμαστε με επαγωγή στο k. Για $k=0$ έχουμε

$$h(\mathbb{S}^0)=\{N,S\}\subseteq \mathbb{S}^n \Rightarrow \mathbb{S}^n\setminus\{N,S\}\cong \mathbb{R}^n\setminus\{a\}\approx \mathbb{S}^{n-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus\{N,S\})\simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-1})\simeq \begin{cases}\mathbb{Z}, & q=n-1\\ \{0\}, & q\neq n-1\end{cases},$$

όπου N ο βόρειος και S ο νότιος πόλος της $\mathbb{S}^n$. Επομένως η ισότητα (16.12) ισχύει για $k=0$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $k-1$ και θεωρούμε τα σύνολα $U=\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^k_+)$ και $V=\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^k_-)$, όπου $\mathbb{S}^k_+=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\in\mathbb{S}^k \wedge x_{k+1}\geq 0\}$ και $\mathbb{S}^k_-=\{(x_1,\dots,x_{k+1})\in\mathbb{S}^k \wedge x_{k+1}\leq 0\}$. Τα U,V είναι ανοικτά υποσύνολα της $\mathbb{S}^n$, γιατί τα $h(\mathbb{S}^k_+)$ και $h(\mathbb{S}^k_-)$ είναι κλειστά υποσύνολα της $\mathbb{S}^n$. Επιπλέον $X=U\cup V=\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^{k-1})$ και $A=U\cap V=\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^k)$. Επειδή $\mathbb{S}^k_+\cong\mathbb{D}^k$ και $\mathbb{S}^k_-\cong\mathbb{D}^k$ τα $h(\mathbb{S}^k_+)$ και $h(\mathbb{S}^k_-)$ είναι k-κελύφη, άρα τα U και V είναι ακυκλικά (πρόταση 16.4.1), δηλαδή $\tilde{H}_q(U)\simeq\{0\}$ και $\tilde{H}_q(V)\simeq\{0\}$ για κάθε $q\geq 0$. Από το θεώρημα Mayer-Vietoris έχουμε ότι η επόμενη ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc}\tilde{H}_{q+1}(U)\oplus\tilde{H}_{q+1}(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q+1}(X) & \xrightarrow{\psi} & \tilde{H}_q(A) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U)\oplus\tilde{H}_q(V)\\ \downarrow\simeq & & & & & & \downarrow\simeq\\ \{0\} & & & & & & \{0\}\end{array}$$

είναι ακριβής, άρα ο ενδιάμεσος ομομορφισμός ψ είναι ισομορφισμός, επομένως

$$\begin{aligned}\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^k)) &\simeq \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n\setminus h(\mathbb{S}^{k-1}))\\ &\simeq \begin{cases}\mathbb{Z}, & q=n-k-1\\ \{0\}, & q\neq n-k-1\end{cases}.\end{aligned}$$

συνεπώς η επαγωγή ολοκληρώθηκε. □

Αν $0\leq k<n$, τότε η $h:\mathbb{S}^k\to\mathbb{S}^n$, με $h(x_1,\dots,x_k)=(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)\in\mathbb{S}^n$ είναι μια εμφύτευση. Αν $g:\mathbb{S}^k\to\mathbb{S}^n$ είναι μια οποιαδήποτε εμφύτευση, τότε $g(\mathbb{S}^k)\cong h(\mathbb{S}^k)$, επομένως η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης.

Πρόταση 16.4.6. *Έστω $n>k\geq 0$ και η απεικόνιση $g:\mathbb{S}^k\to\mathbb{S}^n$ είναι μια εμφύτευση, τότε για κάθε $q\geq 0$ ισχύει*

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n\setminus g(\mathbb{S}^k))=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=n-k-1\\ \{0\}, & q\neq n-k-1\end{cases}. \tag{16.12}$$

Επειδή για κάθε $0\leq k<n$ υπάρχει εμφύτευση της σφαίρας $\mathbb{S}^k$ στη σφαίρα $\mathbb{S}^n$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει υποσύνολο C της $\mathbb{S}^n$ ομοιόμορφο με την σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$, το οποίο είναι η εικόνα μιας εμφύτευσης $f:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^n$

Πρόταση 16.4.7. *Έστω $n>1$ και C ένα υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$ ομοιόμορφο της $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε το $\mathbb{S}^n\setminus C$ έχει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες U και V, με $\mathrm{Bd}(U)=\mathrm{Bd}(V)=C$.*

Απόδειξη: Έχουμε ότι $C \cong \mathbb{S}^{n-1}$, άρα υπάρχει εμφύτευση $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$, ώστε $C = f(\mathbb{S}^{n-1})$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus C) \simeq \mathbb{Z}$, επομένως το $\mathbb{S}^n \setminus C$ έχει δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες U, V (πόρισμα της πρότασης 15.7.3). Το C είναι συμπαγές, άρα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, επομένως το $U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus C$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$. Υποθέτουμε ότι $x \in U$. Τότε, επειδή το $U \cup V$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq U \cup V$. Επειδή το U είναι συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{S}^n \setminus C$, το $S(x, \varepsilon)$ είναι συνεκτικό και $x \in U$ πρέπει $S(x, \varepsilon) \cap \mathbb{S}^n \subseteq U$, άρα το U είναι ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$. Αν $x \in U$, τότε υπάρχει περιοχή N του x, ώστε $N \subseteq U$, άρα $N \cap U^c = \varnothing$. Όμως $U^c = \overline{U^c}$, άρα $N \cap \overline{U^c} = \varnothing$, άρα $x \notin \text{Bd}(U)$. Επομένως, αν $x \in \text{Bd}(U)$, τότε $x \notin U$. Άρα

$$\begin{aligned} x \in \text{Bd}(U) &\Rightarrow x \notin U \cap V \\ &\Rightarrow x \in \mathbb{S}^n \setminus (U \cup V) \\ &\Rightarrow x \in C, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\text{Bd}(U) \subseteq C \tag{16.13}$$

Με απαγωγή σε άτοπο θα αποδείξουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω ότι υπάρχει $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, ώστε $f(a) \notin \text{Bd}(U)$. Έχουμε ότι $U^c = C \cup V$, άρα $\overline{U^c} = \overline{C} \cup \overline{V}$. Επειδή $f(a) \in C = \overline{C}$ θα έχουμε ότι $f(a) \in \overline{U^c}$. Άρα, αν $f(a) \notin \text{Bd}(U)$, τότε $f(a) \notin \overline{U}$, άρα υπάρχει περιοχή N του $f(a)$, ώστε $N \cap U = \varnothing$. Έστω W μια μπάλα στην $\mathbb{S}^{n-1}$ αρκούντως μικρή, ώστε $f(W) \subseteq N$. Επειδή $\mathbb{S}^{n-1} \setminus W \cong \mathbb{D}^{n-1}$, το $Y = \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1} \setminus W)$ είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$ (πρόταση 16.4.1). Έχουμε $Y = U \cup V \cup f(W) \subseteq U \cup (V \cup N)$. Αλλά $U \cap (V \cup N) = \varnothing$, επομένως το Y καλύπτεται από δύο μη κενά, ανοικτά και ξένα υποσύνολα της $\mathbb{S}^n$, άρα είναι μη συνεκτικό, άτοπο. Άρα $f(a) \in \text{Bd}(U)$. Συνεπώς

$$\text{Bd}(U) \supseteq C = f(\mathbb{S}^{n-1}) \tag{16.14}$$

Από τις (16.13) και (16.14) συμπεραίνουμε ότι $C = \text{Bd}(U)$. Ομοίως αποδεικνύεται και το $C = \text{Bd}(V)$. ☐

Λήμμα 16.4.8. *Αν το U είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$ και $p \in U$, τότε το $U \setminus \{p\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$.*

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το $U \setminus \{p\}$ δεν είναι συνεκτικό για κάποιο $p \in U$, άρα υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : U \setminus \{p\} \to \{0, 1\}$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S = \{q \in \mathbb{S}^n / \|p - q\| < \varepsilon\} \subset U$, επομένως $S \setminus \{p\} \subset U \setminus \{p\}$. Το $S \setminus \{p\}$ είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, άρα είναι συνεκτικό, επομένως έχουμε ή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in S \setminus \{p\}$ ή $f(x) = 1$ για κάθε $x \in S \setminus \{p\}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο και, θεωρούμε την απεικόνιση $F : U \to \{0, 1\}$, με

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq p \\ 0, & x = p \end{cases},$$

η οποία είναι προφανώς επί. Επιπλέον, αν x_n είναι μια ακολουθία στοιχείων του $U \setminus \{p\}$, η οποία έχει όριο το p, τότε $F(x_n) = f(x_n) = 0$ για κάθε $x \in S \setminus \{p\}$, άρα $F(x_n) \to 0 = F(p)$, άρα η F είναι συνεχής στο p, επομένως είναι συνεχής σ' ολόκληρο το U. Συνεπώς το U δεν είναι συνεκτικό, άτοπο. ☐

Πρόταση 16.4.9. ***(Γενικευμένο θεώρημα Jordan)*** *Αν C ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ομοιόμορφο με την $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε το $\mathbb{R}^n \setminus C$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες με κοινό σύνορο το C.*

Απόδειξη: Έστω $p \in \mathbb{S}^n$ και $f : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ ένας ομοιομορφισμός. Το $f^{-1}(C)$ είναι ένα υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$, ομοιόμορφο με την $\mathbb{S}^{n-1}$, άρα διαχωρίζει την $\mathbb{S}^n$ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες U, V, με κοινό σύνορο το $f^{-1}(C)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $p \in U$. Από το λήμμα 16.4.8 τα $U \setminus \{p\}$ και V είναι συνεκτικές συνιστώσες της $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, με κοινό σύνορο το $f^{-1}(C)$. Επομένως τα $f\big(U \setminus \{p\}\big)$ και $f(V)$ είναι οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^n$ με κοινό σύνορο το C. □

Επειδή, ως συνέπεια της πρότασης 4.2.9, οι συνεκτικές συνιστώσες της αμέσως προηγούμενης πρότασης είναι δρομοσυνεκτικά σύνολα, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την 16.4.9, ως εξής:

Πρόταση 16.4.10. *Αν C ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ομοιόμορφο με την $\mathbb{S}^{n-1}$, τότε το $\mathbb{R}^n \setminus C$ έχει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες με κοινό σύνορο το C.*

Ειδικά στην περίπτωση που $n = 2$ έχουμε το γνωστό θεώρημα Jordan:

Πρόταση 16.4.11. *Κάθε υποσύνολο C του $\mathbb{R}^2$ ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$* ***(καμπύλη Jordan)***[3] *χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το C.*

Η ακόλουθη πρόταση είναι πληρέστερη της 16.4.11

Πρόταση 16.4.12. ***(Θεώρημα του Shoenflies)*** *Κάθε υποσύνολο C του $\mathbb{R}^2$ ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$ χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες, U, V, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το C. Επιπλέον $U \cong \mathbb{B}^2 \cong \mathbb{R}^2$ και $V \cong \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2$.*

[4] Την απόδειξη του θεωρήματος Shoenflies, μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος στο [28]. Κάτι ανάλογο όμως δεν ισχύει για $n > 2$. Για $n = 3$ ο Alexander επινόησε έναν υπόχωρο $S \cong \mathbb{S}^2$ του $\mathbb{R}^3$, (**κερατοειδής σφαίρα του Alexander**),[5] ο οποίος χωρίζει τον $\mathbb{R}^3$ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες καμία εκ των οποίων δεν είναι ομοιόμορφη με τον $\mathbb{R}^3$. Για τη λεπτομερή παρουσίαση της κερατοειδούς σφαίρας του Alexander βλέπε το [15] σελ. 170.

Παρατήρηση: Εφαρμόζοντας το γενικευμένο θεώρημα Jordan μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι χώροι $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και $B = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$ δεν είναι ομοιόμορφοι. Ας σημειωθεί, έχουν την ίδια ομολογία, γιατί έχουν και οι δύο ως συστολή παραμόρφωσης τον $\mathbb{S}^{n-1}$. Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο, ως εξής:
Έστω ότι $A \cong B$ και $f : B \to A$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Jordan το $f\big(\mathbb{S}^{n-1}\big) = f\big(\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}\big)$ χωρίζει το A σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Δηλαδή το $A \setminus f\big(\mathbb{S}^{n-1}\big)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, ενώ το ομοιόμορφο του $B \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ έχει μόνον μία, άτοπο.

Από τον απειροστικό λογισμό είναι γνωστό πως μία συνεχής και 1-1 απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει τα ανοικτά διαστήματα σε ανοικτά διαστήματα. Επειδή στο $\mathbb{R}$ κάθε ανοικτό σύνολο είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων η f θα απεικονίζει και τα ανοικτά

[3] Camille Jordan (1838-1922): Γάλλος μαθηματικός.
[4] Arthur Moritz Shoenflies (1853-1928): Γερμανός μαθηματικός.
[5] James Alexander (1888-1971): Αμερικανός μαθηματικός.

σύνολα σε ανοικτά σύνολα. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει μόνο στον μονοδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, αλλά γενικά στους Ευκλείδειους χώρους κάθε διάστασης, όπως αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα που οφείλεται στον Brouwer. Δηλαδή στους Ευκλείδειους χώρους υπάρχει το αναλλοίωτο των ανοικτών συνόλων, μέσω συνεχών και 1-1 απεικονίσεων.

Είναι αυτό που στην Αγγλική βιβλιογραφία αναφέρεται ως "invariance of domain".

Πρόταση 16.4.13. ***(Το αναλλοίωτο του χωρίου)*** *Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής και 1-1 απεικόνιση, τότε το $f(U)$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επειδή $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{R}^n$ με την $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, θεωρώντας συγχρόνως ότι το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, άρα και της $\mathbb{S}^n$. Έστω $y = f(x) \in f(U)$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει περιοχή W του y, με $W \subseteq f(U)$. Έχουμε $x \in U$ και, επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$ υπάρχει ανοικτή μπάλα B της $\mathbb{S}^n$, με $x \in B \subseteq U$. Το $\overline{B}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{S}^n$, άρα ο περιορισμός της f στο $\overline{B}$, δηλαδή η $f/\overline{B} : \overline{B} \to \mathbb{S}^n$ είναι συνεχής και 1-1 απεικόνιση από τον συμπαγή $\overline{B}$ στον χώρο Hausdorff $\mathbb{S}^n$, άρα είναι μια εμφύτευση. Έχουμε ότι $\overline{B} \cong \mathbb{D}^n$ και $\text{Bd}(B) = \overline{B} \setminus B \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Επομένως το $f\big(\overline{B}\big)$ είναι ένα n-κέλυφος στον $\mathbb{S}^n$. Αν $C = \text{Bd}\,\big(\overline{B}\big)$, τότε το $f(C)$ διαχωρίζει τον $\mathbb{S}^n$ σε δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες W_1, W_2 με κοινό σύνορο το $f(C)$, επειδή $f(C) \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Επιπλέον το $f(B)$ είναι δρομοσυνεκτικό, άρα ή $f(B) \subseteq W_1$ ή $f(B) \subseteq W_2$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο και έχουμε $\mathbb{S}^n \setminus f(\overline{B}) = \big(\mathbb{S}^n \setminus f(B) \cup \big(\mathbb{S}^n \setminus f(C)\big)$. Αν στον εγκλεισμό $f(B) \subseteq W_1$ δεν ισχύει το =, τότε το $\mathbb{S}^n \setminus f(\overline{B})$ θα περιέχει στοιχεία τόσο του W_1 όσο και του W_2, άρα το $f\big(\overline{B}\big)$ είναι ένα n-κέλυφος και το $\mathbb{S}^n \setminus f\big(\overline{B}\big)$ δεν είναι συνεκτικό, άτοπο. Άρα $y \in f(B) = W_1 \subseteq f(U)$. Επιπλέον το W_1 είναι ανοικτό, γιατί

$$\begin{aligned} W_1 &= \mathbb{S}^n \setminus (W_2 \cup C) \\ &= \mathbb{S}^n \setminus \big(W_2 \cup \text{Bd}(W_2)\big) = \mathbb{S}^n \setminus \overline{W}_2\,, \end{aligned}$$

άρα το W_1 είναι η ζητούμενη περιοχή του y. □

Πόρισμα. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μία συνεχής και 1-1 απεικόνιση. Αν U είναι ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε ο περιορισμός της f στο U είναι μια εμφύτευση στον $\mathbb{R}^n$.*

17 ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Η ιδιάζουσα ομολογία που ορίσαμε και μελετήσαμε στο κεφάλαιο 15 έχει ως αντικείμενο την μελέτη των γραμμικών συνδυασμών των ιδιαζόντων αλυσίδων ενός τοπολογικού χώρου με συντελεστές από την ομάδα $\mathbb{Z}$. Για τον λόγο αυτό η ομολογία αυτή ονομάζεται και ακέραια ομολογία. Όμως για την επίλυση πολλών τοπολογικών προβλημάτων θα μας βόλευε να παίρνουμε συντελεστές από μια διαφορετική αβελιανή ομάδα, για παράδειγμα από την $\mathbb{Z}_2$. Έτσι προκύπτει η ανάγκη ορισμού και μελέτης της λεγόμενης ομολογίας με συντελεστές. Για τον αυστηρό ορισμό της ομολογίας αυτής θα μας χρειαστούν οι έννοιες του τανυστικού γινομένου καθώς και του γινομένου στρέψης αβελιανών ομάδων από την ομολογική άλγεβρα.

17.1 Τανυστικό γινόμενο και γινομένο στρέψης αβελιανών ομάδων

Ορισμός 17.1.1. Υποθέτουμε ότι οι A, B είναι αβελιανές ομάδες και θεωρούμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα, η οποία έχει ως βάση το σύνολο $A \times B$, και την οποία συμβολίζουμε με G. Ακολούθως θεωρούμε την υποομάδα F της G, η οποία παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$ καθώς και εκείνα της μορφής $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$. Την ομάδα πηλίκο G/F ονομάζουμε **τανυστικό γινόμενο των ομάδων** A **και** B και συμβολίζουμε με $A \otimes B$.

Παρατηρήσεις:

1. Η ομάδα $A \otimes B$ είναι προφανώς αβελιανή.

2. Το στοιχείο $(a, b) + F$ της ομάδας $A \otimes B$ συμβολίζουμε με $a \otimes b$ και είναι ένας γεννήτορας της $A \otimes B$. Επομένως κάθε στοιχείο της ομάδας $A \otimes B$ γράφεται ως $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i \otimes b_i)$, με $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, ή ως ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $\sum(a_i \otimes b_i)$.

Πρόταση 17.1.1. *Για κάθε* $a, a' \in A$ *και για κάθε* $b \in B$ *ισχύει* $(a+a') \otimes b = (a \otimes b) + (a' \otimes b)$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $(a,b)+(a',b)-(a+a',b) \in F$, άρα $\big((a,b)+(a',b)-(a+a',b)\big)+F = F$, επομένως

$$\begin{aligned}(a+a')\otimes b &= (a+a',b)+F\\ &= (a+a',b)+\big((a,b)+(a',b)-(a+a',b)\big)+F\\ &= \big((a,b)+F\big)+\big((a,b')+F\big)\\ &= (a\otimes b)+(a'\otimes b).\end{aligned}$$

□

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 17.1.2. *Για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b, b' \in B$ ισχύει $a\otimes(b+b') = (a\otimes b)+(a\otimes b')$.*

Με επαγωγή αποδεικνύεται η

Πρόταση 17.1.3. *Αν $a_1,\dots,a_n,a \in A$ και $b_1,\dots,b_n,b \in B$, τότε*

α΄) $\big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\big)\otimes b = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i\otimes b)$ *και*

β΄) $a\otimes\big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\big) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a\otimes b_i)$

Πρόταση 17.1.4. *Για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύουν τα $a\otimes 0 = 0$ και $0\otimes b = 0$.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}a\otimes 0 &= a\otimes(0+0)\\ &= (a\otimes 0)+(a\otimes 0),\end{aligned}$$

άρα, από τον νόμο της διαγραφής που ισχύει στις ομάδες συμπεραίνουμε ότι $a\otimes 0 = 0$. Ομοίως αποδεικνύεται και το $0\otimes b = 0$. □

Πρόταση 17.1.5. *Για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $(-a)\otimes b = a\otimes(-b) = -(a\otimes b)$.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\big((-a)\otimes b\big)+(a\otimes b) &= (-a+a)\otimes b\\ &= 0\otimes b = 0,\end{aligned}$$

άρα $(-a)\otimes b = -(a\otimes b)$. Ομοίως αποδεικνύεται και το $a\otimes(-b) = -(a\otimes b)$. □

Πρόταση 17.1.6. *Για κάθε $(a,b) \in A\times B$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(ma)\otimes b = a\otimes(mb) = m(a\otimes b).$$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο m. Η αλήθεια της πρότασης για $m = 1$ έχει ήδη αποδειχθεί. Δεχόμαστε ότι $\big((m-1)a\big) \otimes b = (m-1)(a \otimes b)$. Τότε

$$\begin{aligned}(ma) \otimes b &= \big(a + (m-1)a\big) \otimes b \\ &= (a \otimes b) + \big((m-1)a \otimes b\big) \\ &= (a \otimes b) + (m-1)(a \otimes b) = m(a \otimes b).\end{aligned}$$

Επομένως με την ολοκλήρωση της επαγωγής αποδείξαμε ότι $(ma) \otimes b = m(a \otimes b)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Ομοίως αποδεικνύεται και το $a \otimes (mb) = m(a \otimes b)$. □

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες προτάσεις έχουμε την πρόταση

Πρόταση 17.1.7. *Αν $(a, b) \in A \times B$ και $m \in \mathbb{Z}$, τότε*

$$(ma) \otimes b = a \otimes (mb) = m(a \otimes b).$$

Παραδείγματα 17.1.1.

1. Αν $m, n \in \mathbb{N}$, με $(m, n) = 1$, τότε $\mathbb{Z}_m \otimes Z_n \simeq \{0\}$.

   Απόδειξη: Έχουμε $(m, n) = 1$, άρα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, ώστε $\kappa m + \lambda n = 1$. Επομένως, αν $(a, b) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, τότε

   $$\begin{aligned}a \otimes b &= \big(a(\kappa m + \lambda n)\big) \otimes b \\ &= \kappa((ma) \otimes b) + \lambda((na) \otimes b) \\ &= \kappa((ma) \otimes b) + \lambda(a \otimes (nb)) \\ &= \kappa(0 \otimes b) + \lambda(a \otimes 0) = 0.\end{aligned}$$

   Άρα, αφού ο αυθαίρετα επιλεγμένος γεννήτορας της $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ είναι μηδέν, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \simeq \{0\}$. □

2. Αν A είναι μια αβελιανή ομάδα στρέψης, τότε $\mathbb{Q} \otimes A \simeq \{0\}$.

   Απόδειξη: Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $a \in A$. Επειδή η A είναι ομάδα στρέψης υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε $na = 0$. Επομένως

   $$\begin{aligned}r \otimes a &= \frac{nr}{n} \otimes a \\ &= \frac{r}{n} \otimes (na) \\ &= \frac{r}{n} \otimes 0 = 0.\end{aligned}$$

   Άρα $\mathbb{Q} \otimes A \simeq \{0\}$, επειδή ο αυθαίρετα επιλεγμένος γεννήτορας της $\mathbb{Q} \otimes A$ είναι μηδέν.
   □

Ορισμός 17.1.2. Έστω ότι οι A, B, C είναι αβελιανές ομάδες. Η απεικόνιση $\phi : A \times B \to C$ ονομάζεται **διγραμμική**, αν και μόνον, αν

α΄) $\phi(a + a', b) = \phi(a, b) + \phi(a', b)$ για κάθε $a, a' \in A$ και για κάθε $b \in B$ και

β΄) $\phi(a, b + b') = \phi(a, b) + \phi(a, b')$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b, b' \in B$.

Παραδείγματα 17.1.2.

1. Η πιο γνωστή διγραμμική απεικόνιση είναι το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του επιπέδου ($\mathbb{R}^2$). Εδώ $A = B = \mathbb{R}^2$ και $C = \mathbb{R}$. Για το εσωτερικό γινόμενο έχουμε

   (α΄) $\langle a + a', b\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a', b\rangle$ και

   (β΄) $\langle a, b + b'\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, b'\rangle$

2. Αν A, B είναι αβελιανές ομάδες, τότε η φυσική προβολή $p : A \times B \to A \otimes B$, με $p((a, b)) = a \otimes b$ είναι διγραμμική απεικόνιση. Πράγματι

$$\begin{aligned} p\big((a + a', b)\big) &= (a + a') \otimes b = (a \otimes b) + (a' \otimes b) \\ &= p\big((a, b)\big) + p\big((a', b)\big) \end{aligned}$$

   και

$$\begin{aligned} p\big((a, b + b')\big) &= a \otimes (b + b') = (a \otimes b) + (a \otimes b') \\ &= p\big((a, b)\big) + p\big((a, b')\big) \end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση είναι η πιο σημαντική από όλες τις προτάσεις που αφορούν το τανυστικό γινόμενο, γιατί δείχνει πως, μέσω του τανυστικού γινομένου μια διγραμμική απεικόνιση "γίνεται" ομομορφισμός.

Πρόταση 17.1.8. *Αν A, B και C είναι αβελιανές ομάδες και $\phi : A \times B \to C$ μια διγραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : A \otimes B \to C$, ώστε $f \circ p = \phi$, όπου p η φυσική προβολή ($p(a, b) = a \otimes b$).*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\ p\ } & A \otimes B \\ & \searrow^{\phi} & \downarrow f \\ & & C \end{array}$$

Απόδειξη: Διευκρινίζουμε ότι με G και F συμβολίζουμε τις ομάδες του ορισμού 17.1.1

- Για την ύπαρξη της f: Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} A \times B & \xrightarrow{\ i\ } & G & \xrightarrow{\ p\ } & A \otimes B \\ & \searrow^{\phi} & \downarrow \tilde{\phi} & \swarrow_{f} & \\ & & C & & \end{array} ,$$

όπου η απεικόνιση i είναι η ένθεση και η απεικόνιση p η φυσική προβολή. Έστω $\tilde{\phi}$ ο μοναδικός ομομορφισμός που επάγει η ϕ, σύμφωνα με την πρόταση 15.2.6, τότε

$$\begin{aligned} x \in F \Rightarrow x &= \sum[(a_i + a_i', b_i) - (a_i, b_i) - (a_i', b_i)] \\ &+ \sum[(a_j, b_j + b_j') - (a_j, b_j) - (a_j, b_j')] \\ &\Rightarrow \tilde{\phi}(x) = \sum \phi[(a_i + a_i', b_i) - (a_i, b_i) - (a_i', b_i)] + \\ &\sum \phi[(a_j, b_j + b_j') - (a_j, b_j) - (a_j, b_j')] = 0, \end{aligned}$$

άρα $F \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{\phi}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : A \otimes B \to C$, με $f(a \otimes b) = \tilde{\phi}((a,b)) = \phi((a,b))$, άρα $f \circ p = \tilde{\phi} = \phi$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \otimes b = a' \otimes b' &\Rightarrow (a,b) + F = (a',b') + F \\ &\Rightarrow (a,b) - (a',b') \in F \\ &\Rightarrow \tilde{\phi}((a,b) - (a',b)) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{\phi}((a,b)) = \tilde{\phi}((a',b')) \\ &\Rightarrow f(a \otimes b) = f(a' \otimes b'), \end{aligned}$$

επομένως η f είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον

$$\begin{aligned} f\big((a \otimes b) + (c \otimes d)\big) &= f\big(p((a,b)) + p((c,d))\big) \\ &= f\big(p((a+c, b+d))\big) \\ &= \tilde{\phi}\big((a+c, b+d)\big) \\ &= \tilde{\phi}\big((a,b)\big) + \tilde{\phi}\big((c,d)\big) \\ &= f\big(p(a,b)\big) + f\big(p(c,d)\big) \\ &= f(a \otimes b) + f(c \otimes d), \end{aligned}$$

άρα η f είναι ομομορφισμός. Επομένως υπάρχει ομομορφισμός $f : A \otimes B \to C$, ώστε $f \circ p = \phi$.

- Για την μοναδικότητα της f: Έστω $f' : A \otimes B \to C$, με $f' \circ p = \tilde{\phi}$. Τότε $(f' \circ p)((a,b)) = \tilde{\phi}((a,b)) = (f \circ p)((a,b))$, άρα $f(a \otimes b) = f'(a \otimes b)$ για κάθε γεννήτορα $a \otimes b$ της $A \otimes B$, επομένως $f = f'$. □

Πρόταση 17.1.9. *Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε $\mathbb{Z} \otimes G \simeq G$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z} \times G \to G$ με $\phi(n,g) = ng$, η οποία, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι διγραμμική. Άρα από την πρόταση 17.1.8 υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : \mathbb{Z} \otimes G \to G$ με $f(n \otimes g) = ng = \phi(g)$. Επιπλέον θεωρούμε την απεικόνιση $h : G \to \mathbb{Z} \otimes G$, με $h(g) = 1 \otimes g$. Έχουμε $(f \circ h)(g) = f(1 \otimes g) = g = i_G(g)$, άρα η f είναι επί. Και $(h \circ f)(n \otimes g) = h(ng) = 1 \otimes ng = n \otimes g = i_{\mathbb{Z} \otimes G}$, άρα η f είναι 1-1. Συνεπώς η f είναι ισομορφισμός, άρα $\mathbb{Z} \otimes G \simeq G$. □

Θα δούμε δύο εφαρμογές της πρότασης 17.1.8.

Παραδείγματα 17.1.3.

1. Αν $(m,n)=d>1$, τότε $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_d$.

   Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, αν $d|ab$, τότε για κάποιο $r\in\mathbb{Z}$ έχουμε $ab=rd=r\kappa m+r\lambda n$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi:\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_d$, με $\phi(a,b)=ab \mod d$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι διγραμμική. Επίσης άμεσο είναι το ότι η ϕ είναι επί. Έχουμε $ab(1\otimes 1)=a(1\otimes b)=a\otimes b$ και $ab(1\otimes 1)=ab\otimes 1$, άρα $a\otimes b=ab\otimes 1$. Από την πρόταση 17.1.8 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f:\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_d$, με $f(a\otimes b)=ab \mod d$. Θα αποδείξουμε την συνεπαγωγή $f(a\otimes b)=0\Rightarrow a\otimes b=0$. Έχουμε

   $$\begin{aligned} f(a\otimes b)=[0]_d &\Rightarrow f(ab\otimes 1)=[0]_d\\ &\Rightarrow ab \mod d=0\\ &\Rightarrow d|ab\\ &\Rightarrow ab=r\kappa m+r\lambda n, \end{aligned}$$

   άρα

   $$\begin{aligned} a\otimes b&=ab\otimes 1\\ &=(r\kappa m+r\lambda n)\otimes 1\\ &=r\kappa(m\otimes 1)+r\lambda(1\otimes n)=0. \end{aligned}$$

   Ένα οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $\sum(a_i\otimes b_i)$, άρα

   $$\begin{aligned} f\big(\sum(a_i\otimes b_i)\big)=0 &\Rightarrow f\big(\sum(a_ib_i\otimes 1)\big)=0\\ &\Rightarrow f\big((\sum a_ib_i)\otimes 1\big)=0\\ &\Rightarrow (\sum a_ib_i)\otimes 1=0\\ &\Rightarrow \sum(a_i\otimes b_i)=0. \end{aligned}$$

   Άρα $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, επομένως η f είναι 1-1. Το επί της f είναι άμεση συνέπεια του ότι η ϕ είναι επί, συνεπώς η f είναι ισομορφισμός, δηλαδή $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n\simeq Z_d$.[1] □

2. Ισχύει $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}\simeq\mathbb{Q}$.

[1] Η εφαρμογή μπορεί να αποδειχθεί και ως συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, αρκεί να αποδειχθεί η πρόταση: Αν G είναι μια κυκλική ομάδα τάξης n, τότε η G/mG είναι κυκλική ομάδα τάξης d, όπου $d=(m,n)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\phi(t, r) = tr$, η οποία, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι διγραμμική και επί. Συνεπώς υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, ώστε $f(t \otimes r) = \phi(t, r) = tr$. Αν $t = \frac{p}{q}$ και $r = \frac{m}{n}$, τότε

$$\begin{aligned} t \otimes r &= \frac{p}{q} \otimes \frac{m}{n} \\ &= \frac{mnp}{nq} \otimes \frac{1}{n} \\ &= n\frac{1}{n}\big(\frac{mp}{nq} \otimes 1\big) = tr \otimes 1. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \sum(x_i \otimes y_i) \in \operatorname{Ker} f &\Rightarrow f\big(\sum(x_i \otimes y_i)\big) = 0 \\ &\Rightarrow \sum f(x_i \otimes y_i) = 0 \\ &\Rightarrow \sum f(x_i y_i \otimes 1) = 0 \\ &\Rightarrow \sum x_i y_i = 0 \\ &\Rightarrow (\sum x_i y_i) \otimes 1 = 0 \\ &\Rightarrow \sum \big(x_i y_i \otimes 1\big) = 0 \\ &\Rightarrow \sum(x_i \otimes y_i) = 0, \end{aligned}$$

άρα $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, επομένως η f είναι 1-1. Το επί της f προκύπτει από το ότι η ϕ είναι επί. Επομένως η f είναι ισομορφισμός, άρα $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$. □

Πρόταση 17.1.10. *Αν A και B είναι αβελιανές ομάδες, τότε $A \otimes B \simeq B \otimes A$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την διγραμμική απεικόνιση $\phi : A \times B \to A \otimes B$, με $\phi(a, b) = a \otimes b$. Συνέπεια της πρότασης 17.1.8 είναι το ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : A \otimes B \to B \otimes A$, ώστε $f(a \otimes b) = b \otimes a$. Ακολούθως θεωρούμε την διγραμμική απεικόνιση $g : B \times A \to A \otimes B$, με $g(b, a) = a \otimes b$. Επίσης συνέπεια της πρότασης 17.1.8 είναι το ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h : B \otimes A \to A \otimes B$, ώστε $h(b \otimes a) = a \otimes b$. Για τους ομομορφισμούς f και h έχουμε

$$\begin{aligned} f(h(b \otimes a)) &= f(a \otimes b) \\ &= b \otimes a = i_{B \otimes A}(b \otimes a) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} h(f(a \otimes b)) &= h(b \otimes a) \\ &= a \otimes b = i_{A \otimes B}(a \otimes b), \end{aligned}$$

επομένως η f είναι ισομορφισμός, άρα $A \otimes B \simeq B \otimes A$. □

Πρόταση 17.1.11. *Αν* A, B, C *είναι αβελιανές ομάδες, τότε* $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$.

Απόδειξη: Έστω $x \in A \otimes (B+C)$, άρα $x = \sum \big(a_i \otimes (b_i + c_i)\big) = \sum \big((a_i \otimes b_i) + (a_i \otimes c_i)\big)$, άρα $x \in (A \otimes B) + (A \otimes C)$. Επομένως

$$A \otimes (B+C) \subseteq (A \otimes B) + (A \otimes C) \tag{17.1}$$

ομοίως αποδεικνύεται και το

$$(A \otimes B) + (A \otimes C) \subseteq A \otimes (B+C) \tag{17.2}$$

Από τις (17.1) και (17.2) προκύπτει το ζητούμενο. □

Με επαγωγή στο n αποδεικνύεται η πρόταση

Πρόταση 17.1.12. *Αν* A_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ *είναι μία οικογένεια αβελιανών ομάδων, τότε για την οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα* B *ισχύει*

$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\Big) \otimes B \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \otimes B.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την πρόταση 21.4.10 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί $j_\beta : A_\beta \to \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ και $\pi_\beta : \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \to A_\beta$, ώστε $\pi_\beta \circ j_\alpha = \hat{0}$, αν $\beta \neq \alpha$ και $\pi_\beta \circ j_\alpha = i_{A_\alpha}$, αν $\beta = \alpha$.
Έστω $f_\beta = j_\beta \otimes 1 : A_\beta \otimes B \to \big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\big) \otimes B$ και $g_\beta = \pi_\beta \otimes 1 : \big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\big) \otimes B \to A_\beta \otimes B$, τότε $g_\beta \circ f_\alpha = \hat{0}$, αν $\beta \neq \alpha$ και $g_\beta \circ f_\alpha = i_{A_\alpha}$, αν $\beta = \alpha$.
Το $\big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\big) \otimes B$ παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $a \otimes b$, όπου $a \in \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ και $b \in B$. Επειδή το a είναι πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων της μορφής $j_\alpha(a_\alpha)$ συμπεραίνουμε ότι το $\big(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\big) \otimes B$ παράγεται από τις ομάδες $f_\alpha(A_\alpha \otimes B)$, επομένως, εφαρμόζοντας τη πρόταση 21.4.10 συμπεραίνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 17.1.13. *Αν* A, A', B, B' *είναι αβελιανές ομάδες και* $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ *είναι ομομορφισμοί, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός* $F : A \otimes B \to A' \otimes B'$, *ώστε* $F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $h : A \times B \to A' \otimes B'$, με $h(a, b) = f(a) \otimes g(b)$, για την οποία

$$\begin{aligned} h(a, b_1 + b_2) &= f(a) \otimes (g(b_1) + g(b_2)) \\ &= (f(a) \otimes g(b_1)) + (f(a) \otimes g(b_2)) \\ &= h(a, b_1) + h(a, b_2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} h(a_1 + a_2, b) &= (f(a_1) + f(a_2)) \otimes g(b) \\ &= (f(a_1) \otimes g(b)) + (f(a_2) \otimes g(b)) \\ &= h(a_1, b) + h(a_2, b), \end{aligned}$$

άρα η h είναι διγραμμική. Επομένως από την πρόταση 17.1.8 υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $F : A \otimes B \to A' \otimes B'$, ώστε $F(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$. □

Ορισμός 17.1.3. Ο ομομορφισμός F της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται **τανυστικό γινόμενο των ομομορφισμών** f και g και συμβολίζεται με $f \otimes g$.

Πρόταση 17.1.14. *Αν A, A', A'', B, B', B'' είναι αβελιανές ομάδες και οι $f : A \to A'$, $f' : A' \to A''$, $g : B \to B'$ και $g' : B' \to B''$ είναι ομομορφισμοί ομάδων, τότε $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$.*

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned}\big((f' \otimes g') \circ (f \otimes g)\big)(a \otimes b) &= (f' \otimes g')\big((f \otimes g)(a \otimes b)\big)\\ &= (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b))\\ &= f'(f(a)) \otimes g'(g(b))\\ &= (f' \circ f)(a) \otimes (g' \circ g)(b)\\ &= \big((f' \circ f) \otimes (g' \circ g)\big)(a \otimes b),\end{aligned}$$

άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Λήμμα 17.1.15. *Αν ο $f : G \to H$ είναι ισομορφισμός ομάδων, τότε και η απεικόνιση $f^{-1} : H \to G$ είναι ισομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση f^{-1} είναι ομομορφισμός. Πράγματι

$$\begin{aligned}f^{-1}(a+b) &= f^{-1}(f(a') + f(b'))\\ &= f^{-1}(f(a'+b'))\\ &= a' + b' = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)\end{aligned}$$

□

Πρόταση 17.1.16. *Αν $A \overset{f}{\to} B \overset{g}{\to} C \to \{0\}$ είναι μια ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων και D αβελιανή ομάδα, τότε η ακολουθία*

$$D \otimes A \xrightarrow{1\otimes f} D \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} D \otimes C \to \{0\}$$

είναι ακριβής. (Με το σύμβολο $1 \otimes f$ εννοούμε τον ομομορφισμό $1 \otimes f : D \otimes A \to D \otimes B$, με $(1 \otimes f)(d \otimes a) = d \otimes f(a)$. Τα ίδια κατ' αναλογία ισχύουν και για το $1 \otimes g$).

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned}(1 \otimes g) \circ (1 \otimes f) &= 1 \otimes (g \circ f)\\ &= 1 \otimes \hat{0} = \hat{0},\end{aligned}$$

επομένως $E = \mathrm{Im}(1 \otimes f) \subseteq \mathrm{Ker}(1 \otimes g)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\tilde{g} : \frac{D \otimes B}{E} \to D \otimes C$ με $\tilde{g}\big((d \otimes b) + E\big) = d \otimes g(b)$, η οποία είναι

καλώς ορισμένη, γιατί

$$\begin{aligned}(d\otimes b)+E=(d'\otimes b')+E &\Rightarrow (d\otimes b)-(d'\otimes b')\in E\\ &\Rightarrow (1\otimes g)\big((d\otimes b)-(d'\otimes b')\big)=0\\ &\Rightarrow (d\otimes g(b))-(d'\otimes g(b')=0\\ &\Rightarrow \tilde{g}\big((d\otimes b)+E\big)=\tilde{g}\big((d'\otimes b')+E\big).\end{aligned}$$

Έστω $c\in C$, τότε, επειδή η g είναι επί έχουμε $c=g(b)$ για κάποιο $b\in B$. Άρα

$$\begin{aligned}b_1\in B\wedge g(b_1)=g(b)=c &\Rightarrow g(b_1-b)=0\\ &\Rightarrow b_1-b\in \operatorname{Ker} g=\operatorname{Im} f\\ &\Rightarrow b_1-b=f(a)\end{aligned}$$

για κάποιο $a\in A$. Επομένως

$$\begin{aligned}(d\otimes b_1)-(d\otimes b) &= d\otimes(b_1-b)\\ &= d\otimes f(a)\\ &= (1\otimes f)(d\otimes a)\in E,\end{aligned}$$

άρα η απεικόνιση $\phi : D\otimes C\to \frac{D\otimes B}{E}$, με $\phi(d,c)=(d\otimes b)+E$ είναι καλώς ορισμένη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι διγραμμική, επομένως (πρόταση 17.1.8) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\tilde{\phi} : D\otimes C\to \frac{D\otimes B}{E}$ με $\tilde{\phi}(d\otimes c)=(d\otimes b)+E$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(\tilde{g}\circ\tilde{\phi})(d\otimes c) &= \tilde{g}\big((d\otimes b)+E\big)\\ &= d\otimes g(b)=d\otimes c,\end{aligned}$$

άρα

$$\tilde{g}\circ\tilde{\phi}=i_{D\otimes C} \tag{17.3}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}\circ\tilde{g})\big((d\otimes b)+E\big) &= \tilde{\phi}\big(d\otimes g(b)\big)\\ &= \tilde{\phi}(d\otimes c)\\ &= (d\otimes b)+E,\end{aligned}$$

άρα

$$\tilde{\phi}\circ\tilde{g}=i_{\frac{D\otimes B}{E}} \tag{17.4}$$

Επομένως η $\tilde{\phi}$ είναι ισομορφισμός, άρα (λήμμα 17.1.15) και η αντίστροφή της, δηλαδή η $\tilde{g}$ είναι επίσης ισομορφισμός. Άρα, αν $q : D\otimes B\to \frac{D\otimes B}{E}$ είναι η φυσική προβολή, τότε

$(\tilde{g} \circ q)(d \otimes b) = \tilde{g}\big((d \otimes b) + E\big) = d \otimes g(b)$, άρα $\tilde{g} \circ q = 1 \otimes g$ και, επειδή ο $\tilde{g}$ είναι ισομορφισμός έχουμε $\operatorname{Ker}(\tilde{g} \circ q) = \operatorname{Ker} q$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(1 \otimes g) &= \operatorname{Ker}(\tilde{g} \circ q) \\ &= \operatorname{Ker} q = E \\ &= \operatorname{Im}(1 \otimes f), \end{aligned}$$

άρα το πρώτο από τα ζητούμενα αποδείχθηκε.
Μένει να αποδείξουμε ότι η $1 \otimes g$ είναι επί. Έστω ότι $\sum (d_i \otimes c_i) \in D \otimes C$. Επειδή η g είναι επί υπάρχουν b_i, ώστε $c_i = g(b_i)$. Επομένως

$$\begin{aligned} (1 \otimes g)\Big(\sum (d_i \otimes b_i)\Big) &= \sum \big(d_i \otimes g(b_i)\big) \\ &= \sum (d_i \otimes c_i), \end{aligned}$$

άρα η $1 \otimes g$ είναι επί. □

Παρατηρήσεις:

1. Η ακριβής ακολουθία ισχύει και για την περίπτωση που η ομάδα D είναι δεξιά στο τανυστικό γινόμενο, δηλαδή η ακολουθία

   $$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{1 \otimes g} C \otimes D \to \{0\}$$

   είναι ακριβής.

2. Όμως, αν η ακολουθία

   $$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\}$$

   είναι ακριβής, τότε η ακολουθία

   $$\{0\} \to D \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} D \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} D \otimes C \to \{0\} \tag{17.5}$$

   δεν είναι απαραίτητα ακριβής. Για παράδειγμα η ακολουθία

   $$\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \{0\}$$

   είναι ακριβής, αλλά η

   $$\{0\} \to \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes i} \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{1 \otimes p} \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \{0\}$$

   δεν είναι ακριβής, γιατί $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q} \simeq \{0\}$, ενώ $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$, άρα ο $1 \otimes i$ δεν είναι μονομορφισμός.
   Στην πρόταση που ακολουθεί μετά τα λήμματα θα δούμε μία ειδική περίπτωση, στην οποία η ακολουθία (17.5) είναι ακριβής.

Λήμμα 17.1.17. *Αν στην βραχεία ακριβή ακολουθία των αβελιανών ομάδων*

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\} \tag{17.6}$$

η ομάδα C είναι ελεύθερη, τότε η (17.6) διασπάται.

Απόδειξη: Επειδή η g είναι επί, από το λήμμα 15.2.10 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ομάδα $C' \simeq C$, ώστε $B \simeq \operatorname{Ker} g \oplus C'$. Αλλά η (17.6) είναι ακριβής, άρα $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, επομένως $B \simeq \operatorname{Im} f \oplus C$, άρα η (17.6) διασπάται. □

Λήμμα 17.1.18. *Αν η βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων*

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\} \tag{17.7}$$

διασπάται, τότε για οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα G η ακολουθία

$$\{0\} \to A \otimes G \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes G \to \{0\} \tag{17.8}$$

είναι βραχεία ακριβής.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η $f \otimes 1$ είναι 1-1. Επειδή η (17.7) διασπάται υπάρχει ομομορφισμός $h : B \to A$, ώστε $h \circ f = i_A$ (Λήμμα διάσπασης). Επομένως έχουμε $(h \otimes 1) \circ (f \otimes 1) = i_A \otimes 1 = i_{A\otimes G}$, άρα η $f \otimes 1$ είναι 1-1. □

Άμεση συνέπεια των δύο προηγουμένων λημμάτων είναι η επόμενη πρόταση

Πρόταση 17.1.19. *Αν στην βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων*

$$\{0\} \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \{0\} \tag{17.9}$$

η ομάδα C είναι ελεύθερη, τότε για οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα G η ακολουθία

$$\{0\} \to A \otimes G \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes G \to \{0\} \tag{17.10}$$

είναι βραχεία ακριβής.

Πρόταση 17.1.20. *Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε $\mathbb{Z}_n \otimes G \simeq G/nG$.*

Απόδειξη: Η ακολουθία

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \xrightarrow{r} \mathbb{Z}_n \to \{0\},$$

όπου $k(m) = nm$ και $r(m) = m \mod n$ είναι βραχεία ακριβής, επομένως ακριβής θα είναι και η ακολουθία

$$\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{k\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{r\otimes 1} \mathbb{Z}_n \otimes G \to \{0\}.$$

Από την απόδειξη της πρότασης 17.1.9 έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathbb{Z} \otimes G \to G$, με $f(m \otimes g) = mg$, ο οποίος έχει αντίστροφο τον ισομορφισμό $f^{-1} : G \to \mathbb{Z} \otimes G$, με $f^{-1}(g) = 1 \otimes g$. Άρα έχουμε το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}\otimes G & \xrightarrow{k\otimes 1} & \mathbb{Z}\otimes G & \xrightarrow{r\otimes 1} & \mathbb{Z}_n\otimes G & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow f & & \downarrow f & \nearrow R & & & \\ G & \xrightarrow{K} & G & & & & \end{array},$$

όπου $K = f\circ(k\otimes 1)\circ f^{-1}$ και $R = (r\otimes 1)\circ f^{-1}$. Είναι

$$\begin{aligned}(m\otimes g)\in\mathbb{Z}_n\otimes G &\Rightarrow \exists (l\otimes g')\in\mathbb{Z}\otimes G; m\otimes g = (r\otimes 1)(l\otimes g')\\ &\Rightarrow \exists z\in G; m\otimes g = \big((r\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(z) = R(z),\end{aligned}$$

άρα η R είναι επί. Επιπλέον

$$\begin{aligned} g\in \operatorname{Im} K &\Rightarrow \exists g'\in G; K(g') = g\\ &\Rightarrow \big(f\circ(k\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g') = g\\ &\Rightarrow R(g) = \big((r\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g)\\ &= \big((r\otimes 1)\circ f^{-1}\circ f\circ(k\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g')\\ &= \big((r\otimes 1)(k\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g')\\ &= (\hat{0}\circ f^{-1})(g') = 0\\ &\Rightarrow g\in \operatorname{Ker} R\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g\in \operatorname{Ker} R &\Rightarrow \big((r\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g) = 0\\ &\Rightarrow f^{-1}(g)\in \operatorname{Ker}(r\otimes 1)\\ &\Rightarrow f^{-1}(g)\in \operatorname{Im}(k\otimes 1)\\ &\Rightarrow \exists (m\otimes g')\in\mathbb{Z}\otimes G; f^{-1}(g) = (k\otimes 1)(m\otimes g')\\ &\Rightarrow f^{-1}(g) = (k\otimes 1)(f^{-1}(mg'))\\ &\Rightarrow g = \big(f\circ(k\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(mg')\\ &\Rightarrow g\in \operatorname{Im} K,\end{aligned}$$

επομένως

$$\operatorname{Im} K = \operatorname{Ker} R. \tag{17.11}$$

Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε

$$\mathbb{Z}_n\otimes G \simeq \mathbb{Z}\otimes G/\operatorname{Ker} R \simeq G/\operatorname{Im} K \simeq G/nG,$$

γιατί

$$\begin{aligned} K(g) &= \big(f\circ(k\otimes 1)\circ f^{-1}\big)(g)\\ &= \big(f\circ(k\otimes 1)\big)(1\otimes g)\\ &= f(n\otimes g) = ng\end{aligned}$$

□

Ορισμός 17.1.4. Έστω A αβελιανή ομάδα. Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to R \xrightarrow{f} F \xrightarrow{p} A \to \{0\}, \tag{17.12}$$

όπου F μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα ονομάζεται **ελεύθερη ανάλυση της** A.

Παρατήρηση: Η R είναι επίσης ελεύθερη, γιατί είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της F, την $f(R)$. Στην πρόταση 15.2.11 αποδείξαμε ότι κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας είναι επίσης ελεύθερη.

Παράδειγμα 17.1.1. Η ακολουθία

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_n \to 0,$$

όπου $f(a) = na$ και $p(a) = a \mod n$ είναι μια ελεύθερη ανάλυση της $\mathbb{Z}_n$.

Πρόταση 17.1.21. *Κάθε αβελιανή ομάδα A έχει ελεύθερη ανάλυση.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα F με βάση το σύνολο $\{z_a / a \in A\}$. Ακολούθως θεωρούμε τον ομομορφισμό $p : F \to A$, με $p\big(\sum \lambda_a z_a\big) = \sum \lambda_a a$, όπου το $\sum$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα, $a \in A$ και $\lambda_a \in \mathbb{Z}$. Προφανώς η p είναι επί. Επομένως η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to \operatorname{Ker} p \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to \{0\}$$

είναι μία ελεύθερη ανάλυση της A, την οποία ονομάζουμε **κανονική ελεύθερη ανάλυση** της A. □

Ορισμός 17.1.5. Έστωσαν A, B ελεύθερες αβελιανές ομάδες και

$$\{0\} \to R \xrightarrow{f} F \xrightarrow{p} A \to \{0\}$$

η κανονική ελεύθερη ανάλυση της A. Ονομάζουμε **ομάδα στρέψης του ζεύγους** (A, B), την οποία συμβολίζουμε με $Tor(A, B)$ τον πυρήνα του ομομορφισμού $f \otimes 1 : R \otimes B \to F \otimes B$, δηλαδή $Tor(A, B) = \operatorname{Ker}(f \otimes 1)$.

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό της ομάδας $\operatorname{Ker}(f \otimes 1)$ δεν βολεύει να εργαζόμαστε με την κανονική ελεύθερη ανάλυση της ομάδας A, γιατί η ελεύθερη ομάδα F είναι πολύ μεγάλη (η τάξη της είναι ίση με τον πληθάριθμο του A), επομένως κάνει τους υπολογισμούς μας αρκετά δύσκολους. Όμως αποδεικνύεται ότι, αν

$$\{0\} \to R' \xrightarrow{f'} F' \xrightarrow{p'} A \to \{0\}$$

είναι μια άλλη ελεύθερη ανάλυση της A, τότε $\operatorname{Ker}(f \otimes 1) \simeq \operatorname{Ker}(f' \otimes 1)$. Επομένως η ομάδα $Tor(A, B)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ελεύθερης ανάλυσης της A.

Κατ' αρχάς θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η ομάδα $Tor(A, B)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ελεύθερης ανάλυσης της ομάδας A.

Λήμμα 17.1.22. *Για κάθε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων* $f : A \to B$ *και για δύο οποιεσδήποτε ελεύθερες αναλύσεις*

$$\{0\} \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to \{0\}$$

$$\{0\} \to R' \xrightarrow{i'} F' \xrightarrow{p'} B \to \{0\}$$

υπάρχουν ομομορφισμοί $g : F \to F'$ *και* $h : R \to R'$, *τέτοιοι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f & & \\ \{0\} & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{i'} & F' & \xrightarrow{p'} & B & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη:

- Έστω $x_i, i \in I$ μια βάση της ελεύθερης αβελιανής ομάδας F. Επιλέγουμε $y_i \in F'$, ώστε $p'(y_i) = f(p(x_i))$. Η επιλογή αυτή είναι εφικτή, γιατί η p' είναι επί. Ακολούθως ορίζουμε $g(x_i) = y_i$ και επεκτείνουμε την g σε έναν ομομορφισμό $g : F \to F'$. Έχουμε $(p' \circ g)(x_i) = p'(y_i) = (f \circ p)(x_i)$ για κάθε x_i της βάσης, άρα $(p' \circ g)(x) = p'(y) = (f \circ p)(x)$ για κάθε $x \in F$, επομένως το δεξιό τετράγωνο είναι μεταθετικό.
- Για κάθε $r \in R$ έχουμε $(p' \circ g)(i(r)) = (f \circ p)(i(r)) = 0$, άρα $g(i(r)) \in \operatorname{Ker} p' = Im i'$, άρα υπάρχει $r' \in R$, ώστε $i'(r') = g(i(r))$. Ορίζουμε $h(r) = r' = (i')^{-1}\big(g(i(r))\big)$, επομένως $i' \circ h = g \circ i$. Άρα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό.

□

Λήμμα 17.1.23. *Αν* $g' : F \to F'$ *και* $h' : R \to R'$ *είναι δύο άλλοι ομομορφισμοί, όπως αυτοί του προηγούμενου λήμματος, τότε υπάρχει ομομορφισμός* $a : F \to R'$, *ώστε*

$$i' \circ a = g - g' \text{ και } a \circ i = h - h'.$$

Απόδειξη:

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & F \\ & & h \downarrow\downarrow h' & \swarrow a & g \downarrow\downarrow g' \\ \{0\} & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{i'} & F' \end{array}$$

Έστω $x \in F$. Έχουμε

$$\begin{aligned} p'(g(x) - g'(x)) &= (p' \circ g)(x) - (p' \circ g')(x) \\ &= (f \circ p)(x) - (f \circ p)(x) = 0, \end{aligned}$$

άρα $g(x) - g'(x) \in \operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} i'$, άρα υπάρχει $y \in R'$, ώστε $i'(y) = g(x) - g'(x)$. Ορίζουμε $a(x) = y = \big((i')^{-1} \circ (g - g')\big)(x)$, επομένως

$$i' \circ a = g - g'.$$

Επιπλέον $i' \circ h = g \circ i$ και $i' \circ h' = g' \circ i$, άρα $i' \circ (h - h') = (g - g') \circ i = i' \circ a \circ i$ και, επειδή η i' είναι 1-1 θα έχουμε

$$a \circ i = h - h'.$$

□

Λήμμα 17.1.24. *Αν D είναι μια αβελιανή ομάδα και τα υπόλοιπα σύμβολα όπως στα προηγούμενα λήμματα, τότε για τον ομομορφισμό $h \otimes 1 : R \otimes D \to R' \otimes D$ έχουμε*

$$(h \otimes 1)\big(\operatorname{Ker}(i \otimes 1)\big) \subseteq \operatorname{Ker}(i' \otimes 1).$$

Επιπλέον ο περιορισμός της $h \otimes 1$ στην ομάδα $\operatorname{Ker}(i \otimes 1)$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των g και h και εξαρτάται μόνον από την f.

Απόδειξη: Έστω $z \in \operatorname{Ker}(i \otimes 1)$, τότε

$$\begin{aligned}\big((i' \otimes 1) \circ (h \otimes 1)\big)(z) &= \big((i' \circ h) \otimes 1\big)(z) \\ &= \big((g \circ i) \otimes 1\big)(z) \\ &= \big((g \otimes 1) \circ (i \otimes 1)\big)(z) = 0,\end{aligned}$$

άρα $(h \otimes 1)(z) \in \operatorname{Ker}(i' \otimes 1)$, άρα

$$(h \otimes 1)\big(\operatorname{Ker}(i \otimes 1)\big) \subseteq \operatorname{Ker}(i' \otimes 1).$$

Έστω h' ένας άλλος ομομορφισμός με τις πιο πάνω ιδιότητες και $z \in \operatorname{Ker}(i \otimes 1)$, τότε

$$\begin{aligned}\big((h' \otimes 1)(z) - (h \otimes 1)(z)\big) &= \big((h' - h) \otimes 1\big)(z) \\ &= \big((a \circ i) \otimes 1\big)(z) \\ &= \big((a \otimes 1) \circ (i \otimes 1)\big)(z) = 0.\end{aligned}$$

Άρα

$$h' \otimes 1 / \operatorname{Ker}(i \otimes 1) = h \otimes 1 / \operatorname{Ker}(i \otimes 1).$$

□

Επομένως ο περιορισμός της $h \otimes 1$ στο $\operatorname{Ker}(i \otimes 1)$ είναι ανεξάρτητος από τους ομομορφισμούς h και g και εξαρτάται μόνον από τον ομομορφισμό f. Θα συμβολίζουμε τον περιορισμό αυτόν με $\phi(f, R \to F, R' \to F')$.
Ο στόχος μας είναι η πρόταση που ακολουθεί, η οποία είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου λήμματος

Πρόταση 17.1.25. *Αν $\{0\} \to R \to F \to A \to \{0\}$ είναι η κανονική ελεύθερη ανάλυση της A και $\{0\} \to R' \to F' \to A \to \{0\}$ μια οποιαδήποτε άλλη ελεύθερη ανάλυση της A, τότε ο ομομορφισμός*

$$\phi(i_A, R \to F, R' \to F') : \operatorname{Ker}(i \otimes 1) \to \operatorname{Ker}(i' \times 1)$$

είναι ισομορφισμός, δηλαδή $Tor(A, D) \simeq \mathrm{Ker}(i' \otimes 1)$.

Παρατήρηση: Όπως είδαμε στο τανυστικό γινόμενο η βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\{0\} \to A \to B \to C \to \{0\}$$

δίνει για την οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα D την ακολουθία

$$A \otimes D \to B \otimes D \to C \otimes D \to \{0\},$$

η οποία είναι δεξιά ακριβής. Η ακολουθία αυτή δεν είναι απαραίτητα βραχεία ακριβής. Με την αριστερή προσθήκη της ομάδας $Tor(A, D)$, όμως προκύπτει η βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$\{0\} \to Tor(A, D) \to A \otimes D \to B \otimes D \to C \otimes D \to \{0\}.$$

Αυτή είναι η "αιτία ύπαρξης" της ομάδας $Tor(A, D)$.

Ακολουθούν οι προτάσεις με τις ιδιότητες του γινομένου στέψης δύο αβελιανών ομάδων.

Πρόταση 17.1.26. *Αν* A, B *είναι αβελιανές ομάδες, τότε* $Tor(A, B) \simeq Tor(B, A)$.

Απόδειξη: Έστω $\{0\} \to F \to R \to B \to \{0\}$ μια ελεύθερη ανάλυση της B. Τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με τις οριζόντιες ακολουθίες του ακριβείς

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & Tor(A,B) & \xrightarrow{\lambda} & A \otimes F & \longrightarrow & A \otimes R & \longrightarrow & A \otimes B & \longrightarrow & \{0\} \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \phi & & \kappa \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & Tor(B,A) & \xrightarrow{\mu} & F \otimes A & \longrightarrow & R \otimes A & \longrightarrow & B \otimes A & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}.$$

Ορίζουμε τον ομομορφισμό $\phi : Tor(A, B) \to Tor(B, A)$, ως εξής:

$$\phi(z) = w \Leftrightarrow \kappa^{-1}(\mu(w)) = \lambda(z).$$

Από το λήμμα των πέντε ο ϕ είναι ισομορφισμός, άρα $Tor(A, B) \simeq Tor(B, A)$. □

Πρόταση 17.1.27. *Αν μία τουλάχιστον από τις αβελιανές ομάδες* A, B *είναι ελεύθερη, τότε* $Tor(A, B) \simeq \{0\}$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η A είναι ελεύθερη, τότε η

$$\{0\} \to \{0\} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{i_A} A \to \{0\}$$

είναι μία ελεύθερη ανάλυση της A. Επειδή η A είναι ελεύθερη (λήμμα 17.1.19) η ακολουθία

$$\{0\} \to \{0\} \xrightarrow{i \otimes 1} A \otimes B \xrightarrow{i_A \otimes 1} A \otimes B \to \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής, επομένως $Tor(A, B) \simeq \mathrm{Ker}(i \otimes 1) \simeq \{0\}$. □

Ισχύει και η πιο γενική

Πρόταση 17.1.28. *Αν μία τουλάχιστον από τις αβελιανές ομάδες* A, B *είναι ελεύθερη στρέψης, τότε* $Tor(A, B) \simeq \{0\}$.

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση. Για βοήθεια βλέπε [29] corollary 50.7 □

Για παράδειγμα: $Tor(A, \mathbb{Z}) \simeq Tor(A, \mathbb{Q}) \simeq Tor(A, \mathbb{R}) \simeq \{0\}$.

Πρόταση 17.1.29. *Αν* A *είναι αβελιανή ομάδα και* $n \geq 2$, *τότε* $Tor(A, \mathbb{Z}_n) = A[n] = \{a \in A / na = 0\}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακόλουθη ελεύθερη ανάλυση της $\mathbb{Z}_n$:

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \to \{0\},$$

όπου $f(x) = nx$ και $g(x) = x \mod (n)$.
Η παραπάνω ακριβής ακολουθία δίνει την

$$\mathbb{Z} \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes A \xrightarrow{g \otimes 1} \mathbb{Z}_n \otimes A \to \{0\}.$$

Από τον ορισμό της ομάδας Tor έχουμε $Tor(\mathbb{Z}_n, A) = \text{Ker}(f \otimes 1)$. Όμως $\mathbb{Z} \otimes A \simeq A$, μέσω του ισομορφισμού $h : \mathbb{Z} \otimes A \to A$, με $h(1 \otimes d) = d$. Επομένως

$$h\big((f \otimes 1)(1 \otimes d)\big) = h(f(1) \otimes d)$$
$$h(n \otimes d) = nd.$$

Άρα $\text{Ker}(f \otimes 1) \simeq \text{Ker}\left(h \circ (f \otimes 1)\right)$ και $d \in \text{Ker}\left(h \circ (f \otimes 1)\right) \Leftrightarrow nd = 0$. Συνεπώς

$$Tor(\mathbb{Z}_n, A) \simeq A[n] = \{d \in A / nd = 0\}.$$

□

Παρατήρηση: Η προηγούμενη πρόταση αιτιολογεί την ονομασία της ομάδας Tor, ως γινομένου στρέψης αβελιανών ομάδων.

Πρόταση 17.1.30. $Tor\big(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\big) \simeq \bigoplus_{i\in I} Tor(A_i, B)$ *και* $Tor\big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\big) \simeq \bigoplus_{i\in I} Tor(A, B_i)$.

Απόδειξη: Αν

$$\{0\} \to F_i \to R_i \to A_i \to \{0\}$$

είναι μια ελεύθερη ανάλυση της A_i, τότε η

$$\{0\} \to \bigoplus_{i\in I} F_i \to \bigoplus_{i\in I} R_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i \to \{0\}$$

είναι μια ελεύθερη ανάλυση της $\bigoplus_{i\in I} A_i$. Άρα

$$\begin{aligned} Tor\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\Big) &= \text{Ker}\Big(\bigoplus_{i\in I} F_i \otimes B \to \bigoplus_{i\in I} R_i \otimes B\Big) \\ &\simeq \bigoplus_{i\in I} \text{Ker}\big(F_i \otimes B \to R_i \otimes B\big) \\ &\simeq \bigoplus_{i\in I} Tor(A_i, B). \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση. □

Ορισμός 17.1.6. Έστωσαν το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $A = (A_n, \partial_n)$, με $n \geq 0$ και $\partial_0 = \hat{0}$ και η αβελιανή ομάδα G, τότε το $A \otimes G = (A_n \otimes G, \partial_n \otimes 1)$, $n \geq 0$ είναι επίσης ένα σύμπλεγμα, γιατί

$$(\partial_n \otimes 1) \circ (\partial_{n+1} \otimes 1) = (\partial_n \circ \partial_{n+1}) \otimes 1 = \hat{0} \otimes 1 = \hat{0}.$$

Το σύμπλεγμα $A \otimes G$ ονομάζεται **σύμπλεγμα** A **με συντελεστές από την ομάδα** G. Για το σύμπλεγμα $A \otimes G$ έχουμε τα εξής:

- Η υποομάδα $Z_n(A \otimes G)$ της ομάδας $A_n \otimes G$ έχει ως στοιχεία τα στοιχεία $z \otimes g$ της $A_n \otimes G$, για τα οποία ισχύει $(\partial_n \otimes 1)(z \otimes g) = \partial_n(z) \otimes g = 0$.
- Η υποομάδα $B_n(A \otimes G)$ της ομάδας $Z_n(A \otimes G)$ έχει ως στοιχεία τα στοιχεία $z \otimes g$ της $Z_n(A \otimes G)$, για τα οποία υπάρχει $w \otimes g \in A_{n+1} \otimes G$, ώστε $(\partial_{n+1} \otimes 1)(w \otimes g) = \partial_{n+1}(w) \otimes g = z \otimes g$ και τέλος
- Η ομάδα $H_n(A \otimes G)$ είναι η ομάδα πηλίκο $\frac{Z_n(A \otimes G)}{B_n(A \otimes G)}$.

Το θεώρημα των καθολικών συντελεστών που ακολουθεί δείχνει πως "παίρνουμε" την $H_n(C \otimes G)$ από την $H_n(C)$.

Πρόταση 17.1.31. ***(Καθολικό Θεώρημα συντελεστών)*** *Έστω $C = (C_n, \partial_n)$, με $n \geq 0$ και $\partial_0 = \hat{0}$ ένα σύμπλεγμα ελεύθερων αβελιανών ομάδων και G μια αβελιανή ομάδα. Τότε για κάθε $n \geq 0$ υπάρχει ακολουθία*

$$\{0\} \to H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G) \to Tor(H_{n-1}(C), G) \to \{0\},$$

η οποία είναι βραχεία ακριβής και διασπάται, δηλαδή

$$H_n(C \otimes G) \simeq H_n(C) \otimes G \oplus Tor(H_{n-1}(C), G). \tag{17.13}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η ακολουθία Από τον ορισμό του συμπλέγματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβής και διασπώμενη ακολουθία

$$\{0\} \to Z_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{\partial'_n} B_{n-1} \to \{0\},$$

όπου i_n είναι ο ομομορφισμός της ένθεσης και ∂'_n είναι ο ομορφισμός που απεικονίζει την άλυσίδα α στο σύνορό της που ανήκει στην ομάδα $B_{n-1}(C)$. [2] Επειδή οι ομάδες B_{n-1} είναι ελεύθερες θα είναι ακριβής και διασπώμενη και η ακολουθία

$$\{0\} \to Z_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes 1} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial'_n \otimes 1} B_{n-1} \otimes G \to \{0\}. \tag{17.14}$$

Αν $j_{n-1} : B_{n-1} \to C_{n-1}$ είναι η ένθεση, τότε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ & \searrow^{\partial'_n} & \uparrow j_{n-1} \\ & & B_{n-1} \end{array}$$

[2] Εφεξής, για λόγους συντομίας αντί για $Z_n(C)$ και $B_n(C)$ θα γράφουμε Z_n και B_n, αντιστοίχως

είναι μεταθετικό, δηλαδή $\partial_n = j_{n-1} \circ \partial'_n$.
Θεωρούμε το σύμπλεγμα Z, του οποίου ο n-οστός όρος είναι ο Z_n και έχει ως συνοριακούς ομομορφισμούς τους περιορισμούς του ∂_n στην Z_n, οι οποίοι είναι μηδενικοί, άρα και οι συνοριακοί ομομορφισμοί του συμπλέγματος $Z_n \otimes G$ είναι επίσης μηδενικοί, άρα $H_n(Z \otimes G) \simeq Z_n \otimes G$. Επιπλέον θεωρούμε το σύμπλεγμα B^+, το οποίο έχει ως n-οστό όρο την ομάδα B_{n-1} και συνοριακούς ομομορφισμούς τους περιορισμούς του ∂_n στην ομάδα B_{n-1}, οι οποίοι είναι μηδενικοί, συνεπώς και οι συνοριακοί ομομορφισμοί του συμπλέγματος $B_{n-1} \otimes G$ είναι μηδενικοί, άρα $H_n(B^+ \otimes G) \simeq B_{n-1} \otimes G$.
Από το θεώρημα ακριβούς τριγώνου και την (17.13) παίρνουμε την επόμενη ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to H_{n+1}(B^+ \otimes G) \xrightarrow{D_{n+1}} H_n(Z \otimes G) \xrightarrow{(i_n \otimes 1)_*} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(d \otimes 1)_*} H_n(B^+ \otimes G) \xrightarrow{D_n} H_n(Z \otimes G) \to \cdots,$$

η οποία, λόγω των παρατηρήσεων που προηγήθηκαν γίνεται

$$\cdots \to B_n \otimes G \xrightarrow{D_{n+1}} Z_n \otimes G \xrightarrow{(i_n \otimes 1)_*} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(d \otimes 1)_*} B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{D_n} Z_{n-1} \otimes G \to \cdots.$$

Επομένως για κάθε n έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \tfrac{Z_n \otimes G}{\mathrm{Ker}(i_n \otimes 1)_*} \to H_n(C \otimes G) \to \mathrm{Im}(d \otimes 1)_* \to \{0\},$$

και, επειδή $\mathrm{Ker}(i_n \otimes 1)_* = \mathrm{Im}\, D_{n+1}$ και $\mathrm{Im}(d \otimes 1)_* = \mathrm{Ker}\, D_n$ θα έχουμε την επόμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \frac{Z_n \otimes G}{\mathrm{Im}\, D_{n+1}} \to H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(d \otimes 1)_*} \mathrm{Ker}\, D_n \to \{0\} \tag{17.15}$$

Αν $b_{n-1} \otimes g$ είναι ένας γεννήτορας της ομάδας $B_{n-1} \otimes G$, τότε για τους ομομορφισμούς D_n έχουμε

$$\begin{aligned} D_n(b_{n-1} \otimes g) &= \big[(i \otimes 1)^{-1} \circ (\partial \otimes 1) \circ (d \otimes 1)^{-1}\big](b_{n-1} \otimes g) \\ &= b_{n-1} \otimes g. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C_n \otimes G & \xrightarrow{d \otimes 1} & B_{n-1} \otimes G \longrightarrow \{0\} \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial \otimes 1} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{i \otimes 1} & C_{n-1} \otimes G & & \end{array}$$

Άρα $D_n = j_{n-1} \otimes 1$, όπου j_{n-1} είναι η ένθεση της B_{n-1} στην Z_{n-1}. Επομένως η ακριβής ακολουθία (17.15) μετασχηματίζεται στην ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \frac{Z_n \otimes G}{\mathrm{Im}(j_n \otimes 1)} \xrightarrow{\phi} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(d \otimes 1)_*} \mathrm{Ker}(j_{n-1} \otimes 1) \to \{0\} \tag{17.16}$$

Από τον ορισμό της ομολογίας έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to B_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1}} Z_{n-1} \to H_{n-1}(C) \to \{0\},$$

η οποία είναι μια ελεύθερη ανάλυση της ομάδας $H_{n-1}(C)$. Επιπλέον έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \operatorname{Ker}(j_{n-1} \otimes 1) \to B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{j_{n-1}\otimes 1} Z_{n-1} \otimes G \to H_{n-1} \otimes G \to \{0\}.$$

Επομένως, από τον ορισμό της ομάδας Tor έχουμε ότι $Tor(H_{n-1}(C), G) = \operatorname{Ker}(j_{n-1} \otimes 1)$. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι $\frac{Z_n \otimes G}{\operatorname{Im}(j_n \otimes 1)} = H_n(C) \otimes G$ η (17.16) δίνει την επόμενη ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to H_n(C) \otimes G \to H_n(C \otimes G) \to Tor(H_{n-1}(C), G) \to \{0\}, \tag{17.17}$$

το οποίο είναι το πρώτο ζητούμενο.
Στο επόμενο βήμα θα δείξουμε ότι η (17.17) ή η ισοδύναμή της (17.16) διασπάται. Έχουμε ότι η ομάδα $Z_n \otimes G$ είναι ένας ευθύς προσθετέος της ομάδας $C_n \otimes G$, επειδή η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to Z_n \otimes G \to C_n \otimes G \to B_{n-1} \otimes G \to \{0\} \tag{17.18}$$

διασπάται. Επομένως η $Z_n \otimes G$ είναι ευθύς προσθετέος της ομάδας $\operatorname{Ker}(\partial_n \otimes 1)$, άρα η ομάδα $\frac{Z_n \otimes G}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)}$ είναι ευθύς προσθετέος της ομάδας $\frac{\operatorname{Ker}(\partial_n \otimes 1)}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)} \simeq H_n(C \otimes G)$. Για πρακτικούς λόγους θέτουμε $\frac{Z_n \otimes G}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)} = K$, $H_n(C \otimes C) = L$ και $\operatorname{Ker}(j_{n-1} \otimes 1) = M$. Έχουμε ότι η ακολουθία

$$\{0\} \to K \xrightarrow{\phi} L \xrightarrow{h} M \to \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής. Επιπλέον έχουμε ότι $L \simeq K \oplus R$. Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε

$$\begin{aligned} L/\operatorname{Ker} h \simeq M &\Rightarrow L/\operatorname{Im} \phi \simeq M \\ &\Rightarrow L/K \simeq M \\ &\Rightarrow \frac{K \oplus R}{K} \simeq M \\ &\Rightarrow R \simeq M, \end{aligned}$$

επομένως ο άλλος προσθετέος (R) είναι ο M, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Άμεσες συνέπειες του Καθολικού θεωρήματος συντελεστών είναι τα:

- Αν η αβελιανή ομάδα G είναι ελεύθερη στρέψης, τότε

$$H_n(X; G) \simeq H_n(X) \otimes G.$$

- $H_n(X; \mathbb{Z}_m) \simeq H_n(X) \otimes \mathbb{Z}_m \oplus H_m(X)[m]$.

17.2 Ομολογία Τοπολογικών χώρων με συντελεστές

Ορισμός 17.2.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και G μια αβελιανή ομάδα. Θεωρούμε το σύμπλεγμα $(C_n(X)\otimes G, \partial_n\otimes 1)$, $n\geq 0$, με $\partial_0=\hat{0}$. Η ομολογία του συμπλέγματος αυτού ονομάζεται **ιδιάζουσα ομολογία του χώρου** X **με συντελεστές από την ομάδα** G και η n-οστή της ομάδα συμβολίζεται με $H_n(X;G)$. Επομένως $H_n(X;G)=\frac{\mathrm{Ker}(\partial_n\otimes 1)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1}\otimes 1)}$.

Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, εφαρμόζοντας το καθολικό θεώρημα συντελεστών για $A=(C_n(X),\partial_n)$ έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 17.2.1. *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και G μια αβελιανή ομάδα, τότε*

$$H_n(X;G)\simeq H_n(X)\otimes G\oplus Tor(H_{n-1}(X),G) \tag{17.19}$$

Παραδείγματα 17.2.1.

1. Αν $G=\mathbb{Q}$ ή $G=\mathbb{R}$ ή $G=\mathbb{C}$, τότε, επειδή οι προσθετικές ομάδες $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ είναι ελεύθερες στρέψης θα έχουμε $Tor(H_{n-1}(X),G)\simeq\{0\}$, άρα, από την (17.19) έχουμε $H_n(X;G)=H_n(X)\otimes G$ για κάθε $n\geq 0$.

2. Για τον χώρο $X=\{x\}$ έχουμε $H_n(X)\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \{0\}, & n\neq 0\end{cases}$, επομένως $H_{n-1}(X)\simeq\{0\}$ ή $H_{n-1}(X)=\mathbb{Z}$, άρα $Tor(H_{n-1}(X),G)\simeq\{0\}$, άρα , από την (17.19) έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(X;G) &\simeq H_n(X)\otimes G \\ &\simeq \begin{cases} G, & n=0\\ \{0\}, & n\neq 0\end{cases}. \end{aligned}$$

3. Για τον χώρο $\mathbb{S}^n$ έχουμε $H_q(\mathbb{S}^n)\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,n\\ \{0\}, & q\neq 0,n\end{cases}$, επομένως $H_{q-1}(\mathbb{S}^n)\simeq\{0\}$ ή $H_{q-1}(\mathbb{S}^n)=\mathbb{Z}$, άρα $Tor(H_{q-1}(\mathbb{S}^n),G)\simeq\{0\}$, άρα , από την (17.19) έχουμε

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{S}^n;G) &\simeq H_q(\mathbb{S}^n)\otimes G \\ &\simeq \begin{cases} G, & q=0,n\\ \{0\}, & q\neq 0,n\end{cases}. \end{aligned}$$

4. Για την λωρίδα του Moebius έχουμε $H_n(\mathbb{M})\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0,1\\ \{0\}, & n\neq 0,1\end{cases}$, επομένως $H_{n-1}(\mathbb{M})\simeq\{0\}$ ή $H_{n-1}(\mathbb{M})=\mathbb{Z}$, άρα $Tor(H_{n-1}(\mathbb{M}),G)\simeq\{0\}$, άρα , από την (17.19) έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{M};G) &\simeq H_n(\mathbb{M})\otimes G \\ &\simeq \begin{cases} G, & n=0,1\\ \{0\}, & n\neq 0,1\end{cases}. \end{aligned}$$

5. Για την σπείρα έχουμε $H_n(\mathbb{T}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 0, 1, 2 \end{cases}$, επομένως $H_{n-1}(\mathbb{T}) \simeq \{0\}$ ή $H_{n-1}(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$, ή $H_{n-1}(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ άρα $Tor(H_{n-1}(\mathbb{T}), G) \simeq \{0\}$, άρα , από την (17.19) έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{T}; G) &\simeq H_n(\mathbb{T}) \otimes G \\ &\simeq \begin{cases} G, & n = 0, 2 \\ G \oplus G, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 0, 1, 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

6. Για την μποτίλια του Klein έχουμε $H_n(\mathbb{K}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 0, 1 \end{cases}$, επομένως

- Για $n > 2$ έχουμε $H_{n-1}(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$, άρα $Tor(H_{n-1}(\mathbb{K}), G) \simeq \{0\}$ επομένως $H_n(\mathbb{K}; G) \simeq H_n(\mathbb{K}) \otimes G \simeq \{0\}$.
- Για $n = 2$ έχουμε $H_{n-1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, άρα

$$\begin{aligned} Tor(H_{n-1}(\mathbb{K}), G) &\simeq Tor(\mathbb{Z}_2, G) \oplus Tor(\mathbb{Z}, G) \\ &\simeq G[2] \end{aligned}$$

  και $H_n(\mathbb{K}) \otimes G \simeq \{0\}$, επομένως $H_n(\mathbb{K}; G) \simeq G[2]$.
- Για $n = 1$ έχουμε $H_{n-1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{Z}$, άρα $Tor(H_{n-1}(\mathbb{K}, G) \simeq \{0\}$, επομένως

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{K}; G) &\simeq H_n(\mathbb{K}) \otimes G \\ &\simeq (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}) \otimes G \\ &\simeq G/2G \oplus G. \end{aligned}$$

- Για $n = 0$ έχουμε $H_{n-1}(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$, άρα $Tor(H_{n-1}(\mathbb{K}), G) \simeq \{0\}$, επομένως

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{K}; G) &\simeq H_n(\mathbb{K}) \otimes G \\ &\simeq \mathbb{Z} \otimes G \simeq G. \end{aligned}$$

7. Για το προβολικό επίπεδο έχουμε $H_n(P\mathbb{R}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & n = 1 \\ \{0\}, & n \neq 0, 1 \end{cases}$, επομένως

-

$$\begin{aligned} H_0(P\mathbb{R}^2; G) &\simeq H_0(P\mathbb{R}^2) \otimes G \oplus Tor(H_{-1}(P\mathbb{R}^2), G) \\ &\simeq \mathbb{Z} \otimes G \oplus Tor(\{0\}, G) \\ &\simeq G \oplus \{0\} \simeq G. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_1(P\mathbb{R}^2; G) &\simeq H_1(P\mathbb{R}^2) \otimes G \oplus Tor(H_0(P\mathbb{R}^2), G) \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \otimes G \oplus Tor(\mathbb{Z}, G) \\ &\simeq G/2G \oplus \{0\} \simeq G/2G. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H_2(P\mathbb{R}^2; G) &\simeq H_2(P\mathbb{R}^2) \otimes G \oplus Tor(H_1(P\mathbb{R}^2), G) \\ &\simeq \{0\} \otimes G \oplus Tor(\mathbb{Z}_2, G) \\ &\simeq \{0\} \oplus G[2] \simeq G[2]. \end{aligned}$$

- Για $n > 2$ έχουμε $H_n(P\mathbb{R}^2; G) \simeq \{0\}$.

17.3 Σχετική ομολογία με συντελεστές

Ορισμός 17.3.1. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος και $C_n((X, A), \partial_n)$, $n \geq 0$ το σύμπλεγμα των σχετικών αλυσίδων. Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε, όπως είδαμε και στα προηγούμενα, το $(C_n(X, A) \otimes G, \partial_n \otimes 1)$, $n \geq 0$ είναι επίσης σύμπλεγμα. Η ομολογία του δευτέρου συμπλέγματος ονομάζεται **σχετική ομολογία του** $X \mod A$, **με συντελεστές από την ομάδα** G και συμβολίζεται με $H(X, A; G) = \{H_n(X, A; G),\ n \geq 0\}$.

Για την σχετική ομολογία με συντελεστές ισχύουν προτάσεις αντίστοιχες των προτάσεων 15.5.6, 15.6.7, 15.6.11, που ισχύουν και για την ακέραια σχετική ομολογία.

Λήμμα 17.3.1. *Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Η αβελιανή ομάδα $C_n(X, A)$ είναι ελεύθερη για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη: Έστω $\langle\gamma\rangle \in C_n(X, A)$, τότε υπάρχουν $\sigma_1, ..., \sigma_n \in S_n(X)$, ώστε $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Άρα

$$\begin{aligned} \langle\gamma\rangle &= \gamma + C_n(A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sigma_i + C_n(A)) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_{i_k}(\sigma_{i_k} + C_n(A)), \end{aligned}$$

όπου $\{i_1, ..., i_m\} \subseteq \{1, ..., n\}$, ώστε $\sigma_{i_j}(\Delta^n) \nsubseteq A$ για κάθε $j = 1, ..., m$. Επομένως το σύνολο $S' = \{\sigma \in S_n(X) / \sigma(\Delta^n) \nsubseteq A\}$ παράγει την ομάδα $C_n(X, A)$. Πρέπει να δείξουμε

και την γραμμική ανεξαρτησία του S'. Έστω ότι $\sigma_1, ..., \sigma_n \in S'$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Τότε η $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i + C_n(A) = \langle 0 \rangle$ συνεπάγει την $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i \in C_n(A)$. Επομένως υπάρχουν $\mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{Z}$ και $\tau_1, ..., \tau_m \in S_n(A) \subseteq S_n(X)$, ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \tau_j$ άρα $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i + \sum_{j=1}^{m} (-\mu_j)\tau_j = 0$, άρα $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, το οποίο είναι το ζητούμενο. Συνεπώς το σύνολο S' είναι μια βάση της ομάδας $C_n(X, A)$, άρα η ομάδα είναι ελεύθερη. □

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, επειδή για κάθε n η ακολουθία

$$\{0\} \to C_n(A) \xrightarrow{i_\diamond^n} C_n(X) \xrightarrow{p_n} C_n(X, A) \to \{0\} \tag{17.20}$$

είναι βραχεία ακριβής, τότε βραχεία ακριβής θα είναι και η ακολουθία

$$\{0\} \to C_n(A) \otimes G \xrightarrow{i_\diamond^n \otimes 1} C_n(X) \otimes G \xrightarrow{p_n \otimes 1} C_n(X, A) \otimes G \to \{0\}, \tag{17.21}$$

όπου G είναι μια αβελιανή ομάδα. Επομένως από το θεώρημα ακριβούς τριγώνου (πρόταση 15.2.20) συμπεραίνουμε την ισχύ της επόμενης πρότασης

Πρόταση 17.3.2. ***(Θεώρημα ακριβούς τριγώνου για τη σχετική ομολογία με συντελεστές)*** *Για το οποιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος (X, A), για κάθε n και για κάθε αβελιανή ομάδα G υπάρχει συνδετικός ομομορφισμός d_n, ώστε η παρακάτω ακολουθία*

$$\cdots \to H_n(A; G) \xrightarrow{(i_\diamond^n \otimes 1)_*} H_n(X; G) \xrightarrow{(p_\diamond)^n \otimes 1)_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A; G)$$
$$\xrightarrow{(i_\diamond^{n-1} \otimes 1)_*} H_{n-1}(X; G) \to \cdots$$

να είναι ακριβής.

Αν (X, A) και (Y, B) είναι τοπολογικά ζεύγη, τότε οι παρακάτω ακολουθίες

$$0 \to C_n(A) \otimes G \xrightarrow{i_\diamond^n \otimes 1} C_n(X) \otimes G \xrightarrow{p_n \otimes 1} C_n(X, A) \otimes G \to 0$$

και

$$0 \to C_n(B) \otimes G \xrightarrow{j_\diamond^n \otimes 1} C_n(Y) \otimes G \xrightarrow{q_n \otimes 1} C_n(Y, B) \otimes G \to 0$$

είναι βραχείες ακριβείς .
Αν $f : (X, A) \to (Y, B)$ μια απεικόνιση ζευγών, τότε, με μια απλή επαλήθευση αποδεικνύεται ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_n(A) \otimes G & \xrightarrow{i_\diamond^n \otimes 1} & C_n(X) \otimes G & \xrightarrow{p_n \otimes 1} & C_n(X, A) \otimes G & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow{\scriptstyle (f/A)_\diamond^n \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_\diamond^n \otimes 1} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & C_n(B) \otimes G & \xrightarrow{j_\diamond^n \otimes 1} & C_n(Y) \otimes G & \xrightarrow{q_n \otimes 1} & C_n(Y, B) \otimes G & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Άρα από την πρόταση 15.2.21, συμπεραίνουμε την αλήθεια της ακόλουθης πρότασης

Πρόταση 17.3.3. *Αν η $f : (X, A) \to (Y, B)$ είναι απεικόνιση ζευγών, τότε το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(A;G) & \xrightarrow{(i^n_\diamond \otimes 1)_*} & H_n(X;G) & \xrightarrow{(p^n_\diamond \otimes 1)_*} & H_n(X,A;G) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(A;G) & \xrightarrow{(i^{n-1}_\diamond \otimes 1)_*} & H_{n-1}(X;G) \\
\downarrow{\scriptstyle ((f/A)^n_\diamond \otimes 1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f^n_\diamond \otimes 1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f^n_\diamond \otimes 1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle ((f/A)^{n-1}_\diamond \otimes 1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f^{n-1}_\diamond \otimes 1)_*} \\
H_n(B;G) & \xrightarrow{(j^n_\diamond \otimes 1)_*} & H_n(Y;G) & \xrightarrow{(q^n_\diamond \otimes 1)_*} & H_n(Y,B;G) & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(B;G) & \xrightarrow{(j^{n-1}_\diamond \otimes 1)_*} & H_{n-1}(X;G)
\end{array}$$

είναι μεταθετικό, με τις οριζόντιες γραμμές του ακριβείς.

Επειδή οι ομάδες του συμπλέγματος $(C_n(X, A), \partial_n)$, $n \geq 0$ είναι ελεύθερες μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 17.1.31 (Καθολικό θεώρημα συντελεστών). Επομένως συμπεραίνουμε:

Πρόταση 17.3.4. *Αν (X, A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και G μια αβελιανή ομάδα, τότε*

$$H_n(X, A; G) \simeq H_n(X, A) \otimes G \oplus Tor(H_{n-1}(X, A), G).$$

Στο κεφάλαιο 16 παραθέσαμε χωρίς απόδειξη την πρόταση 16.2.7. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της παραπάνω πρότασης.
Έστω $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ συνεχής απεικόνιση με $\deg(f) = n$ και G αβελιανή ομάδα. Θεωρούμε την απεικόνιση $f^G_* : H_n(\mathbb{S}^n; G) \simeq H_n(\mathbb{S}^n) \otimes G \to H_n(\mathbb{S}^n; G) \simeq H_n(\mathbb{S}^n) \otimes G$, με $f^G_*([a] \otimes g) = (f_* \otimes 1)([a] \otimes g) = f_*([a]) \otimes g$.

Λήμμα 17.3.5. *Αν $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ συνεχής απεικόνιση βαθμού n, και G αβελιανή ομάδα, τότε $f^G_*\big(n([a] \otimes g)\big) = n([a] \otimes g)$. Δηλαδή ο ομομορφισμός που επάγει στην ομολογία με συντελεστές από μια αβελιανή ομάδα G μια σφαιρική απεικόνιση βαθμού n είναι πολλαπλασιασμός επί n.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
f^G_*\big(n([a] \otimes g)\big) &= f^G_*\big([na] \otimes g\big) = (f_* \otimes 1)([na] \otimes g) \\
&= f_*([na]) \otimes g = n f_*([a]) \otimes g \\
&= n(f_* \otimes 1)([a] \otimes g) = n f^G_*\big([a] \otimes g\big).
\end{aligned}$$

□

Το παραπάνω λήμμα δείχνει το πόσο αποτελεσματικό είναι για τους υπολογισμούς μας να "πάμε" σε ομολογία με συντελεστές. Γιατί στην περίπτωση που επιλέξουμε ως ομάδα G την $\mathbb{Z}_2$ θα έχουμε μόνον δύο ομομορφισμούς.

- Για $n = 2k$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
f^{\mathbb{Z}_2}_*\big([a] \otimes 1\big) &= 2k\big([a] \otimes [1]\big) \\
&= [a] \otimes (2k[1]) \\
&= [a] \otimes [0] = [0]
\end{aligned}$$

  και

- Για $n = 2k + 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_*^{\mathbb{Z}_2}\big([a] \otimes 1\big) &= (2k+1)\big([a] \otimes [1]\big) \\ &= [a] \otimes ((2k+1)[1]) \\ &= [a] \otimes [1]. \end{aligned}$$

Επομένως ο ομομορφισμός $f_*^{\mathbb{Z}_2}$ είναι ή ο μηδενικός ή ο ταυτοτικός.

Άμεση συνέπεια της πιο πάνω παρατήρησης είναι το επόμενο λήμμα

Λήμμα 17.3.6. *Ο $f_*^{\mathbb{Z}_2}$ είναι ισομορφισμός, αν και μόνον, αν ο βαθμός της f είναι περιττός.*

Παρατήρηση: Ο ισημερινός $\mathbb{S}^{n-1}$ της $\mathbb{S}^n$ είναι συστολή παραμόρφωσης του ανοικτού υποσυνόλου $A = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n / -\frac{1}{2} < x_{n+1} < \frac{1}{2}\}$ της $\mathbb{S}^n$ (Η απόδειξη του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση). Επομένως το ζεύγος $(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ είναι ένα καλό ζεύγος, άρα $H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1})$ και, επειδή $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) &\simeq \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n) \\ &\simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια $H_{q-1}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \{0\}$ ή $H_{q-1}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, άρα $Tor(H_{q-1}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}), G) \simeq \{0\}$, επομένως από το καθολικό θεώρημα συντελεστών έχουμε

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}; G) &\simeq H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \otimes G \\ &\simeq \begin{cases} G \oplus G, & q = n \\ \{0\}, & q \neq n \end{cases}. \end{aligned}$$

Λήμμα 17.3.7. *Αν A, B και G είναι αβελιανές ομάδες και ο $f : A \to B$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε και ο $f \otimes 1 : A \otimes G \to B \otimes G$, με $(f \otimes 1)(a \otimes g) = f(a) \otimes g$ είναι επίσης ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (f \otimes 1) \circ (f^{-1} \otimes 1) &= (f \circ f^{-1}) \otimes 1 \\ &= i_B \otimes 1 = i_{B \otimes G} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (f^{-1} \otimes 1) \circ (f \otimes 1) &= (f^{-1} \circ f) \otimes 1 \\ &= i_A \otimes 1 = i_{A \otimes G}, \end{aligned}$$

άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Λήμμα 17.3.8. *Έστω $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $n > 1$ μια συνεχής απεικόνιση, η οποία διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_* : H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ ή είναι μηδενικός ή είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $f_* \neq \hat{0}$. Αποδείξαμε ότι $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_n(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n)$ για κάθε $n > 1$. Επομένως η $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με δύο γεννήτορες. Έχουμε $\mathbb{S}^n_- \cong \mathbb{S}^n_+ \cong \mathbb{D}^n \cong \Delta^n$. Έστω $\sigma^+ : \Delta^n \to \mathbb{S}^n_+$ ένας ομοιομορφισμός, για τον οποίον ισχύει $\sigma^+(\Delta^n) = \mathbb{S}^n_+$ και $\sigma^+(\Delta^{n-1}) \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Τότε ο σ^+ είναι ένας κύκλος στην ομάδα $C_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Ομοίως αν $\sigma^- : \Delta^n \to \mathbb{S}^n_-$ ένας ομοιομορφισμός, για τον οποίον ισχύει $\sigma^-(\Delta^n) = \mathbb{S}^n_-$ και $\sigma^-(\Delta^{n-1}) \cong \mathbb{S}^{n-1}$, τότε ο σ^- είναι ένας κύκλος στην ομάδα $C_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Το ζεύγος $[\sigma^+], [\sigma^-]$ είναι ένα ζεύγος γεννητόρων της $H_n(\mathbb{S}^n \bigvee \mathbb{S}^n)$, άρα και της $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Επιπλέον $\mathrm{a}_*([\sigma^+]) = [\sigma^-]$ και $\mathrm{a}_*([\sigma^-]) = [\sigma^+]$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $f \circ \mathrm{a} = \mathrm{a} \circ f$, άρα $f_* \circ \mathrm{a}_* = \mathrm{a}_* \circ f_*$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_*([\sigma^+]) = [0] &\Rightarrow f_*(\mathrm{a}_*[(\sigma^-])) = [0] \\ &\Rightarrow \mathrm{a}_*(f_*(\sigma_-)) = [0] \\ &\Rightarrow f_*([\sigma^-]) = [0], \end{aligned}$$

άρα $f_* = \hat{0}$, άτοπο. [3], Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $f_*([\sigma^+]) = [0]$. Άρα

- ή $f_*([\sigma^+]) = [\sigma^+]$ και $f_*([\sigma^-]) = [\sigma^-]$
- ή $f_*([\sigma^+]) = [\sigma^-]$ και $f_*([\sigma^-]) = [\sigma^+]$.

Συνεπώς ο $f_* : H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 17.3.9. *Αν η $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση με $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, τότε είναι περιττού βαθμού.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n. Την πρόταση για $n = 1$ έχουμε ήδη αποδείξει. Βλέπε πρόταση 13.2.7. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n - 1$.
Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{d} & B & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{d} & E & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} & & \\ \cdots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{d} & B & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{d} & E & \longrightarrow & \cdots \end{array},$$

όπου $A = H_{n+1}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \{0\}$, $B = H_n(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \{0\}, C = H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}_2)$, $D = H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$ και $E = H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Επίσης $f_3 = f_4 = f_4 = f_5 = f_* \otimes 1$. Έχουμε

- Βήμα 1ο: Οι f_1 και f_2 είναι ισομορφισμοί κατά τετριμμένο τρόπο.
- Βήμα 2ο: Έχουμε $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ο ομομορφισμός f_* είναι ένας πολλαπλασιασμός επί έναν περιττό αριθμό, επομένως το ίδιο είναι και ο f_5, άρα (λήμμα 17.3.6) ο f_5 είναι ισομορφισμός.

[3]Η τρίτη συνεπαγωγή ισχύει, γιατί η a_* είναι ισομορφισμός.

- Έχουμε $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Αν $f_4 = \hat{0}$, τότε από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε $d \circ f_4 = f_5 \circ d$, άρα $f_5 \circ d = \hat{0}$ και, επειδή 0 f_5 είναι ισομορφισμός θα έχουμε ότι $d = \hat{0}$, άρα $\operatorname{Ker} d = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, άρα $\operatorname{Im} j = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, άτοπο, γιατί $\operatorname{Im} j \simeq \{0\}$ ή $\operatorname{Im} j \simeq \mathbb{Z}_2$. Επομένως $f_4 \neq \hat{0}$, άρα και $f_* \neq \hat{0}$, άρα (λήμμα 17.3.8) ο f_* είναι ισομορφισμός, επομένως και ο $f_4 = f_* \otimes 1$ είναι ισομορφισμός (λήμμα 17.3.7). Από το λήμμα των πέντε συμπεραίνουμε ότι και ο f_3 είναι ισομορφισμός. Συνεπώς ο f_3 είναι ένας πολλαπλασιασμός επί περιττό αριθμό, άρα το ίδιο είναι και ο f_*, άρα η f είναι περιττού βαθμού. Έτσι η επαγωγική απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

18

ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑ

18.1 Εισαγωγικά

Συνομολογία είναι η δυική εκδοχή της ομολογίας. Σε πολλές εφαρμογές, οι οποίες δεν θα μας απασχολήσουν εδώ η χρήση της συνομολογίας αντί της ομολογίας είναι αναπόφευκτη . Μια απ' αυτές είναι η θεωρία του De Rham των διαφορικών μορφών, η οποία έχει σημαντική θέση στην διαφορική γεωμετρία. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνον με μια εισαγωγή στην συνομολογία. Για μια πιο προχωρημένη μελέτη ο αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει τα [7], [29], [37] και [40].

Για να προχωρήσουμε στο κύριο μέρος της μελέτης της συνομολογίας πρέπει να γνωρίσουμε της βασικές ιδιότητες της ομάδας $Hom(A, G)$ των ομομορφισμών από την αβελιανή ομάδα A στην αβελιανή ομάδα G.

Πρόταση 18.1.1. *Αν A, G είναι αβελιανές ομάδες, τότε το σύνολο $Hom(A, G)$ των ομομορφισμών από την A στην G είναι αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση των απεικονίσεων, δηλαδή, αν $f, g \in Hom(A, G)$, τότε η $f + g : A \to G$, με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ είναι μία καλώς ορισμένη πράξη στο σύνολο $Hom(A, G)$, που το καθιστά αβελιανή ομάδα.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Παραδείγματα 18.1.1.

1. Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Τότε ένας ομομορφισμός $f : \mathbb{Z} \to G$ καθορίζεται πλήρως από την τιμή $f(1)$, γιατί, αν $f(1) = a \in G$, τότε $f(k) = ka$. Επομένως το σύνολο $Hom(\mathbb{Z}, G)$ είναι το $\{f_a : \mathbb{Z} \to G / f_a(1) = a\}$. Άμεσα προκύπτει ότι η απεικόνιση $F : Hom(\mathbb{Z}, G) \to G$ με $F(f_a) = a$ είναι ένας επιμορφισμός. Έστω $a, b \in G$, τότε

$$\begin{aligned} F(f_a) = F(f_b) &\Rightarrow a = b \\ &\Rightarrow f_a = f_b, \end{aligned}$$

συνεπώς η F είναι και 1-1, άρα είναι ισομορφισμός, επομένως $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \simeq G$.

2. Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ένας ομομορφισμός. Αν $f(1) = a$, τότε $f\big(n\frac{1}{n}\big) = a$, άρα $nf\big(\frac{1}{n}\big) = a$, άρα $n|a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $a = 0$, άρα $f = \hat{0}$. Συνεπώς $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \simeq \{0\}$.

Ορισμός 18.1.1. Έστωσαν A, B και G αβελιανές ομάδες και $f : A \to B$ ένας ομομορφισμός. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $f^\diamond : Hom(B, G) \to Hom(A, G)$, ως εξής: $f^\diamond(\phi) = \phi \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \underset{\phi\circ f}{\searrow} & \downarrow \phi \\ & & G \end{array} .$$

Ο $f^\diamond$ ονομάζεται **δυικός ομομορφισμός** του f.

Πρόταση 18.1.2. *Αν A, B, C και G είναι αβελιανές ομάδες και $f : A \to B$, $g : B \to C$ ομομορφισμοί. Τότε για τους δυικούς ομομορφισμούς $f^\diamond : Hom(B, G) \to Hom(A, G)$, $g^\diamond : Hom(C, G) \to Hom(B, G)$, $f^\diamond \circ g^\diamond : Hom(C, G) \to Hom(A, G)$ και $(g \circ f)^\diamond : Hom(C, G) \to Hom(A, G)$ ισχύει $(g \circ f)^\diamond = f^\diamond \circ g^\diamond$.*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \underset{\phi\circ g\circ f}{\searrow} \;\; \underset{\phi\circ g}{\searrow} & & \downarrow \phi \\ & & & & G \end{array}$$

Απόδειξη: Έστω $\phi \in Hom(C, G)$, τότε $(g \circ f)^\diamond(\phi) = \phi \circ g \circ f$ και $(f^\diamond \circ g^\diamond)(\phi) = f^\diamond \circ (\phi \circ g) = \phi \circ g \circ f$, άρα $(g \circ f)^\diamond = f^\diamond \circ g^\diamond$. □

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\circ f \downarrow & \swarrow g & \\ C & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom(C, G) & \xrightarrow{g^\diamond} & Hom(B, G) \\ f^\diamond\circ g^\diamond \uparrow & \swarrow f^\diamond & \\ Hom(A, G) & & \end{array}$$

Πρόταση 18.1.3. *Έστωσαν A, G αβελιανές ομάδες, τότε $(i_A)^\diamond = i_{Hom(A,G)}$.*

Απόδειξη:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \\ & \underset{\phi\circ i_A}{\searrow} & \downarrow \phi \\ & & G \end{array} .$$

Έστω $\phi \in Hom(A, G)$, τότε $(i_A)^\diamond(\phi) = \phi \circ i_A$. Έστω $x \in A$, τότε $(\phi \circ i_A)(x) = \phi(x)$, άρα $\phi \circ i_A = \phi$, άρα $(i_A)^\diamond(\phi) = i_{Hom(A,G)}(\phi)$, επομένως $(i_A)^\diamond = i_{Hom(A,G)}$. □

Σε όλες τις επόμενες προτάσεις τα A, B, C και G συμβολίζουν αβελιανές ομάδες και τα f, g, h και ϕ ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων.

Πρόταση 18.1.4. *Αν ο $f : A \to B$ είναι ισομορφισμός, τότε και ο $f^\diamond : Hom(B, G) \to Hom(A, G)$ είναι επίσης ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Έστω $\phi_1, \phi_2 \in Hom(B,G)$, τότε

$$\begin{aligned} f^\diamond(\phi_1) = f^\diamond(\phi_2) &\Rightarrow \phi_1 \circ f = \phi_2 \circ f \\ &\Rightarrow \phi_1 \circ f \circ f^{-1} = \phi_2 \circ f \circ f^{-1} \\ &\Rightarrow \phi_1 = \phi_2, \end{aligned}$$

άρα η $f^\diamond$ είναι 1-1.

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow[f^{-1}]{} & B \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle \phi\circ f^{-1}} & \\ G & & \end{array}$$

Έστω $\phi \in Hom(A,G)$, τότε $\phi \circ f^{-1} \in Hom(B,G)$ και $f^\diamond(\phi \circ f^{-1}) = \phi \circ f^{-1} \circ f = \phi$, άρα ο $f^\diamond$ είναι επιμορφισμός. Επομένως ο $f^\diamond$ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 18.1.5. *Αν ο $f : A \to B$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, τότε και ο $f^\diamond$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 18.1.6. *Αν οι $f, g : A \to B$ είναι ομομορφισμοί, τότε για τους ομομορφισμούς $f^\diamond, g^\diamond : Hom(B,G) \to Hom(A,G)$ ισχύει $(f+g)^\diamond = f^\diamond + g^\diamond$.*

Απόδειξη: Έστω $\phi \in Hom(B,G)$ και $x \in A$, τότε

$$\begin{aligned} \big((f+g)^\diamond(\phi)\big)(x) &= \big(\phi \circ (f+g)\big)(x) \\ &= (\phi \circ f)(x) + (\phi \circ g)(x) \\ &= \big(f^\diamond(\phi)\big)(x) + \big(g^\diamond(\phi)\big)(x) \\ &= \big(f^\diamond(\phi) + g^\diamond(\phi)\big)(x), \end{aligned}$$

άρα $(f+g)^\diamond(\phi) = f^\diamond(\phi) + g^\diamond(\phi)$, άρα $(f+g)^\diamond = f^\diamond + g^\diamond$ □

Πρόταση 18.1.7. *Αν ο $f : A \to B$ είναι επιμορφισμός, τότε ο $f^\diamond : Hom(B,G) \to Hom(A,G)$ είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\phi_1, \phi_2 \in Hom(B,G)$, με $f^\diamond(\phi_1) = f^\diamond(\phi_2)$, άρα $\phi_1 \circ f = \phi_2 \circ f$. Έστω $b \in B$. Επειδή η f είναι επί υπάρχει $a \in A$, ώστε $f(a) = b$. Επομένως

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ f = \phi_2 \circ f &\Rightarrow \phi_1(f(a)) = \phi_2(f(a)) \\ &\Rightarrow \phi_1(b) = \phi_2(b) \\ &\Rightarrow \phi_1 = \phi_2, \end{aligned}$$

άρα η $f^\diamond$ είναι 1-1. □

18.2 Ομάδες συνομολογίας

Ορισμός 18.2.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $\big(C_n(X), \partial_n\big)$ το σύμπλεγμα των ιδιαζόντων αλυσίδων του X, με συνοριακούς ομομορφισμούς ∂_n, δηλαδή

$$\cdots \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to \cdots .$$

Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε οι δυικές ομάδες $Hom(C_n(X), G)$ αποτελούν ένα σύμπλεγμα, το δυικό του αρχικού συμπλέγματος, γιατί η σχέση $\partial_n \circ \partial_{n+1} = \hat{0}$ συνεπάγεται την $\big(\partial_n \circ \partial_{n+1}\big)^{\diamond} = \hat{0}$, δηλαδή την

$$\partial^{\diamond}_{n+1} \circ \partial^{\diamond}_n = \hat{0} \tag{18.1}$$

επομένως έχουμε την ακολουθία

$$\cdots \to Hom(C_{n-1}(X), G) \xrightarrow{\partial^{\diamond}_n} Hom(C_n(X), G) \xrightarrow{\partial^{\diamond}_{n+1}} Hom(C_{n+1}(X), G) \to \cdots ,$$

η οποία, λόγω της (18.1) είναι ένα σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων με αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του συμπλέγματος, το οποίο δίνει την ιδιάζουσα ομολογία. Για λόγους ομοιομορφίας με την ιδιάζουσα ομολογία ονομάζουμε δ^n τους ομομορφισμούς $\partial^{\diamond}_{n+1}$. Την ομάδα $Hom(C_n(X), G)$ εφεξής θα συμβολίζουμε με $C^n(X; G)$ και θα την ονομάζουμε **n-οστή ομάδα ιδιαζόντων συναλυσίδων του X με συντελεστές από την ομάδα** G. Επομένως έχουμε

$$\cdots \to C^{n-1}(X; G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(X; G) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(X; G) \to \cdots .$$

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ & \searrow^{\phi\circ\partial_n} & \downarrow \phi \\ & & G \end{array} .$$

$$C^{n-1}(X; G) \ni \phi \xrightarrow{\delta^{n-1}} \delta^{n-1}(\phi) = \phi \circ \partial_n \in C^n(X; G).$$

Η υποομάδα $\operatorname{Ker} \delta^n := Z^n(X; G)$ της $C^n(X; G)$ ονομάζεται **n-οστή ομάδα ιδιαζόντων συνκύκλων του X με συντελεστές από την ομάδα** G. Επειδή $\delta^n \circ \delta^{n-1} = \hat{0}$ η ομάδα $\operatorname{Im} \delta^{n-1}$ είναι υποομάδα της ομάδας $Z^n(X; G)$, άρα και της $C^n(X; G)$.
Η υποομάδα αυτή συμβολίζεται με $B^n(X; G)$ και ονομάζεται **n-οστή ομάδα ιδιαζόντων συνσυνόρων του X με συντελεστές από την ομάδα** G.
Η ομάδα πηλίκο

$$H^n(X; G) = \operatorname{Ker} \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1} = Z^n(X; G)/B^n(X; G)$$

ονομάζεται **n-οστή ομάδα ιδιάζουσας συνομολογίας του X με συντελεστές από την ομάδα** G. Όταν $G = \mathbb{Z}$ έχουμε την λεγόμενη **ακέραια συνομολογία** του χώρου X, την n-οστή ομάδα της οποίας συμβολίζουμε με $H^n(X)$. Εφεξής, επειδή δεν θα υπάρχει λόγος σύγχισης, τα επίθετα ιδιαζόντων και ιδιάζουσας θα παραλείπονται. Επίσης θα εννοείται το

ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και η G μια αβελιανή ομάδα.
Δύο n-σύνκυκλοι ϕ, θ λέγονται **συνομόλογοι**, αν και μόνον, αν $\phi - \theta \in B^n(X;G)$. Η κλάση ισοδυναμίας $[\phi]$, η οποία είναι ένα στοιχείο της αβελιανής ομάδας $H^n(X;G)$ αποτελείται από όλους τους συνομόλογους με τον ϕ σύνκυκλους, επομένως για $[\phi],[\theta] \in H^n(X;G)$ έχουμε

$$[\phi] = [\theta] \Leftrightarrow \phi, \theta \in Z^n(X;G) \wedge \phi - \theta \in B^n(X;G).$$

Πρόταση 18.2.1. *Αν ο X είναι ένας μονοσημειακός χώρος, τότε* $H^n(X;G) = \begin{cases} G, & n = 0 \\ \{0\}, & n > 0 \end{cases}$.

Απόδειξη: Από την απόδειξη της πρότασης 15.4.3 έχουμε τα εξής: $C_n(X) \simeq \mathbb{Z}$ για κάθε $n \geq 0$.

- $C_n(X) \simeq \mathbb{Z}$ για κάθε $n \geq 0$, άρα $C^n(X;G) = Hom(C_n(X), G) \simeq Hom(\mathbb{Z}, G) \simeq G$.
- Αν ο n είναι άρτιος >0, τότε $\operatorname{Ker} \partial_n \simeq \{0\}$, και $\operatorname{Im} \partial_n \simeq \mathbb{Z}$, άρα ο ∂_n είναι ισομορφισμός.
- Αν ο n είναι περιττός, τότε $\operatorname{Ker} \partial_n \simeq \mathbb{Z}$ και $\operatorname{Im} \partial_n \simeq \{0\}$. Στην περίπτωση αυτή ο ∂_{n+1} είναι ισομορφισμός.

Για $n > 0$ εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν ο n είναι άρτιος:
  Έχουμε
  $$\begin{aligned} \phi_1, \phi_2 \in C^{n-1}(X;G) \wedge \delta^{n-1}(\phi_1) = \delta^{n-1}(\phi_2) &\Rightarrow \phi_1 \circ \partial_n = \phi_2 \circ \partial_n \\ &\Rightarrow \phi_1 \circ \partial_n \circ \partial_n^{-1} = \phi_2 \circ \partial_n \circ \partial_n^{-1} \\ &\Rightarrow \phi_1 = \phi_2, \end{aligned}$$
  άρα ο δ^{n-1} είναι 1-1.
  Αν $\phi \in C^n(X;G)$, τότε $\phi \circ \partial_n^{-1} \in C^{n-1}(X;G)$ και $\delta^{n-1}(\phi \circ \partial_n^{-1}) = \phi \circ \partial_n^{-1} \circ \partial_n = \phi$, άρα ο δ^{n-1} είναι επιμορφισμός, άρα ο δ^{n-1} είναι ισομορφισμός, άρα $\delta^{n-1}\big(C^{n-1}(X;G)\big) \simeq \delta^{n-1}(G) \simeq G$, άρα
  $$B^n(X;G) \simeq G \tag{18.2}$$
  Επιπλέον
  $$\begin{aligned} \phi \in \operatorname{Ker} \delta^n &\Rightarrow \delta^n(\phi) = \hat{0} \\ &\Rightarrow \phi \circ \partial_{n+1} = \hat{0}, \end{aligned}$$
  το οποίο ισχύει για κάθε $\phi \in C^n(X;G)$, άρα $\operatorname{Ker} \delta^n = C^n(X;G) \simeq G$, άρα
  $$Z^n(X;G) \simeq G. \tag{18.3}$$
  Από τις (18.2) και (18.3) έχουμε
  $$H^n(X;G) = Z^n(X;G)/B^n(X;G) \simeq G/G \simeq \{0\}.$$

- Αν ο n είναι περιττός:
  Έχουμε

$$\begin{aligned}\phi \in \operatorname{Ker}\delta^n &\Leftrightarrow \delta^n(\phi) = \hat{0}\\ &\Leftrightarrow \phi \circ \partial_{n+1} = \hat{0}\\ &\Leftrightarrow \phi \circ \partial_{n+1} \circ \partial_{n+1}^{-1} = \hat{0}\\ &\Leftrightarrow \phi = \hat{0}.\end{aligned}$$

Άρα $\operatorname{Ker}\delta^n \simeq \{0\}$, άρα

$$Z^n(X;G) \simeq \{0\}. \tag{18.4}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\phi \in C^{n-1}(X;G) &\Rightarrow \delta^{n-1}(\phi) = \phi \circ \partial_n = \hat{0}\\ &\Rightarrow \operatorname{Im}\delta^{n-1} = \{0\},\end{aligned}$$

άρα

$$B^n(X;G) \simeq \{0\} \tag{18.5}$$

Από τις (18.4) και (18.5) έχουμε

$$H^n(X;G) = Z^n(X;G)/B^n(X;G) \simeq \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}.$$

Για $n = 0$ έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial_1 = \hat{0}} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\delta^0 &= \operatorname{Ker}\partial_1^{\diamond}\\ &\simeq Hom(C_0(X), G) \simeq G\end{aligned}$$

και

$$\operatorname{Im}\delta^{-1} = \operatorname{Im}\partial_0^{\diamond} = \{0\},$$

επομένως

$$H^0(X;G) = G/\{0\} \simeq G.$$

□

Από την ομολογία γνωρίζουμε ότι η συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγει έναν ομομορφισμό $f_\diamond^n : C_n(X) \to C_n(Y)$, ο οποίος μεταθέτει τους συνοριακούς ομομορφισμούς, δηλαδή έχουμε $\partial' \circ f_\diamond^n = f_\diamond^{n-1} \circ \partial$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης παραλείπουμε τους δείκτες, δηλαδή αντί ∂_n γράφουμε ∂ και αντί $f_\diamond^n$ γράφουμε $f_\diamond$. Το ίδιο θα κάνουμε και με τους δείκτες στην συνομολογία.
Στην συνομολογία η f επάγει έναν ομομορφισμό $f^\diamond : C_n(Y; G) \to C_n(X; G)$, με $f^\diamond(\phi) = \phi \circ f_\diamond$.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_\diamond} & C_n(Y) \\ & \searrow^{f^\diamond = \phi \circ f_\diamond} & \downarrow \phi \\ & & G \end{array}.$$

Πρόταση 18.2.2. *Ισχύει* $\delta \circ f^\diamond = f^\diamond \circ \delta'$.

$$\begin{array}{ccc} C^{n-1}(Y; G) & \xrightarrow{f^\diamond} & C^{n-1}(X; G) \\ \downarrow \delta' & & \downarrow \delta \\ C^n(Y; G) & \xrightarrow{f^\diamond} & C^n(X; G) \end{array}.$$

Απόδειξη: Έστω $\phi \in C_{n-1}(Y; G)$, τότε

$$\begin{aligned} (f^\diamond \circ \delta')(\phi) &= f^\diamond(\delta'(\phi)) \\ &= \delta'(\phi) \circ f_\diamond = \phi \circ \partial' \circ f_\diamond \\ &= \phi \circ f_\diamond \circ \partial = \delta \circ (\phi \circ f^\diamond) \\ &= \delta \circ (f^\diamond(\phi)) = (\delta \circ f^\diamond)(\phi), \end{aligned}$$

άρα $\delta \circ f^\diamond = f^\diamond \circ \delta'$. □

Πρόταση 18.2.3. *Η* $f^\diamond$ *απεικονίζει συνομόλογους σύνκυκλους του* Y *σε συνομόλογους σύνκυκλους του* X

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} \phi \in Z^n(Y; G) &\Rightarrow \delta'(\phi) = \hat{0} \\ &\Rightarrow f^\diamond\big(\delta'(\phi)\big) = \hat{0} \\ &\Rightarrow \delta\big(f^\diamond(\phi)\big) = \hat{0} \\ &\Rightarrow f^\diamond(\phi) \in Z^n(X; G). \end{aligned}$$

Επιπλέον αν $\phi_1, \phi_2 \in Z^n(Y; G)$, τότε $f^\diamond(\phi_1), f^\diamond(\phi_2) \in Z^n(X; G)$ και

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 \in B^n(Y; G) &\Rightarrow \exists \phi' \in C^{n-1}(Y; G); \delta'(\phi') = \phi_1 - \phi_2 \\ &\Rightarrow f^\diamond\big(\delta'(\phi')\big) = f^\diamond(\phi_1 - \phi_2) \\ &\Rightarrow \delta\big(f^\diamond(\phi')\big) = f^\diamond(\phi_1) - f^\diamond(\phi_2) \\ &\Rightarrow f^\diamond(\phi_1) - f^\diamond(\phi_2) \in B^n(X; G), \end{aligned}$$

άρα οι $f^\diamond(\phi_1)$ και $f^\diamond(\phi_1)$ συνομόλογοι σύνκυκλοι του X. □

Επομένως η απεικόνιση $f^* : H^n(Y;G) \to H^n(X;G)$, με $f^*([\phi]) = [f^\diamond(\phi)]$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον

Πρόταση 18.2.4. *Η f^* είναι ομομορφισμός.*

Απόδειξη: Έστω $[\phi], [\theta] \in H^n(Y;G)$, τότε

$$\begin{aligned} f^*([\phi]+[\theta]) &= f^*([\phi+\theta]) \\ &= [f^\diamond(\phi+\theta)] \\ &= [f^\diamond(\phi)+f^\diamond(\theta)] \\ &= [f^\diamond(\phi)]+[f^\diamond(\theta)] \\ &= f^*([\phi])+f^*([\theta]). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 18.2.5. *Αν οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Απόδειξη: Έστω $[\phi] \in H^n(Z;G)$, τότε

$$\begin{aligned} (g\circ f)^*([\phi]) &= [(g\circ f)^\diamond(\phi)] \\ &= [f^\diamond(g^\diamond(\phi))] \\ &= f^*\big[g^\diamond([\phi])\big] \\ &= f^*\big(g^*([\phi])\big) \\ &= (f^*\circ g^*)([\phi]), \end{aligned}$$

άρα $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$. □

Πρόταση 18.2.6. *Αν $i_X : X \to X$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο ομομορφισμός $(i_X)^* : H^n(X;G) \to H^n(X : G)$ είναι ο ταυτοτικός.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Στο κεφάλαιο 15 αποδείξαμε ότι αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε οι επαγόμενοι ομομορφισμοί f_*, g_* ταυτίζονται. Ακολούθως θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και στην συνομολογία.

Πρόταση 18.2.7. *Αν για τους ομομορφισμούς $f^\diamond, g^\diamond : C^n(Y;G) \to C^n(X;G)$ υπάρχουν ομομορφισμοί $D_n : C^n(Y;G) \to C^{n-1}(X;G)$, τέτοιοι ώστε*

$$\delta \circ D_n + D_{n+1} \circ \delta' = f_n^\diamond - g_n^\diamond,$$

τότε $f_n^* = g_n^*$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^{n-1}(X;G) & \xrightarrow{\delta} & C^n(X;G) & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1}(X;G) & \longrightarrow & \cdots \\ & & g^{\diamond}_{n-1}\uparrow f^{\diamond}_{n-1} & \nwarrow D_n & g^{\diamond}_{n}\uparrow f^{\diamond}_{n} & \nwarrow D_{n+1} & g^{\diamond}_{n+1}\uparrow f^{\diamond}_{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C^{n-1}(Y;G) & \xrightarrow{\delta'} & C^n(Y;G) & \xrightarrow{\delta'} & C^{n+1}(Y;G) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Απόδειξη: Έστω $[\phi] \in H^n(Y;G)$, τότε $\phi \in Z^n(Y;G)$, άρα $\delta'(\phi) = \hat{0}$, άρα

$$\begin{aligned} f^{\diamond}_n(\phi) - g^{\diamond}_n(\phi) &= (\delta \circ D_n)(\phi) - (D_{n+1} \circ \delta')(\phi) \\ &= \delta(D_n(\phi)) \\ &\Rightarrow f^{\diamond}(\phi) - g^{\diamond}(\phi) \in B^n(X;G) \\ &\Rightarrow [f^{\diamond}(\phi)] = [g^{\diamond}(\phi)] \\ &\Rightarrow f^*([\phi]) = g^*([\phi]) \\ &\Rightarrow f^* = g^*. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 18.2.8. *Αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε για τους ομομορφισμούς $f^*_n, g^*_n : H^*_n(Y;G) \to H^*_n(X;G)$ ισχύει $f^*_n = g^*_n$ για κάθε n.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $i_0 : X \to X \times \mathbb{I}$, με $i_0(x) = (x, 0)$ και $i_1 : X \to X \times \mathbb{I}$, με $i_1(x) = (x, 1)$, οι οποίες επάγουν στις ομάδες των ιδιαζόντων αλυσίδων τους ομομορφισμούς $(i_0)^n_{\diamond} : C_n(X) \to C_n(X \times \mathbb{I})$ και $(i_1)^n_{\diamond} : C_n(X) \to C_n(X \times \mathbb{I})$. Από την πρόταση 15.4.17 υπάρχουν ομομορφισμοί $T_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times \mathbb{I})$, ώστε

$$(i_0)^n_{\diamond} - (i_1)^n_{\diamond} = \partial' \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial.$$

Μεταβαίνοντας στους δυικούς ομομορφισμούς έχουμε

$$(i_0)^{\diamond}_n - (i_1)^{\diamond}_n = \delta' \circ D_n + D_{n-1} \circ \delta,$$

άρα, από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι $(i_0)^*_n = (i_1)^*_n$.
Οι απεικονίσεις f και g είναι ομοτοπικές, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times \mathbb{I} \to Y$, ώστε $f = H \circ i_0$ και $g = H \circ i_1$, επομένως

$$\begin{aligned} f^*_n &= (i_0)^*_n \circ H^* \\ &= (i_1)^*_n \circ H^* = g^*_n. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 18.2.9. *Αν οι τοπολογικοί χώροι X και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, τότε για κάθε n ισχύει $H^n(X;G) \simeq H^n(Y;G)$.*

Απόδειξη: Η ομοτοπική ισοδυναμία των χώρων X και Y συνεπάγεται το ότι υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ ώστε $g \circ f \approx i_X$ και $f \circ g \approx i_Y$, επομένως, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$f_n^* \circ g_n^* = (i_X)_n^* \tag{18.6}$$

και

$$g_n^* \circ f_n^* = (i_Y)_n^* \tag{18.7}$$

Από τις (18.6) και (18.7) συμπεραίνουμε ότι η g_n^* είναι ισομορφισμός, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Στην παράγραφο 15.5, που ορίσαμε την σχετική ομολογία είδαμε ότι με $C_n(X,A)$ συμβολίζουμε την ομάδα των σχετικών αλυσίδων του ζεύγους (X,A). Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε με $C^n(X,A;G)$ συμβολίζουμε την ομάδα $Hom(C_n(X,A),G)$. Στην σχετική ομολογία έχουμε το σύμπλεγμα

$$\cdots \to C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial'_n} C_{n-1}(X,A) \to \cdots \tag{18.8}$$

Παίρνοντας την δυική της (18.8) έχουμε

$$(\partial'_{n+1})^\diamond \circ (\partial'_n)^\diamond = \hat{0}$$

Αν θέσουμε $(\partial'_{n+1})^\diamond = \delta_n$ έχουμε το σύμπλεγμα

$$\cdots \to C^{n-1}(X,A;G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(X,A;G) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(X,A;G) \to \cdots \tag{18.9}$$

με $\delta^n(\phi) = \phi \circ \partial_{n+1}$.
Ανάλογα με τον ορισμό της απόλυτης συνομολογίας ορίζουμε την σχετική συνομολογία ως εξής:

$$H^n(X,A;G) = \frac{\operatorname{Ker}\delta^n}{\operatorname{Im}\delta^{n-1}} = \frac{Z^n(X,A;G)}{B^n(X,A;G)}$$

Για την σχετική συνομολογία ισχύουν προτάσεις ανάλογες εκείνων της σχετικής ομολογίας.

Πρόταση 18.2.10. *Αν A είναι ένας υπόχωρος του X και G μια αβελιανή ομάδα, τότε για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει ομομορφισμός*

$$d^{n-1} : H^{n-1}(A;G) \to H^n(X,A;G),$$

ώστε η ακολουθία

$$\begin{aligned}\{0\} &\to H^0(X,A;G) \to H^0(X;G) \to H^0(A;G)\\ &\xrightarrow{d^0} H^1(X,A;G) \to H^1(X;G) \to H^1(A;G) \to \cdots\\ &\to H^{n-1}(X,A;G) \to H^{n-1}(X;G) \to H^{n-1}(A;G)\\ &\xrightarrow{d^{n-1}} H^n(X,A;G) \to \cdots\end{aligned}$$

να είναι ακριβής.

Πρόταση 18.2.11. ***(Εκτομή)*** *Αν A είναι ένας υπόχωρος του X και $U \subseteq A$, ώστε $\overline{U} \subseteq A^0$, τότε για κάθε $n \geq 0$ ισχύει $H^n(X, A; G) \simeq H^n(X \setminus U, A \setminus U; G)$.*

Κλείνοντας τα ολίγα αυτά περί συνομολογίας πρέπει να επισημάνουμε ότι οι ομάδες συνομολογίας δίνουν τις ίδιες ακριβώς πληροφορίες για τους τοπολογικούς χώρους με τις ομάδες ομολογίας. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι (βλέπε [29] παράγραφος 45), αν για τους τοπολογικούς χώρους X, Y οι ομάδες $H_n(X)$ και $H_n(Y)$ είναι ισόμορφες για κάθε n, τότε το ίδιο είναι και οι ομάδες $H_n(X; G)$ και $H_n(Y; G)$ για κάθε n και για οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα G. Έτσι, αν η ομολογία αδυνατεί να ξεχωρίσει δύο ομοτοπικά ισοδύναμα ζεύγη τοπολογικών χώρων την ίδια αδυναμία παρουσιάζει και η συνομολογία. Επομένως ευλόγως γεννάται το ερώτημα: Προς τι η συνομολογία; Η απάντηση είναι πως, αν στις ομάδες $H^n(X; G)$ θεωρήσουμε ότι το G είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε προκύπτουν άλλες δομές πέραν των αβελιανών ομάδων οι λεγόμενοι **συνομολογιακοί δακτύλιοι**, οι οποίοι είναι ισχυρότερα εργαλεία από τις ομάδες ομολογίας, τόσο για το πρόβλημα της ταξινόμησης, όσο και για την επίλυση άλλων τοπολογικών προβλημάτων. Για τους συνομολογιακούς δακτύλιους ο ενδιαφερόμενος μπορεί να συμβουλευτεί τα βιβλία που προτείνουμε στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου.

19 ΕΠΙΜΕΤΡΟ

19.1 Θεώρημα Seifert-Van Kampen

Όπως είδαμε στο τέλος του κεφαλαίου των καλυπτικών χώρων υπάρχουν και μη αβελιανές θεμελιώδεις ομάδες. Βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό των ομάδων αυτών είναι το θεώρημα των Seifert-Van Kampen, για την κατανόηση του οποίου είναι απαραίτητη η γνώση της έννοιας της ελεύθερης ομάδας, καθώς και του ελευθέρου γινομένου ομάδων. Για τον λόγο αυτόν προηγούνται στην πραγμάτευση κάποιοι ορισμοί και προτάσεις πάνω στις έννοιες αυτές, που στοχεύουν στην κατανόηση τους. Οι αποδείξεις που παραλείπονται, μπορούν να αναζητηθούν σε ένα βιβλίο άλγεβρας. Ως πράξη εφεξής θα θεωρούμε τον πολλαπλασιασμό, επειδή οι ομάδες δεν είναι απαραίτητα αβελιανές. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας το συμβολίζουμε με 1. Το συμμετρικό (αντίστροφο) του x το συμβολίζουμε με x^{-1}. Με το x^n, όπου $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε το γινόμενο n παραγόντων, ο καθένας εκ των οποίων είναι ίσος με x. Με το x^{-n}, όπου $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε το γινόμενο n παραγόντων, ο καθένας εκ των οποίων είναι ίσος με x^{-1}. Ακολούθως θα δώσουμε για τις ομάδες, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα αβελιανές έναν ορισμό ανάλογο του ευθέως αθροίσματος που δώσαμε για τις αβελιανές ομάδες.

Ορισμός 19.1.1. Έστω G ομάδα και $G_i, i \in I$ μια οικογένεια υποομάδων της G. Θα λέμε ότι η οικογένεια $G_i, i \in I$ **παράγει** την G, αν και μόνον, αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος δεικτών $i_1, ..., i_n \in I$, ώστε $x = \prod_{k=1}^{n} x_{i_k}$, με $x_{i_k} \in G_{i_k}$. Το ότι η οικογένεια $G_i, i \in I$ παράγει την ομάδα G συμβολίζουμε με $G = \langle G_i, i \in I \rangle$.

Παράδειγμα 19.1.1. Η συμμετρική ομάδα S_3 παράγεται από τις υποομάδες της $G_1 = \langle (1,2) \rangle$, $G_2 = \langle (1,3) \rangle$ και $G_3 = \langle (2,3) \rangle$.

Ορισμός 19.1.2. Έστω $G_i, i \in I$ οικογένεια ομάδων, με $G_i \cap G_j = \varnothing$, αν $i, j \in I$ και $i \neq j$. Τη μονάδα της ομάδας G_i συμβολίζουμε με 1_i. Θεωρούμε το σύνολο $\bigsqcup_{i \in I} G_i$. Ονομάζουμε **λέξη** από την οικογένεια $G_i, i \in I$ κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$, όπου $g_{i_k} \in G_{i_k}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Αν $g_{i_k} \neq 1_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $i_k \neq i_{k+1}$ για κάθε

$k = 1, \ldots, n-1$, τότε η λέξη ονομάζεται **ανηγμένη** μήκους $n > 0$. Ως ανηγμένη λέξη μήκους 0, την οποία συμβολίζουμε με $\varnothing$ θεωρούμε το κενό σύνολο.

Ονομάζουμε W το σύνολο των ανηγμένων λέξεων από την οικογένεια $G_i, i \in I$. και θεωρούμε την απεικόνιση $L_g : W \to W$, ώστε, αν $g \in G_i \setminus \{1_i\}$, τότε

$$w = (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) \mapsto L_g(w) = \begin{cases} (g, g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}), & i \neq i_1 \\ (gg_{i_1}, \ldots, g_{i_n}), & i = i_1 \wedge gg_{i_1} \neq 1_i. \\ (g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}), & i = i_1 \wedge gg_{i_1} = 1_i \end{cases}$$

Επιπλέον, ορίζουμε $L_{1_i}(w) = w$. Αποδεικνύεται ότι

$$L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in G_i. \tag{19.1}$$

Από την (19.1), συμπεραίνουμε ότι

$$L_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ L_{g^{-1}} = i_W. \tag{19.2}$$

Από την (19.2), συμπεραίνουμε ότι η L_g είναι 1-1 και επί, άρα είναι ένα στοιχείο της συμμετρικής ομάδας $S(W)$ του συνόλου W. Επίσης αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $p_i : G_i \to S(W)$, με $p_i(g) = L_g$ είναι ένας μονομορφισμός.

Ορισμός 19.1.3. **Ελεύθερο γινόμενο** των ομάδων της οικογένειας $G_i, i \in I$ ονομάζεται η υποομάδα της $S(W)$, η οποία παράγεται από την οικογένεια $p_i(G_i), i \in I$. Οι ομάδες G_i, οι οποίες είναι ισόμορφες με τις $p_i(G_i)$, ονομάζονται **ελεύθεροι παράγοντες** του ελευθέρου γινομένου. Το ελεύθερο αυτό γινόμενο συμβολίζεται με $\prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$. Στη περίπτωση που $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ελεύθερο γινόμενο γράφουμε και $G_1 \star G_2 \star \cdots \star G_n$.

Αποδεικνύεται η εξής σημαντική πρόταση

Πρόταση 19.1.1. *Ισχύουν τα:*

α΄) $p_i(G_i) \cap p_j(G_j) = \{i_W\}$, *αν* $i, j \in I$ *και* $i \neq j$.

β΄) Κάθε στοιχείο g *του* $\prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ *γράφεται με μοναδικό τρόπο ως* $g = \prod\limits_{k=1}^{n} p_{i_k}(g_k)$, *όπου* $g_k \in G_{i_k} \setminus \{1_{i_k}\}$ *για κάθε* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *και* $i_k \neq i_{k+1}$ *για κάθε* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

γ΄) Η απεικόνιση $\phi : W \to \prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$, *ώστε* $\phi\big((g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})\big) = \prod\limits_{k=1}^{n} p_{i_k}(g_k)$ *και* $\phi(\varnothing) = 1_G$ *είναι 1-1 και επί. Όπου η* $(g_1, \ldots, g_n)$ *είναι μια ανηγμένη λέξη μήκους* n, *με* $g_k \in G_{i_k}$.

Πρόταση 19.1.2. *Αν στο σύνολο* W *ορίσουμε πράξη πολλαπλασιασμού λέξεων, ως εξής:*

$$(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})(h_{j_1}, \ldots, h_{j_m}) = \begin{cases} (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}, h_{j_1}, \ldots, h_{j_m}), & i_n \neq j_1 \\ (g_{i_1}, \ldots, g_{i_{n-1}}, g_{i_n}h_{j_1}, h_{j_2}, \ldots, h_{j_m}), & i_n = j_1 \end{cases}$$

και

$$(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})\varnothing = \varnothing(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) = (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}),$$

τότε το W γίνεται πολλαπλασιαστική ομάδα με μονάδα την κενή λέξη και αντίστροφη της λέξης $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ τη λέξη $(g_{i_n}^{-1}, \ldots, g_{i_1}^{-1})$.

Από την πρόταση 19.1.1, συμπεραίνουμε ότι

Πρόταση 19.1.3. *Η ομάδα $\prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ είναι ισόμορφη με την ομάδα W.*

Η επόμενη πρόταση περιγράφει μία ιδιότητα του ελευθέρου γινομένου, η οποία είναι γνωστή ως "καθολική ιδιότητα του ελευθέρου γινομένου".

Πρόταση 19.1.4. *Έστω*

- *$G_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια ομάδων ξένων μεταξύ τους.*
- *$G = \prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ είναι το ελεύθερο γινόμενο της οικογένειας $G_i, i \in I$.*
- *H ομάδα και*
- *$\phi_i : G_i \to H$ οικογένεια ομομορφισμών,*

τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : G \to H$, ώστε $\phi \circ p_i = \phi_i$ για κάθε $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\phi_i} & H \\ \downarrow p_i & \nearrow \phi & \\ G & & \end{array}$$

Πρόταση 19.1.5. *Αν G ομάδα και $G_i, i \in I$ οικογένεια υποομάδων της, η οποία παράγει την G, με $G_i \cap G_j = \{1_G\}$, αν $i, j \in I$ και $i \neq j$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

α΄) $G = \prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$.

β΄) Κάθε $g \in G \setminus \{1_G\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο, ως $g_1 \ldots g_n$, με $g_k \in G_i \setminus \{1_{G_{i_k}}\}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $i_k \neq i_{k+1}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$.

γ΄) Αν $g_k \in G_{i_k} \setminus \{1_G\}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $i_k \neq i_{k+1}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$, τότε $\prod\limits_{k=1}^{n} g_{i_k} \neq 1_G$.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ικανοποιείται μία από τις συνθήκες της προηγούμενης πρότασης, λέμε ότι η G είναι το ελεύθερο γινόμενο της οικογένειας $G_i, i \in I$ των υποομάδων της. Άμεση συνέπεια της πιο πάνω πρότασης είναι το ότι η S_3 δεν είναι ελεύθερο γινόμενο των υποομάδων της $G_1 = \langle (1,2) \rangle, G_2 = \langle (1,3) \rangle$ και $G_3 = \langle (2,3) \rangle$, αν και παράγεται από αυτές, γιατί $(1,2)(1,3)(2,3)(1,3) = 1_{S_3}$.

Πρόταση 19.1.6. *Έστω $G = G_1 \star G_2$ και $N_1 \lhd G_1$, $N_2 \lhd G_2$. Αν N είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της G, η οποία περιέχει τις G_1 και G_2 (κανονική θήκη), τότε*

$$G/N \simeq G_1/N_1 \star G_2/N_2.$$

Ορισμός 19.1.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Με $\langle x \rangle$ συμβολίζουμε την κυκλική ομάδα που παράγεται από το x. Δηλαδή $\langle x \rangle$ είναι το σύνολο $\{(x,n)/n \in \mathbb{Z}\}$, με πράξη τον πολλαπλασιασμό, ο οποίος ορίζεται ως εξής: $(x,n)(x,m) = (x, n+m)$. Προφανώς $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$. **Ελεύθερη ομάδα** με βάση το μη κενό σύνολο X (συμβολισμός $F(X)$) ή **με γεννήτορες από το** X ονομάζεται το ελεύθερο γινόμενο $F(X) = \prod\limits_{x \in X}^{*} \langle x \rangle$. Συμφωνούμε η ελεύθερη ομάδα με βάση το κενό να είναι η τετριμμένη.

Παρατήρηση: Επειδή $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, έχουμε $F(X) = \prod\limits_{a \in X}^{*} \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 19.1.2. Η ελεύθερη ομάδα με γεννήτορες τα a, b ($a \neq b$) και $ab \neq ba$ είναι η $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. Κάθε στοιχείο της ομάδας αυτής γράφεται ως $a^{k_1} \cdot b^{l_1} \cdots a^{k_n} \cdot b^{l_n}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και οι εκθέτες είναι ακέραιοι.

Πρόταση 19.1.7. *Αν X_1, X_2 είναι μη κενά σύνολα, τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$|X_1| = |X_2| \quad \Leftrightarrow \quad F(X_1) \simeq F(X_2).$$

Παρατήρηση: Η πιο πάνω πρόταση σημαίνει ότι η ελεύθερη ομάδα εξαρτάται αποκλειστικά από τον πληθάριθμο της βάσης της, ο οποίος ονομάζεται **τάξη της ομάδας** και συμβολίζεται με $rank(F)$.

Το θεώρημα Seifert-Van Kampen είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας των τοπολογικών χώρων. Για την κατανόηση του παραθέτουμε τα εξής: Έστω X τοπολογικός χώρος, U, V ανοικτά υποσύνολα του X, με $U \cup V = X$, $U \cap V \neq \varnothing$ και $x_0 \in U \cap V$. Τότε οι ενθέσεις του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \overset{i}{\nearrow} & & \overset{k}{\searrow} & \\ U \cap V & & & & X \\ & \underset{j}{\searrow} & & \underset{l}{\nearrow} & \\ & & V & & \end{array},$$

επάγουν τους ομομορφισμούς, οι οποίοι φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \overset{i_*}{\nearrow} & & \overset{k_*}{\searrow} & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & & & & \pi_1(X, x_0) \\ & \underset{j_*}{\searrow} & & \underset{l_*}{\nearrow} & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}.$$

Από την πρόταση 19.1.1, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\Phi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

ώστε το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U,x_0) & & \\ & \overset{i_*}{\nearrow} & \downarrow p_1 & \overset{k_*}{\searrow} & \\ \pi_1(U\cap V,x_0) & & \pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X,x_0) \\ & \underset{j_*}{\searrow} & \uparrow p_2 & \underset{l_*}{\nearrow} & \\ & & \pi_1(V,x_0) & & \end{array},$$

να είναι μεταθετικό.

Πρόταση 19.1.8. ***(Θεώρημα Seifert-Van Kampen)*** *Έστω X τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι τα U, V είναι ανοικτά και δρομοσυνεκτικά υποσύνολα του X, ώστε το $U \cap V$ να είναι μη κενό και δρομοσυνεκτικό. Αν επιπλέον , $x_0 \in U \cap V$ και $C = \{i_*(\gamma)\big(j_*(\gamma)\big)^{-1}/\gamma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$, τότε*

α΄) Ο Φ είναι επιμορφισμός.

β΄) Ο πυρήνας του Φ είναι η κανονική θήκη D του C στην ομάδα $\pi_1(X, x_0)$.[1]

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [34] σελ. 46-49.

Πόρισμα. *Ισχύει: $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/D$.*

Πρόταση 19.1.9. *Αν στη πρόταση 19.1.8, επιπλέον έχουμε ότι ο χώρος $U \cap V$ είναι απλά συνεκτικός, τότε $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.*

Απόδειξη: Αν ο $U \cap V$ είναι απλά συνεκτικός, τότε $\pi_1(U \cap V, x_0) \simeq \{e\}$, άρα $i_*(\gamma) = j_*(\gamma) = \{e\}$, άρα $C = D = \{e\}$. □

Ας δούμε κάποιες εφαρμογές:

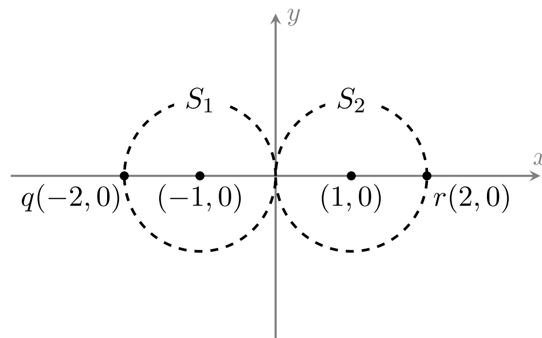
Παραδείγματα 19.1.1.

1. **Η θεμελιώδης ομάδα του σφηνοειδούς αθροίσματος $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$ είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες ($\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$).**

   Απόδειξη: Αν S_1 είναι ο κύκλος με κέντρο το (-1,0) και ακτίνα 1 και S_2 είναι ο κύκλος με κέντρο το (1,0) και ακτίνα 1, τότε $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1 \cong S_1 \cup S_2$ (Τοπολογία του $S_1 \cup S_2$ είναι η επαγόμενη από το $\mathbb{R}^2$ ευκλείδεια τοπολογία). Θεωρούμε τα σύνολα $U = S_1 \setminus \{q\}$ και $V = S_2 \setminus \{r\}$, όπου q είναι το σημείο (-2,0) και r το σημείο (2,0), τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του $S_1 \cup S_2$, με $U \cong V \cong \mathbb{R}$. Ο χώρος $U \cap V$ είναι ομοιόμορφος με δύο ευθείες του επιπέδου, οι οποίες έχουν ένα κοινό σημείο, άρα είναι συσταλτός, άρα είναι και απλά συνεκτικός. Επομένως $\pi_1(S_1 \cup S_2) \simeq \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Όμως ο S_1 είναι συστολή παραμόρφωσης του V και ο S_2 συστολή παραμόρφωσης του U, άρα $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(S_1) \simeq \pi_1(V)$ και $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(S_2) \simeq \pi_1(U)$. Τελικά,

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}.$$

[1] Δηλαδή η τομή όλων των κανονικών υποομάδων της $\pi_1(X, x_0)$ που περιέχουν την C.

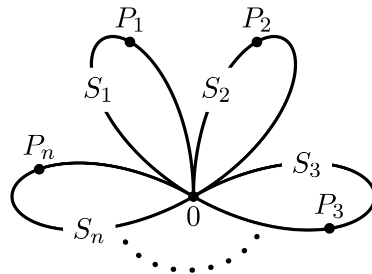


Σχήμα 19.1

□

2. **Η Θεμελιώδης ομάδα του σφηνοειδούς αθροίσματος ($X = \bigvee_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1$) είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες ($\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$) (n-παράγοντες).**

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n. Στο προηγούμενο αποδείξαμε την πρόταση για $n = 2$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n-1$. Από κάθε ένα S_i αφαιρούμε ένα σημείο $p_i \neq 0$. (σχήμα 17.13). Έτσι προκύπτει ο χώρος $W_i = S_i \backslash \{p_i\}$. Έχουμε $W_i = S_i \backslash \{p_i\} \simeq \mathbb{R}$, επομένως η ένωση οποιονδήποτε k από τα W_i είναι χώρος ομοιόμορφος με το σχήμα k ευθειών στο επίπεδο, οι οποίες έχουν ένα κοινό σημείο, άρα είναι χώρος συσταλτός, άρα απλά συνεκτικός. Θεωρούμε τους χώρους $U = S_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ και $V = W_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Τα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Επιπλέον έχουμε $X = U \cup V$ και ο $U \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ είναι απλά συνεκτικός. Άρα $\pi_1(X) = \pi_1(U) \star \pi_1(V)$.

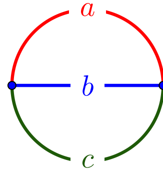


Σχήμα 19.2

Ο χώρος U είναι ομοιόμορφος με τον $\mathbb{S}^1 \cup A$, όπου A ένας δρομοσυνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ που έχει ένα κοινό σημείο με τον $\mathbb{S}^1$, άρα ο $\mathbb{S}^1$ είναι συστολή παραμόρφωσης του U, συνεπώς $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z}$. Για τον χώρο V έχουμε ότι $W_1 \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\big) = \{0\}$, άρα $\pi_1(V) = \pi_1(W_1) * \pi_1\big(\bigvee_{i=2}^{n} \mathbb{S}^1\big) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$.(($n-1$)-παράγοντες). Επομένως $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ (n-παράγοντες). □

3. **Η θεμελιώδης ομάδα του "χώρου Θήτα" είναι η ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες.**

Απόδειξη: Κατ' αρχάς ο χώρος Θήτα (συμβολικά Θ) είναι ο χώρος, με την επαγόμενη από τον $\mathbb{R}^2$ Ευκλείδεια τοπολογία, που αποτελείται από το άνω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου, την διάμετρο του μοναδιαίου κύκλου που ορίζεται από τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ και το κάτω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου. Τους τρεις αυτούς δρόμους ονομάζουμε a, b και c, αντιστοίχως. Δηλαδή έχουμε $\Theta = \mathrm{a}\cup\mathrm{b}\cup\mathrm{c}$. Από τον χώρο Θήτα αφαιρούμε το σημείο (0,1) και παίρνουμε το ανοικτό σύνολο U. Επίσης αφαιρούμε το σημείο (0,-1) και παίρνουμε το ανοικτό σύνολο V. Έχουμε $U \cup V = \Theta$ και $U \cap V = \Theta \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.
Παρατηρούμε ότι ο χώρος $U \cap V$ είναι συσταλτός, άρα απλά συνεκτικός, επομένως $\pi_1(\Theta) = \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Για τον υπολογισμό της $\pi_1(U)$ παρατηρούμε ότι ο χώρος U είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον χώρο $\mathrm{b}\cup\mathrm{c}$, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με τον χώρο $\mathbb{S}^1$, άρα $\pi_1(U) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Ομοίως $\pi_1(V) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Επομένως $\pi_1(\Theta) = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.



Σχήμα 19.3

□

19.2 Ομάδες ομοτοπίας τάξης $n \geq 2$

Ήδη στον πρόλογο του 15ου κεφαλαίου επισημάναμε τις αδυναμίες της θεμελιώδους ομάδας, την οποία αλλιώς ονομάζουμε και ομάδα ομοτοπίας τάξης 1.[2] Ως εκ τούτου, η αναζήτηση αλγεβρικών εργαλείων ισχυρότερων της θεμελιώδους ομάδας είναι ένα σημαντικό ζητούμενο. Ανάμεσα στα έτη 1932 έως και 1936 ο Γερμανός μαθηματικός W. Hurewitz (1904-1956) έδωσε τον ορισμό και απέδειξε τις ιδιότητες της ομάδας ομοτοπίας τάξης $n > 1$. Οι ομάδες αυτές, παρότι είναι πολύ δύσκολα υπολογίσιμες σε αντίθεση με τις ομάδες ομολογίας, έχουν μια σημαντική θέση στην αλγεβρική τοπολογία.

Ορισμός 19.2.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Ονομάζουμε $F_n(X,x_0)$ το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων $\alpha : \mathbb{I}^n \to X$, για τις οποίες $\alpha(\mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n)) = \{x_0\}$. Υπενθυμίζουμε ότι $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} t_i(1-t_i) = 0$. Τα στοιχεία του $F_n(X,x_0)$ τα ονομάζουμε **n-διάστατους βρόχους του X με βάση το x_0**. Η ομοτοπία $\approx (rel.\,\mathrm{Bd}(\mathbb{I}^n))$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο $F_n(X,x_0)$, την οποία συμβολίζουμε με $\approx$. Δηλαδή $\alpha \approx \beta$, αν και μόνον, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : \mathbb{I}^n \times \mathbb{I} \to X$ (ομοτοπία), ώστε

- $F(t_1,t_2,\ldots,t_n,0) = \alpha(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ για κάθε $(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in \mathbb{I}^n$,

[2]Οι ενδιαφερόμενοι για τις αποδείξεις των προτάσεων της παρούσης παραγράφου μπορούν να συμβουλευθούν το [10]

- $F(t_1, t_2, \ldots, t_n, 1) = \beta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ για κάθε $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{I}^n$ και
- $F(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = x_0$ για κάθε $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \text{Bd}(\mathbb{I}^n)$ και για κάθε $t \in \mathbb{I}$.

Την κλάση ισοδυναμίας, την οποία ορίζει ο βρόχος α την συμβολίζουμε με $[\alpha]$, το δε σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας το συμβολίζουμε με $\pi_n(X, x_0)$. Στο σύνολο $F_n(X, x_0)$ ορίζουμε την πράξη $*$ της σύνθεσης των n-διάστατων βρόχων α, β ως εξής:

$$(\alpha * \beta)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Αποδεικνύεται ότι

- Η απεικόνιση $\alpha * \beta$ είναι συνεχής (λήμμα επικόλλησης), με $(\alpha * \beta)(t_1, ..., t_n) = x_0$, αν $(t_1, ..., t_n) \in \text{Bd}(\mathbb{I}^n)$. Άρα $(\alpha * \beta) \in F_n(X, x_0)$.
- Αν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F_n(X, x_0)$, με $\alpha_1 \approx \alpha_2$ και $\beta_1 \approx \beta_2$, τότε $\alpha_1 * \beta_1 \approx \alpha_2 * \beta_2$, επομένως η πράξη $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ στο σύνολο $\pi_n(X, x_0)$ είναι καλώς ορισμένη.
- Το σύνολο $\pi_n(X, x_0)$ με την πράξη του πολλαπλασιασμού, όπως την ορίσαμε πιο πάνω είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $e : \mathbb{I}^n \to X$, με $e(t_1, \ldots, t_n) = x_0$ και αντίστροφο του $[\alpha]$ το $[\overline{\alpha}]$, όπου $\overline{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = \alpha(1 - t_1, \ldots, t_n)$

Η ομάδα $\pi_n(X, x_0)$, όπως ορίστηκε πιο πάνω ονομάζεται n-**οστή ομάδα ομοτοπίας του** X **με βάση το** x_0.

Παρατήρηση: Επειδή $\mathbb{I}^n/\text{Bd}(\mathbb{I}^n) \cong \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε τους n-διάστατους βρόχους με βάση το x_0, ως συνεχείς απεικονίσεις

$$\alpha : \mathbb{S}^n \to X, \text{ με } \alpha(1, 0, \ldots, 0) = x_0.$$

Οι ιδιότητες της $\pi_n(X, x_0)$ είναι ανάλογες εκείνων της θεμελιώδους ομάδας, εκτός από την τελευταία στην απαρίθμηση που ακολουθεί:

i) Αν ο X είναι δρομοσυνεκτικός χώρος και $x_0, x_1 \in X$, τότε $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$ για κάθε n.

ii) Αν ο X είναι συσταλτός, τότε $\pi_n(X) \simeq \{0\}$ για κάθε n.

iii) Αν X, Y τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$, τότε $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

iv) Κάθε απεικόνιση ζευγών $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ επάγει ομομορφισμό

$$\pi_n(f) = f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0),$$

ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις:

α΄) Αν $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ και $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ απεικονίσεις ζευγών, τότε για τον ομομορφισμό

$(g \circ f)_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Z, z_0)$ ισχύει $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (συναρτησιακότητα) και

β΄) Η ταυτοτική απεικόνιση $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$, επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό $i_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$.

v) Αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες, τότε για τους ομομορφισμούς f_*, g_* ισχύει $f_* = g_*$.

vi) Αν $(X, x_0) \approx (Y, y_0)$, τότε $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(Y, y_0)$ για κάθε n και

vii) Οι ομάδες $\pi_n(X, x_0)$ για κάθε $n \geq 2$ είναι αβελιανές.

Στην εισαγωγή της παρούσης παραγράφου ισχυριστήκαμε ότι ο υπολογισμός των n-οστών ομάδων ομοτοπίας για $n \geq 2$ είναι υπόθεση εξαιρετικά δυσχερής. Για τις ομάδες ομοτοπίας της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ αποδείχθηκε ότι $\pi_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ και $\pi_k(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$, αν $k < n$. Για $k > n$ θα αναμέναμε ότι $\pi_k(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$, κατ' αναλογίαν του $H_k(\mathbb{S}^n) \simeq \{0\}$. Κάτι τέτοιο όμως, δεν αληθεύει πάντα, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε κάθε συνεχής απεικόνιση από τον $\mathbb{S}^k$ στον $\mathbb{S}^n$ να είναι μηδενοτοπική, γιατί είναι ένας k-διάστατος βρόχος στον $\mathbb{S}^n$, σύμφωνα με την παρατήρηση του ορισμού 17.5.1. Όμως ο H. Hopf το 1931, έδωσε ένα παράδειγμα συνεχούς απεικόνισης $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, η οποία δεν είναι μηδενοτοπική, επομένως η $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ δεν είναι η τετριμμένη.

Το πρόβλημα του υπολογισμού της ομάδας $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ για $k > n$, παρά τις μερικές ανακαλύψεις που έγιναν στο μεταξύ παραμένει ακόμη άλυτο. Στις δεκαετίες του 50 και του 60 ήταν ένα από τα προβλήματα αιχμής της μαθηματικής έρευνας. Σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως οι Pontryangin, Serre και Adams[3] ασχολήθηκαν με αυτό.

19.3 Πολλαπλότητες

Οι πολλαπλότητες είναι ίσως η πιο σημαντική κατηγορία τοπολογικών χώρων, γιατί τις συναντάμε παντού στα μαθηματικά και έξω από αυτά: στην διαφορική γεωμετρία, στην μιγαδική ανάλυση, στην άλγεβρα, στην αλγεβρική γεωμετρία, στην κλασσική μηχανική, στην γενική θεωρία σχετικότητας και στην κβαντομηχανική.

Ορισμός 19.3.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **τοπικά Ευκλείδειος** στην διάσταση n, αν και μόνον, αν κάθε $q \in X$ έχει περιοχή U_q, η οποία είναι ομοιόμορφη με τον ανοικτό δίσκο $\mathbb{B}^n$. Αν $f_q : U_q \to \mathbb{B}^n$ είναι ένας ομοιομορφισμός, τότε το ζεύγος (U_q, f_q) ονομάζεται **τοπολογικός χάρτης** στον X. Μια οικογένεια $(U_q, f_q), q \in Q$ χαρτών στον X ονομάζεται **τοπολογικός άτλας** στον X, αν και μόνον, αν $\bigcup_{q \in Q} U_q = X$.

Παρατηρήσεις:

[3]Jean Piere Serre (1926-): Γάλλος μαθηματικός. Lev Semeonovich Pontryagin (1908-1988): Ρώσος μαθηματικός. John Frank Adams (1930-1989): Άγγλος μαθηματικός.

1. Στον πιο πάνω ορισμό, μπορούμε να παίρνουμε αντί του ανοικτού δίσκου $\mathbb{B}^n$ τον $\mathbb{R}^n$, γιατί $\mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n$.
2. Άμεση συνέπεια του ορισμού των τοπικά Ευκλείδειων χώρων είναι το ότι κάθε τοπικά Ευκλείδειος χώρος είναι τοπικά συμπαγής χώρος.

Ορισμός 19.3.2. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται n- **διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα** ή απλώς n-πολλαπλότητα, αν και μόνον, αν ισχύουν τα

- Ο X είναι Hausdorff.
- Ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.
- Ο X είναι τοπικά Ευκλείδειος.

Παρατηρήσεις:

1. Ορισμένοι μαθηματικοί δεν απαιτούν οι πολλαπλότητες να είναι 2οι αριθμήσιμοι τοπολογικοί χώροι. Όσοι κάνουν το αντίθετο είναι γιατί θέλουν να αποφύγουν να εντάξουν στις πολλαπλότητες κάποιους "παθολογικούς" χώρους, όπως είναι η λεγόμενη "μακρυά ευθεία", την περιγραφή της οποίας αποφεύγουμε να κάνουμε, επειδή είναι εκτός των στόχων του παρόντος.
2. Οι 2-πολλαπλότητες ονομάζονται **επιφάνειες**.

Παραδείγματα 19.3.1.

1. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι προφανώς μια n-πολλαπλότητα.
2. Αν X είναι μια n-πολλαπλότητα, τότε κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι επίσης μια n-πολλαπλότητα.
3. Ο $\mathbb{S}^n$ είναι Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος, ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$. Έστω $q \in \mathbb{S}^n$ και $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$. Το $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ είναι μια περιοχή του q, με $\mathbb{S}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ (στερεογραφική προβολή), άρα ο $\mathbb{S}^n$ είναι και τοπικά Ευκλείδειος στη διάσταση n, επομένως είναι μια n-πολλαπλότητα.
4. Ο χώρος $P\mathbb{R}^n$, όπως είδαμε στην παράγραφο 9.5 είναι Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος. Θα αποδείξουμε ότι είναι και τοπικά Ευκλείδειος. Θεωρούμε τον χώρο $P\mathbb{R}^n$, ως χώρο πηλίκο στον $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ από τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0; y = \lambda x$ (παρατήρηση στον ορισμό 9.5.1). Θεωρούμε το σύνολο $V_i = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} / x_i \neq 0\}$ και το $U_i = pr(V_i)$. Έχουμε
$$V_i \subseteq pr^{-1}\big(pr(V_i)\big) \tag{19.3}$$
Επιπλέον
$$\begin{aligned} y \in pr^{-1}\big(pr(V_i)\big) &\Rightarrow pr(y) \in pr(V_i) \\ &\Rightarrow \exists x \in V_i; pr(y) = pr(x) \\ &\Rightarrow \exists (x \in V_i \wedge \lambda \neq 0); y = \lambda x \\ &\Rightarrow y_i = \lambda x_i \neq 0 \\ &\Rightarrow y \in V_i, \end{aligned}$$

άρα

$$pr^{-1}\big(pr(V_i)\big) \subseteq V_i \tag{19.4}$$

Από τις (19.3) και (19.4), έπεται ότι $pr^{-1}\big(pr(V_i)\big) = V_i$. Επειδή το $pr^{-1}\big(pr(V_i)\big) = V_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ το $pr(V_i) = U_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $P\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, με

$$\phi_i\big([x_1;\cdots;x_i;\cdots;x_{n+1}]\big) = \big(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\big).$$

Η απεικόνιση $\phi_i \circ pr : V_i \to \mathbb{R}^n$ απεικονίζει το $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in V_i$ στο $\big(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\big) \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής (αποδεικνύεται με χρήση του θεωρήματος μεταφοράς), άρα (πρόταση 9.2.2) η ϕ_i είναι συνεχής. Ακολούθως θεωρούμε την $\psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$, με

$$\psi_i(u_1,\ldots,u_n) = [u_1;\cdots;u_{i-1};1;u_i;\cdots;u_n].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(\psi_i \circ \phi_i)\big([x_1;\cdots;x_{n+1}]\big) &= \psi_i\big(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\big)\\ &= \big[\frac{x_1}{x_i};\cdots;\frac{x_{i-1}}{x_i};1;\frac{x_{i+1}}{x_i};\cdots\frac{x_{n+1}}{x_i}\big]\\ &= [x_1;\cdots;x_{n+1}]\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(\phi_i \circ \psi_i)(u_1,...,u_n) &= \phi_i\big([u_1;\cdots;u_{i-1};1;u_i;\cdots;u_n]\big)\\ &= (u_1,...,u_n),\end{aligned}$$

άρα $\phi_i^{-1} = \psi_i$. Η $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, με $f_i(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_i,\ldots,u_n)$ είναι προφανώς συνεχής και $\psi_i = pr \circ f_i$, άρα και η ψ_i είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών, επομένως η $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον $P\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, άρα ο $P\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Ευκλείδειος χώρος στην διάσταση n. Συνεπώς ο $P\mathbb{R}^n$ είναι μια n-πολλαπλότητα.

Πρόταση 19.3.1. *Αν X είναι μια m-πολλαπλότητα και Y είναι μια n-πολλαπλότητα, τότε ο χώρος $X \times Y$ είναι μια $m+n$-πολλαπλότητα.*

Απόδειξη: Οι χώροι X και Y είναι Hausdorff, επομένως ο χώρος $X \times Y$ είναι Hausdorff (πρόταση 3.3.7). Έστω $\{U_1,\ldots,U_n,\ldots\}$ μια βάση του χώρου X και $\{V_1,\ldots,V_n,\ldots\}$ μια βάση του χώρου Y, τότε το σύνολο $\{U_i \times V_j / i,j \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση του χώρου $X \times Y$ (πρόταση 1.5.6), επομένως, επειδή το τελευταίο σύνολο είναι αριθμήσιμο, ο χώρος $X \times Y$ είναι 2ος αριθμήσιμος. Θεωρούμε $(x,y) \in X \times Y$. Επειδή ο X είναι μια m-πολλαπλότητα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X, με $x \in U$ και $U \cong \mathbb{R}^m$. Ομοίως, επειδή ο Y είναι μια n-πολλαπλότητα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του Y, με $y \in V$ και $V \cong \mathbb{R}^n$. Άρα το $U \times V$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$ με $(x,y) \in U \times V$ και $U \times V \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Επιπλέον $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$, άρα ο χώρος $X \times Y$ είναι και τοπικά Ευκλείδειος στην διάσταση $m+n$, επομένως είναι μια $m+n$-πολλαπλότητα. □

Παραδείγματα 19.3.2.

1. Η σπείρα $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ είναι μια επιφάνεια.

2. Ο άπειρος κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ είναι μια επιφάνεια.

Ορισμός 19.3.3. Ένας τοπολογικός χώρος X, ο οποίος είναι Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος ονομάζεται n-**τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο** ή απλώς n-πολλαπλότητα με σύνορο, αν και μόνο, αν κάθε $x \in X$ έχει περιοχή, η οποία είναι ομοιόμορφη ή με τον $\mathbb{R}^n$ ή με τον $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Τα σημεία, τα οποία έχουν περιοχή ομοιόμορφη με τον $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ αποτελούν το σύνορο της πολλαπλότητας.

Παραδείγματα 19.3.3.

1. Ο κλειστός n-διάστατος δίσκος $\mathbb{D}^n$ είναι μια n-πολλαπλότητα με σύνορο. Το σύνορο της είναι η σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$.

2. Ο κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ είναι μια διδιάστατη πολλαπλότητα με σύνορο και ότι το σύνορο της πολλαπλότητας είναι το $\big(\mathbb{S}^1 \times \{0\}\big) \cup \big(\mathbb{S}^1 \times \{1\}\big)$.

3. Η λωρίδα του Moebius είναι μια διδιάστατη πολλαπλότητα με σύνορο και ότι το σύνορο της είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$.

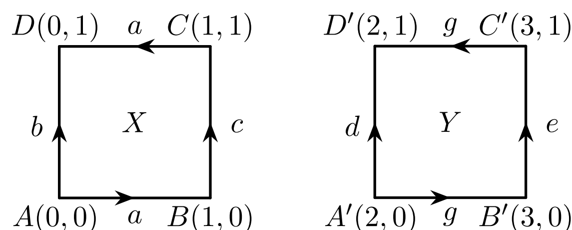
Πρόταση 19.3.2. *Αν X είναι μια n-πολλαπλότητα με σύνορο το A, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Εύκολη, αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 19.3.3. *Αν X, Y είναι δύο n-πολλαπλότητες με σύνορα τα A, B, αντιστοίχως και $f : A \to B$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε ο χώρος $X \bigsqcup_f Y$ είναι μια n-πολλαπλότητα.*

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση. □

Παράδειγμα 19.3.1. Στο σχήμα 19.4 φαίνονται δύο αντίτυπα X, Y της λωρίδας Moebius. Το σύνορο του X είναι το $b \cup c$ και το σύνορο του Y είναι το $d \cup e$.



Σχήμα 19.4

Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $f : b \sqcup c \to d \sqcup e$ με $f((0,t)) = (3, 1-t)$ και $f((1,t)) = (2,t)$. Τότε έχουμε $X \bigsqcup_f Y \cong P\mathbb{R}^2$. Δηλαδή μια κατάλληλη επικόλληση δύο λωρίδων Moebius δίνει το προβολικό επίπεδο. Οι δύο πρώτες είναι επιφάνειες με σύνορο και η τρίτη επιφάνεια.

Πρόταση 19.3.4. *Αν S_1 και S_2 είναι δύο n-πολλαπλότητες με σύνορα A_1 και A_2, αντιστοίχως και $f : S_1 \to S_2$ ένας ομοιομορφισμός, τότε ο περιορισμός f/A_1 της f στον χώρο A_1 είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των A_1 και A_2.*

Απόδειξη: Έστω $x \in S_1 \setminus A_1$ και U μια περιοχή του x, για την οποία υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{R}^n \to U$. Επειδή η f είναι ομοιομορφισμός το $f(U)$ είναι περιοχή του $f(x)$. Επιπλέον η απεικόνιση $f \circ h : \mathbb{R}^n \to f(U)$ είναι ομοιομορφισμός, άρα $f(x) \in S_2 \setminus A_2$. Επομένως

$$f(S_1 \setminus A_1) \subseteq S_2 \setminus A_2. \tag{19.5}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την f^{-1} έχουμε ότι $f^{-1}(S_2 \setminus A_2) \subseteq S_1 \setminus A_1$, άρα

$$S_2 \setminus A_2 \subseteq f(S_1 \setminus A_1). \tag{19.6}$$

Από τις (19.5) και (19.6) έχουμε ότι

$$f(S_1 \setminus A_1) = S_2 \setminus A_2,$$

άρα $f(A_1) = f(A_2)$. Συνεπώς ο περιορισμός της f στο A_1 είναι μια καλώς ορισμένη απεικόνιση, η οποία είναι επί του A_2. Επιπλέον η f/A_1 είναι 1-1. Έστω V ένα κλειστό υποσύνολο του A_2. Επειδή το A_2 είναι κλειστό υποσύνολο του S_2 το V θα είναι κλειστό υποσύνολο του S_2. Άρα, από την συνέχεια της f έχουμε ότι το $f^{-1}(V) = (f/A_1)^{-1}(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του S_1, άρα το $(f/A_1)^{-1}(V) \cap A_1 = (f/A_1)^{-1}(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του A_1, επομένως η f/A_1 είναι συνεχής. Ομοίως αποδεικνύεται και η συνέχεια της $(f/A_1)^{-1}$. Επομένως η f/A_1 είναι ομοιομορφισμός. □

Παράδειγμα 19.3.2. Η λωρίδα Moebius και ο κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ δεν είναι χώροι ομοιόμορφοι.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $f : \mathbb{M} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε ο περιορισμός της f στο σύνορο της $\mathbb{M}$ το οποίο είναι ομοιόμορφο με τον $\mathbb{S}^1$ είναι ένας ομοιομορφισμός με το σύνορο της $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, το οποίο είναι ομοιόμορφο με τον χώρο $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$, άρα

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 &\Rightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \simeq H_1(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \\ &\Rightarrow \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

άτοπο.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία των πολλαπλοτήτων είναι το ότι κάθε n-πολλαπλότητα μπορεί να εμφυτευθεί σε έναν Ευκλείδειο χώρο. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό ξεκινώντας από τις συμπαγείς πολλαπλότητες. Οι ορισμοί και τα λήμματα που ακολουθούν είναι απαραίτητα για την απόδειξη αυτή.

Ορισμός 19.3.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και η απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$. Η κλειστότητα του συνόλου $f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \{x \in X / f(x) \neq 0\}$ ονομάζεται **στήριγμα της** f και συμβολίζεται με $support(f)$, δηλαδή $support(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}^*)}$.

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του ορισμού του στηρίγματος της απεικόνισης f είναι η συνεπαγωγή: αν $x \in support(f)$, τότε για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $y \in U$, ώστε $f(y) \neq 0$ και η συνεπαγωγή: αν $x \notin support(f)$, τότε υπάρχει περιοχή U του x, ώστε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in U$.

Ορισμός 19.3.5. Έστω $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του τοπολογικού χώρου X. Η ακολουθία συνεχών απεικονίσεων $\phi_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, η οποία έχει τις ιδιότητες:

- $support(\phi_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και
- $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$

ονομάζεται **διαμέριση της μονάδας** που κυριαρχείται από το $\mathcal{C}$.

Λήμμα 19.3.5. *Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{C}' = \{V_1, \ldots, V_n\}$ του X (εκλέπτυνση του $\mathcal{C}$) τέτοιο, ώστε $\overline{V}_i \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στον πληθικό αριθμό n του καλύμματος $\mathcal{C}$. Η πρόταση ισχύει για $n = 1$, γιατί $U_1 = X$, άρα, αν $V_1 = U_1$, τότε $V_1 = \overline{V}_1 = U_1$. Δεχόμαστε ότι ισχύει για κάθε ανοικτό κάλυμμα του X με $n-1$ στοιχεία και θεωρούμε το σύνολο $A = X \setminus U_n$. Το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, άρα, σύμφωνα με την δεύτερη παρατήρηση της πρότασης 3.5.6, το A είναι ένας φυσιολογικός χώρος, ο οποίος καλύπτεται από το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{D} = \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{D}' = \{V_1, \ldots, V_{n-1}\}$ του A τέτοιο, ώστε $\overline{V_i} \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$. Επιπλέον το $B = X \setminus \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} U_i\big)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, με $B \subseteq U_n$, άρα, από την φυσιολογικότητα του χώρου συνεπάγεται ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V_n του X, ώστε $B \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq U_n$. Επομένως το $\{V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n\}$ είναι το ζητούμενο κάλυμμα $\mathcal{C}'$. □

Λήμμα 19.3.6. *Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ μια ανοικτή κάλυψη του X. Τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από το $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το εκλεπτυσμένο κάλυμμα $\mathcal{C}' = \{V_1, \ldots, V_n\}$ του προηγουμένου λήμματος, για το οποίο υπάρχει εκλεπτυσμένο κάλυμμα $\mathcal{D} = \{W_1, \ldots, W_n\}$, ώστε $\overline{W}_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$. Τα $\overline{W}_i$ και $X \setminus V_i$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, άρα (λήμμα Urysohn) υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\phi_i : X \to [0, 1]$, ώστε $\phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in \overline{W}_i$ και $\phi_i(x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus V_i$. Επομένως

$$\begin{aligned} \phi_i(x) \neq 0 &\Rightarrow x \notin X \setminus V_i \\ &\Rightarrow x \in V_i \\ &\Rightarrow support(\phi_i) \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i. \end{aligned}$$

Έστω $\phi : X \to \mathbb{R}$, με $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x)$. Είναι $\phi_i(x) \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $\phi(x) \geq 0$. Επειδή το $\mathcal{D}$ είναι κάλυμμα του X υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε $x \in W_i \subseteq \overline{W}_i$,

άρα $\phi_i(x) = 1$, άρα $\phi(x) > 0$. Θεωρούμε την $\psi_i : X \to \mathbb{R}$, με $\psi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)}$. Έχουμε $\psi_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow \phi_i(x) \neq 0$, άρα $support(\psi_i) = support(\phi_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)}{\phi(x)} = 1$ για κάθε $x \in X$. Επομένως η ακολουθία $\psi_1, \ldots, \psi_n$ είναι μια διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από το κάλυμμα $\mathcal{C}$. □

Πρόταση 19.3.7. *Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής Hausdorff και τοπικά Ευκλείδειος στην διάσταση n, τότε εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό του τοπικά Ευκλείδειου χώρου στην διάσταση n έχουμε ότι για κάθε $X \in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ομοιόμορφη με τον $\mathbb{R}^n$. Το $\{U_x / x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς X, επομένως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του πιο πάνω καλύμματος, έστω το $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_m\}$. Κατ' αρχάς θεωρούμε τους ομοιομορφισμούς $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Ο χώρος X είναι συμπαγής και Hausdorff , άρα είναι φυσιολογικός, επομένως υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\phi_1, \ldots, \phi_m$, η οποία κυριαρχείται από το κάλυμμα $\mathcal{C}$. Αν $A_i = support\phi_i$ ορίζουμε την $g_i : X \to \mathbb{R}^n$, με $g_i(x) = \begin{cases} h_i(x)\phi_i(x), & x \in U_i \\ (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, & x \in X \setminus A_i \end{cases}$. Η g_i είναι καλώς ορισμένη, γιατί, αν $x \in U_i \cap (X \setminus A_i)$, τότε $\phi_i(x) = \mathbf{0}$, άρα $g_i(x) = \mathbf{0}$. Η g_i είναι συνεχής, γιατί ο περιορισμός της σε κάθε ένα από τα ανοικτά U_i και $X \setminus A_i$ είναι συνεχής. Τέλος θεωρούμε την $G : X \to \mathbb{R}^{m+nm}$, με $G(x) = \big(\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)\big)$, η οποία είναι συνεχής, γιατί όλες οι συντεταγμένες της είναι συνεχείς. Έστω ότι $x, y \in X$, με $G(x) = G(y)$. Επειδή $\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) = 1$ υπάρχει $i \in \{1, \ldots, m\}$, ώστε $\phi_i(x) > 0$, άρα $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$. Επιπλέον $g_i(x) = g_i(y)$, άρα $\frac{g_i(x)}{\phi_i(x)} = \frac{g_i(y)}{\phi_i(y)}$, άρα $h_i(x) = h_i(y)$ και, επειδή ο h_i είναι ομοιομορφισμός έχουμε $x = y$, δηλαδή η G είναι 1-1. Επιπλέον ο χώρος X είναι συμπαγής και ο χώρος $\mathbb{R}^{m+mn}$ είναι Hausdorff, επομένως η G είναι μια εμφύτευση, δηλαδή το ζητούμενο. □

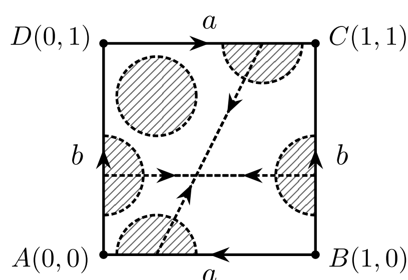
Πόρισμα. *Κάθε συμπαγής πολλαπλότητα X εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο.*

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και χωρίς την απαίτηση να είναι ο χώρος X συμπαγής, γιατί στην περίπτωση που ο X δεν είναι συμπαγής, επειδή, ως πολλαπλότητα είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff έχει μια μοναδική καθ' ομοιομορφισμόν συμπαγοποίηση με ένα σημείο (πρόταση 5.2.7), ας πούμε τον χώρο Y. Από την προηγηθείσα πρόταση υπάρχει εμφύτευση $G : Y \to \mathbb{R}^k$. Ο X, όπως γνωρίζουμε από την απόδειξη της πρότασης 5.2.7 είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, επομένως η G απεικονίζει τα ανοικτά υποσύνολα του X σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$, άρα ο περιορισμός της G στον X είναι επίσης εμφύτευση. Δηλαδή αληθεύει η επόμενη πρόταση

Πρόταση 19.3.8. *Κάθε n-πολλαπλότητα εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο.*

Πρόταση 19.3.9. *Η μποτίλια του Klein είναι μια επιφάνεια.*

Απόδειξη: Η μποτίλια Klein, όπως φαίνεται στο σχήμα 19.5.

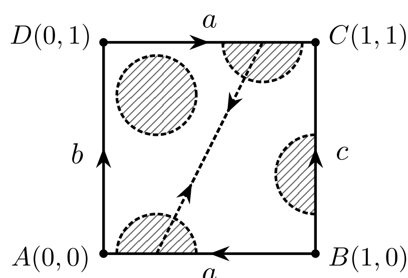


Σχήμα 19.5

είναι τοπικά Ευκλείδειος χώρος στην διάσταση 2. Στην άσκηση 9.11 αποδείξαμε ότι είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff, επομένως εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, άρα είναι και 2ος αριθμήσιμος, συνεπώς είναι μία 2-πολλαπλότητα, δηλαδή μια επιφάνεια.

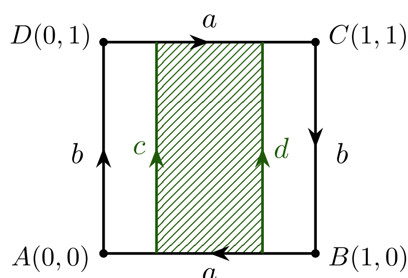
Πρόταση 19.3.10. *Η λωρίδα Moebius είναι μια επιφάνεια.*

Απόδειξη: Κάθε σημείο της λωρίδας Moebius, όπως φαίνεται στο σχήμα 19.6



Σχήμα 19.6

έχει περιοχή ομοιόμορφη με τον $\mathbb{R}^2$ ή με τον $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. επιπλέον, όπως φαίνεται στο σχήμα 19.7



Σχήμα 19.7

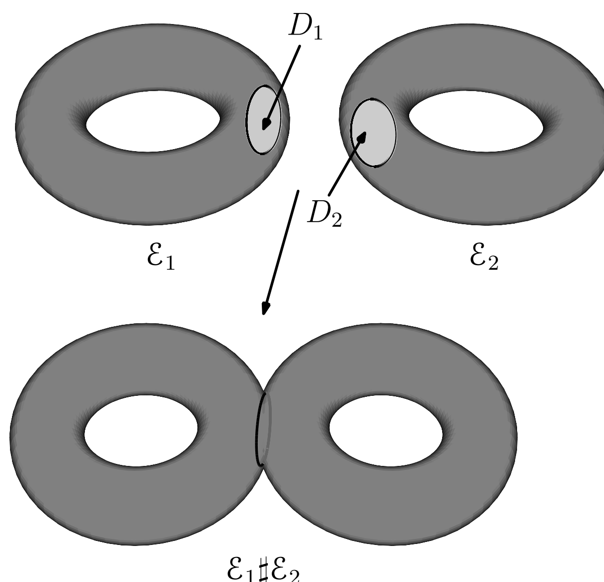
είναι υπόχωρος της μποτίλιας Klein, άρα είναι Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος, επομένως είναι μια επιφάνεια. □

Σύντομα, χωρίς αποδείξεις στα θεωρήματα,[4] θα αναφερθούμε στο θέμα της ταξινόμησης των πολλαπλοτήτων. **Ταξινόμηση** στην κλάση των n-πολλαπλοτήτων σημαίνει ο ορισμός σ' αυτήν μιας σχέσης ισοδυναμίας, ώστε δύο n-πολλαπλότητες είναι ισοδύναμες, αν και μόνον, αν είναι ομοιόμορφες. Πρώτος ο Poincare έθεσε το πρόβλημα της ταξινόμησης των πολλαπλοτήτων με την περίφημη εικασία του, σύμφωνα με την οποία η μόνη καθ' ομοιομορφισμό 3-πολλαπλότητα, η οποία είναι συμπαγής και απλά συνεκτική είναι η $\mathbb{S}^3$. Η εικασία Poincare έγινε τελικά μετά από εκατό χρόνια θεώρημα από τον Ρώσο μαθηματικό Grigori Perelman (1966-). Πριν το 1961 ο Αμερικανός μαθηματικός Stefen Smale (1930-) απέδειξε τον ισχυρισμό Poincare για n-πολλαπλότητες με $n \geq 5$, ενώ ο Αμερικανός μαθηματικός Michael Freedman (1951-) απέδειξε τον ισχυρισμό για $n = 4$. Πριν από αυτούς ο Ρώσος μαθηματικός A. A. Markov (1903-1979) απέδειξε ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος για την ταξινόμηση όλων των n-πολλαπλοτήτων, όταν $n \geq 4$.

Για τις μονοδιάστατες πολλαπλότητες ισχύει η εξής πρόταση: Κάθε 1-πολλαπλότητα είναι ομοιόμορφη ή με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$ ή με την πραγματική ευθεία.[5]

Για την ταξινόμηση των συμπαγών και συνεκτικών επιφανειών ισχύει ένα θεώρημα, για την κατανόηση του οποίου χρειάζεται να οριστούν οι έννοιες του συνεκτικού αθροίσματος, του τριγωνισμού και του προσανατολισμού.

Ορισμός 19.3.6. Έστωσαν $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ δύο ξένες συμπαγείς και συνεκτικές επιφάνειες. Επειδή, από τον ορισμό των συμπαγών επιφανειών οι $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ είναι χώροι φυσιολογικοί, υπάρχουν $D_1 \subseteq \mathcal{E}_1$ και $D_2 \subseteq \mathcal{E}_2$, ώστε $D_1 \cong D_2 \cong \mathbb{D}^2$. Τότε $D_1^0 \cong D_2^0 \cong \mathbb{B}^2$ και $\operatorname{Bd} D_1 \cong \operatorname{Bd} D_2 \cong \mathbb{S}^1$ (πρόταση 7.2.13). Έστω $f : \operatorname{Bd} D_1 \to \operatorname{Bd} D_2$ ένας ομοιομορφισμός. Θεωρούμε του χώρους $S_1 = \mathcal{E}_1 \setminus D_1^0$ και $S_2 = \mathcal{E}_2 \setminus D_2^0$. Τον χώρο $S_1 \bigsqcup_f S_2$ ονομάζουμε **συνεκτικό άθροισμα** των $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_1 \sharp \mathcal{E}_2$.



Σχήμα 19.8

[4]Για μια αναλυτική παρουσίαση αυτών που ακολουθούν βλέπε: [19], [23], [28] και [40]

[5]Για την απόδειξη παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο άρθρο του Zwoqin Wang: Classification of curves, το οποίο υπάρχει ελεύθερο στο διαδίκτυο.

Παρατηρήσεις:

1. Αποδεικνύεται ότι το συνεκτικό άθροισμα είναι καλώς ορισμένο, δηλαδή ανεξάρτητο καθ' ομοιομορφισμό από την επιλογή των D_1 και D_2 και του ομοιομορφισμού f.

2. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $\mathcal{E}_1 \sharp \mathcal{E}_2$ είναι μια επιφάνεια.

3. Για κάθε συμπαγή και συνεκτική επιφάνεια $\mathcal{E}$ ξένη με την $\mathbb{S}^2$ ισχύει $\mathcal{E} \sharp \mathbb{S}^2 \cong \mathcal{E}$.

4. Αποδεικνύεται ότι, αν $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ και $\mathcal{E}_3$ είναι συμπαγείς και συνεκτικές επιφάνειες, ξένες ανά δύο, τότε $\mathcal{E}_1 \sharp (\mathcal{E}_2 \sharp \mathcal{E}_3) \cong (\mathcal{E}_1 \sharp \mathcal{E}_2) \sharp \mathcal{E}_2$.

5. Αν $\mathcal{E}$ είναι μια συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια, τότε, λόγω της προηγούμενης παρατήρησης το συνεκτικό άθροισμα $\mathcal{E}_1 \sharp \cdots \sharp \mathcal{E}_n$, όπου $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$ για κάθε $i = 1, ..., n$ είναι καλώς ορισμένο και συμβολίζεται με $\mathcal{E}^{(n)}$.

Ορισμός 19.3.7. Ένας υπόχωρος D μιας επιφάνειας $\mathcal{E}$ ονομάζεται **τρίγωνο** στην $\mathcal{E}$, αν και μόνο, αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : T \to D$, όπου $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$. Οι εικόνες των κορυφών του T ονομάζονται **κορυφές** του τριγώνου D. Οι εικόνες των πλευρών του T ονομάζονται **ακμές** του D. Τέλος το ίδιο το D ονομάζεται **έδρα**.

Ορισμός 19.3.8. Αν $D_1, \ldots, D_n$ μια πεπερασμένη ακολουθία τριγώνων στην επιφάνεια $\mathcal{E}$, ώστε

- $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.
- Αν $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $i \neq j$, τότε ή $D_i \cap D_j = \varnothing$ ή αν τα τρίγωνα D_i και D_j έχουν κοινά σημεία, τότε αυτά είναι μία κοινή κορυφή τους ή τα σημεία μιας κοινής ακμής τους,

τότε η ακολουθία $D_1, \ldots, D_n$ ονομάζεται **τριγωνισμός** της $\mathcal{E}$.

Παρατηρήσεις:

1. Το 1925 ο Ούγγρος μαθηματικός Tibor Rado (1895-1965) απέδειξε ότι κάθε επιφάνεια επιδέχεται τριγωνισμό.

2. Μια επιφάνεια μπορεί να έχει περισσότερους από έναν τριγωνισμούς.

Πρόταση 19.3.11. *Αν σε τριγωνισμένη μια επιφάνεια V είναι ο αριθμός των κορυφών της, F ο αριθμός των ακμών της και E ο αριθμός των εδρών της, τότε ο αριθμός $V + E - F$ είναι ανεξάρτητος από τον τριγωνισμό και εξαρτάται μόνον από την επιφάνεια.*

Ορισμός 19.3.9. Έστω $\mathcal{E}$ μια επιφάνεια, τότε ο αριθμός $V + E - F$ ονομάζεται **χαρακτηριστική Euler** της $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με $\chi(\mathcal{E})$.

Για την χαρακτηριστική του Euler αληθεύουν οι προτάσεις

Πρόταση 19.3.12. *Αν $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ είναι δύο ξένες συμπαγείς και συνεκτικές επιφάνειες, τότε*

$$\chi(\mathcal{E}_1 \sharp \mathcal{E}_2) = \chi(\mathcal{E}_1) + \chi(\mathcal{E}_2) - 2.$$

Πρόταση 19.3.13. $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, $\chi(\mathbb{T}^{(n)}) = 2 - 2n$ *και* $\chi((P\mathbb{R}^2)^{(n)}) = 2 - 2n$.

Ο προσανατολισμός είναι μια έννοια, η οποία αφορά όλες τις πολλαπλότητες. Για την κατανόησή της ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [29] και [40]. Εμείς εδώ για τις επιφάνειες θα υιοθετήσουμε έναν "βολικό" ισοδύναμο ορισμό.

Ορισμός 19.3.10. Μια επιφάνεια λέγεται **μη-προσανατολίσιμη**, αν και μόνον , αν έχει υπόχωρο, ο οποίος είναι ομοιόμορφος με την λωρίδα Moebius. Σε αντίθετη περίπτωση λέγεται **προσανατολίσιμη**.

Για τον προσανατολισμό των επιφανειών ισχύει το εξής θεώρημα

Πρόταση 19.3.14. *Μια συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια* $\mathcal{E}$ *είναι προσανατολίσιμη, αν και μόνον, αν* $H_2(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{Z}$

Για παράδειγμα η σφαίρα και η σπείρα είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες, γιατί $H_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$ και $H_2(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$. Ενώ $H_2(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$ και $H_2(P\mathbb{R}^2) \simeq \{0\}$, άρα η μποτίλια Klein και το προβολικό επίπεδο είναι μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες.
Τελειώνουμε τα των επιφανειών με το θεώρημα ταξινόμησης των συμπαγών και συνεκτικών επιφανειών

Πρόταση 19.3.15. *Δύο επιφάνειες είναι ομοιόμορφες, αν και μόνον, αν έχουν την ίδια χαρακτηριστική Euler και επιπλέον είναι και οι δύο προσανατολίσιμες ή και οι δύο μη προσανατολίσιμες.*

19.4 Αλγεβρική τοπολογία και θεωρία κατηγοριών

Στο κυρίως κείμενο αποφύγαμε να αναφερθούμε στην θεωρία των κατηγοριών, επειδή θεωρούσαμε ότι η χρήση της θεωρίας των κατηγοριών θα έκανε ακόμη πιο δύσκολες στον αρχάριο τις ήδη δύσκολες έννοιες της αλγεβρική τοπολογίας. Όμως η θεωρία των κατηγοριών είναι απαραίτητη για μια προχωρημένη "θέαση" της αλγεβρικής τοπολογίας.

Οι Αμερικανοί μαθηματικοί Samuel Eilenberg (1913-1998) και Sauders MacLane (1909-2005) εισήγαγαν τις έννοιες κατηγορία και συναρτητής από το έτος 1945, έχοντας ως αφετηρία τη συσχέτιση των τοπολογικών χώρων με τις αλγεβρικές δομές. Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, κάθε στοιχείο της κλάσης των τοπολογικών χώρων αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο της κλάσης των ομάδων, όταν πρόκειται για τις ομάδες ομοτοπίας ή σε ένα στοιχείο της κλάσης των αβελιανών ομάδων, όταν πρόκειται για τις ομάδες ομολογίας. Είμαστε προσεκτικοί και δεν χρησιμοποιούμε τον όρο "σύνολο τοπολογικών χώρων" ή "σύνολο ομάδων", γιατί δεν προκύπτει από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας η ύπαρξη τέτοιων συνόλων και αν το κάναμε θα κινδυνεύαμε να υποπέσουμε σε αντιφάσεις, σαν αυτές που συντάραξαν τα θεμέλια των μαθηματικών στις αρχές του 20ου αιώνα. Ως εκ τούτου για τις "συλλογές" αυτών των μαθηματικών αντικειμένων, χρησιμοποιούμε τον ευρύτερο όρο "κλάση". Αυτές τις κλάσεις, καθώς και τις αντιστοιχίες μεταξύ τους γενίκευσαν οι Eilemberg και Maclane για όλα τα μαθηματικά αντικείμενα, δημιουργώντας την θεωρία των κατηγοριών.

Ορισμός 19.4.1. Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ αποτελείται από τα :

α΄) Μια κλάση μαθηματικών αντικειμένων $\mathcal{O}bj(\mathcal{C})$, τα οποία ονομάζονται **αντικείμενα της κατηγορίας** και

β΄) Μια κλάση μορφισμών $Mor(X,Y)$ για κάθε ζεύγος αντικειμένων $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, ώστε η κλάση $Mor(X,Y)$ να είναι ξένη με την κλάση $Mor(X',Y')$, αν $(X,Y) \neq (X',Y')$. Τα στοιχεία της κλάσης $Mor(X,Y)$ ονομάζονται **μορφισμοί από το X στο Y**. Αν $f \in Mor(X,Y)$ γράφουμε $f : X \to Y$, χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα ότι τα X, Y είναι σύνολα και η f απεικόνιση συνόλων.

γ΄) Έναν κανόνα σύνθεσης ενός οποιουδήποτε μορφισμού f από το αντικείμενο X στο αντικείμενο Y, με έναν οποιονδήποτε μορφισμό g, από το αντικείμενο Y στο αντικείμενο Z, η οποία σύνθεση συμβολίζεται με $g \circ f$ και ικανοποιεί τα επόμενα δύο αξιώματα:

 (α΄) **Αξίωμα προσεταιριστικότητας**: Αν $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$ και $h \in Mor(X,Z)$, τότε

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

 (β΄) **Αξίωμα ταυτοτικού μορφισμού**: Για κάθε $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{C})$, υπάρχουν $i_X \in Mor(X,X)$, ώστε $i_X \circ f = f$ για κάθε $f \in Mor(Y,X)$.

Παραδείγματα 19.4.1.

1. Η κατηγορία $\mathcal{S}et$, με αντικείμενα τα σύνολα και μορφισμούς τις απεικονίσεις συνόλων.

2. Η κατηγορία $\mathcal{T}op$, με αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.

3. Η κατηγορία $\mathcal{T}op_*$ των εστιγμένων τοπολογικών χώρων, η οποία έχει ως αντικείμενα τα τοπολογικά ζεύγη (X, x_0) και μορφισμούς τις απεικονίσεις ζευγών $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, όπου $y_0 = f(x_0)$.

4. Η κατηγορία $\mathcal{T}op^2$ των τοπολογικών ζευγών, η οποία έχει ως αντικείμενα τα τοπολογικά ζεύγη (X, A) και μορφισμούς τις απεικονίσεις ζευγών $f : (X, A) \to (Y, B)$.

5. Η κατηγορία $\mathcal{G}r$, η οποία έχει ως αντικείμενα τις ομάδες και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων.

6. Η κατηγορία $\mathcal{AG}r$, η οποία έχει ως αντικείμενα τις αβελιανές ομάδες και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων.

7. Η κατηγορία $\mathcal{R}ing$, η οποία έχει ως αντικείμενα τις δακτυλίους και μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων.

8. Η κατηγορία $\mathcal{V}$, η οποία έχει ως αντικείμενα τους διανυσματικούς χώρους υπεράνω κάποιου σώματος και μορφισμούς τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των διανυσματικών αυτών χώρων.

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται, με τρόπο παρόμοιο της απόδειξης του ουδετέρου στοιχείου των ομάδων, ότι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{C})$, ο ταυτοτικός μορφισμός i_X είναι μοναδικός.

Ορισμός 19.4.2. Έστω ότι οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{C}$ είναι δύο κατηγορίες, ώστε τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$ να περιέχονται στα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Αν κάθε μορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{A}$ περιέχεται στην κλάση μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και, επιπλέον η σύνθεση των μορφισμών στην πρώτη κατηγορία γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται στην δεύτερη κατηγορία, τότε η πρώτη κατηγορία ονομάζεται **υποκατηγορία** της δεύτερης.

Παραδείγματα 19.4.2.

1. Η κατηγορία των αβελιανών ομάδων είναι υποκατηγορία της κατηγορίας των ομάδων.
2. Η κατηγορία των μετρικών χώρων είναι υποκατηγορία της κατηγορίας των τοπολογικών χώρων.
3. Η κατηγορία των συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι υποκατηγορία της κατηγορίας των τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 19.4.3. Μία **ισοδυναμία στην κατηγορία** $\mathcal{C}$ είναι ένας μορφισμός $f : A \to B$, όπου A, B δύο αντικείμενα της κατηγορίας, για τον οποίο υπάρχει μορφισμός $g : B \to A$ τέτοιος, ώστε $g \circ f = i_A$ και $f \circ g = i_B$.

Παραδείγματα 19.4.3.

1. Στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων ισοδυναμίες είναι οι ομοιομορφισμοί.
2. Στην κατηγορία των ομάδων ισοδυναμίες είναι οι ισομορφισμοί.
3. Στην κατηγορία των συνόλων ισοδυναμίες είναι οι 1-1 και επί απεικονίσεις.

Ορισμός 19.4.4. Έστωσαν $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. **Συναρτητής** F από την κατηγορία $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{D}$ λέγεται κάθε αντιστοιχία κάθε ενός αντικειμένου X της $\mathcal{C}$ σε ένα και μόνον αντικείμενο $F(X)$ της $\mathcal{D}$ και κάθε ενός μορφισμού $f \in Mor(X, Y)$ της $\mathcal{C}$ σε έναν και μόνον μορφισμό $F(f)$ της $\mathcal{D}$. Έχουμε δύο είδη συναρτητών, τους **αναλλοίωτους συναρτητές** και τους **ανταναλλοίωτους συναρτητές**. Και για τα δύο είδη συναρτητών F, ισχύει η σχέση

$$F(i_X) = i_{F(X)}. \tag{19.7}$$

Για τους μεν αναλλοίωτους συναρτητές ισχύει

$$F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi) \tag{19.8}$$

για κάθε ζεύγος μορφισμών $\psi \in Mor(A, B)$ και $\phi \in Mor(B, C)$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\phi} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \xrightarrow{F(\psi)} & F(B) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(C) \end{array} .$$

Οι δε ανταναλλοίωτοι συναρτητές, "αντιστρέφουν" την κατηγορική δομή, δηλαδή

$$F(\phi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\phi) \tag{19.9}$$

για κάθε ζεύγος μορφισμών $\psi \in Mor(A, B)$ και $\phi \in Mor(B, C)$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\phi} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \xleftarrow[F(\psi)]{} & F(B) & \xleftarrow[F(\phi)]{} & F(C) \end{array} .$$

Παραδείγματα 19.4.4.

1. Ο πρώτος συναναλλοίωτος συναρτητής που συναντήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, ήταν ο π_1 από την κατηγορία $\mathcal{T}op_*$ στην κατηγορία $\mathcal{G}r$, ο οποίος αντιστοιχεί κάθε ζεύγος (X, x_0) σε μία ομάδα την $\pi_1(X, x_0)$ και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ σε έναν ομομορφισμό $\pi_1(f) = f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

2. Ο δεύτερος συναναλλοίωτος συναρτητής που συναντήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, ήταν ο H_n από την κατηγορία $\mathcal{T}op$ στην κατηγορία $\mathcal{AG}r$, ο οποίος αντιστοιχεί κάθε χώρο X σε μία αβελιανή ομάδα την $H_n(X)$ και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ σε έναν ομομορφισμό $H_n(f) = f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ για κάθε $n \geq 0$.

3. Ο τρίτος συναναλλοίωτος συναρτητής που συναντήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, ήταν ο H_n από την κατηγορία $\mathcal{T}op^2$ στην κατηγορία $\mathcal{AG}r$, ο οποίος αντιστοιχεί κάθε τοπολογικό ζεύγος (X, A) σε μία αβελιανή ομάδα την $H_n(X, A)$ και κάθε απεικόνιση ζεύγους $f : (X, A) \to (Y, B)$ σε έναν ομομορφισμό $H_n(f) = f_*^n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

4. Αν B είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε ο δεξιός τανυστικός πολλαπλασιασμός με B, $(-, B)$ καθώς και ο αριστερός τανυστικός πολλαπλασιασμός με B, $(B, -)$ είναι δύο συναναλλοίωτοι συναρτητές από την κατηγορία των αβελιανών ομάδων στον εαυτό της. Για κάθε αβελιανή ομάδα A έχουμε $(-, B)(A) := A \otimes B$ ή $(B, -)(A) := B \otimes A$ και για κάθε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $f : A \to C$ έχουμε $(-, B)(f) := f \otimes 1 : A \otimes B \to C \otimes B$, με $(f \otimes 1)(a \otimes b) = f(a) \otimes b$ ή $(B, -)(f) := 1 \otimes f : B \otimes A \to B \otimes C$, με $(1 \otimes f)(b \times a) = b \otimes f(a)$.

5. Ο πρώτος ανταναλλοίωτος συναρτητής που συναντήσαμε στα προηγούμενα ήταν ο $\mathcal{H}$ από την κατηγορία $\mathcal{T}op$ στην κατηγορία $\mathcal{AG}r$, ο οποίος απεικονίζει κάθε τοπολογικό χώρο X σε μια αβελιανή ομάδα $\mathcal{H}(X)$, την ομάδα Brucshlinski του X και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ σε έναν ομομορφισμό $\mathcal{H}(f) = f^* : \mathcal{H}(Y) \to \mathcal{H}(X)$.

6. Αν G μια σταθερή αβελιανή ομάδα, τότε το σύνολο των ομομορφισμών από την αβελιανή ομάδα G στην αβελιανή ομάδα A, συμβολίζουμε με $\text{Hom}(G, A)$. Το σύνολο $\text{Hom}(G, A)$, με πράξη τη πρόσθεση ομομορφισμών είναι επίσης αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathcal{L} : \mathcal{AG} \to \mathcal{AG}$, με $\mathcal{L}(A) = \text{Hom}(G, A)$. Επιπλέον, αν $f : A \to B$ ένας ομομορφισμός, ορίζουμε τον $\mathcal{L}(f)$ να είναι ένας ομομορφισμός από την ομάδα $\text{Hom}(G, A)$ στην ομάδα $\text{Hom}(G, B)$, ώστε $\mathcal{L}(f)(\phi) = f \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow \phi & \searrow^{f \circ \phi} & \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

Αν $i : A \to A$ ο ταυτοτικός ομομορφισμός, τότε ο $\mathcal{L}(i)$ είναι ένας ομομορφισμός από την ομάδα $\mathrm{Hom}(G, A)$ στην ομάδα $\mathrm{Hom}(G, A)$. Έχουμε $\big((\mathcal{L})(i)(\phi)\big)(x) = i(\phi(x)) = \phi(x) \quad \forall x \in G$, άρα ο $\mathcal{L}(i)$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός της $\mathrm{Hom}(G, A)$, επομένως αληθεύει η σχέση (19.7). Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ ομομορφισμοί, τότε ο $\mathcal{L}(g \circ f)$ είναι ένας ομομορφισμός της ομάδας $\mathrm{Hom}(G, A)$ στην ομάδα $\mathrm{Hom}(G, C)$. Έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(G,A) & \xrightarrow{\mathcal{L}(f)} & \mathrm{Hom}(G,B)) & \xrightarrow{\mathcal{L}(g)} & \mathrm{Hom}(G,C) \end{array} ,$$

επομένως $\mathcal{L}(g \circ f) = \mathcal{L}(g) \circ \mathcal{L}(f)$

$$\begin{array}{ccccc} G & & & & \\ \phi\downarrow & \overset{f\circ\phi}{\searrow} & & \overset{g\circ f\circ\phi}{\searrow} & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array} ,$$

δηλαδή αληθεύει η σχέση (19.8). Συνεπώς ο $\mathcal{L}$ είναι ένας συναναλλοίωτος συναρτητής.

7. Αν G μια σταθερή αβελιανή ομάδα, τότε το σύνολο των ομομορφισμών από την αβελιανή ομάδα A στην αβελιανή ομάδα G, συμβολίζουμε με $\mathrm{Hom}(A, G)$. Το σύνολο $\mathrm{Hom}(A, G)$, με πράξη τη πρόσθεση ομομορφισμών είναι, επίσης αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathcal{K} : \mathcal{AG} \to \mathcal{AG}$, με $\mathcal{K}(A) = \mathrm{Hom}(A, G)$. Επιπλέον, αν $f : A \to B$ ένας ομομορφισμός, ορίζουμε τον $\mathcal{K}(f)$ να είναι ένας ομομορφισμός από την ομάδα $\mathrm{Hom}(B, G)$ στην ομάδα $\mathrm{Hom}(A, G)$, ώστε $\mathcal{K}(f)(\phi) = \phi \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \phi\circ f} & \swarrow{\scriptstyle \phi} & \\ G & & \end{array}$$

Αν $i : A \to A$ ο ταυτοτικός ομομορφισμός, τότε ο $\mathcal{K}(i)$ είναι ένας ομομορφισμός από την ομάδα $\mathrm{Hom}(A, G)$ στην ομάδα $\mathrm{Hom}(A, G)$. Έχουμε $\big((\mathcal{K})(i)(\phi)\big)(x) = \phi(i(x)) = \phi(x) \quad \forall x \in A$, άρα ο $\mathcal{K}(i)$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός, επομένως αληθεύει η σχέση (19.7). Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ ομομορφισμοί, τότε ο $\mathcal{K}(g \circ f)$ είναι ένας ομομορφισμός της ομάδας $\mathrm{Hom}(C, G)$ στην ομάδα $\mathrm{Hom}(A, G)$. Έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(A,G) & \xleftarrow[\mathcal{K}(f)]{} & \mathrm{Hom}(B,G) & \xleftarrow[\mathcal{K}(g)]{} & \mathrm{Hom}(C,G) \end{array} ,$$

επομένως $\mathcal{K}(g \circ f) = \mathcal{K}(f) \circ \mathcal{K}(g)$,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle \phi\circ g\circ f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \phi\circ g} & & \swarrow{\scriptstyle \phi} & \\ G & & & & \end{array},$$

δηλαδή αληθεύει η σχέση (19.9). Συνεπώς ο $\mathcal{K}$ είναι ένας ανταναλλοίωτος συναρτητής.

8. Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Ο δυικός χώρος V^* του V είναι εκείνος, ο οποίος έχει στοιχεία τις γραμμικές απεικονίσεις $f : V \to \mathbb{R}$. Ο V^* είναι επίσης, πραγματικός διανυσματικός χώρος, με πράξεις το άθροισμα των γραμμικών απεικονίσεών του και τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε απεικόνιση $\mathcal{M}$, από την κατηγορία $\mathcal{V}$ των πραγματικών διανυσματικών χώρων στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων $\mathcal{V}$, με $\mathcal{M}(V) = V^*$. Αν $T : V_1 \to V_2$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του χώρου V_1 στον χώρο V_2, τότε ορίζουμε $\mathcal{M}(T) : V_2^* \to V_1^*$, ώστε $\big(\mathcal{M}(T)\big)(\phi) = \phi \circ T$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν $i : V \to V$ είναι ο ταυτοτικός γραμμικός μετασχηματισμός, τότε ο $\mathcal{M}(i) : V^* \to V^*$ είναι επίσης, ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Επιπλέον από το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{T_1} & V_2 & \xrightarrow{T_2} & V_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_1^* & \xleftarrow[\mathcal{M}(T_1)]{} & V_2^* & \xleftarrow[\mathcal{M}(T_2)]{} & V_3^* \end{array},$$

προκύπτει ότι $\mathcal{M}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{M}(T_1) \circ \mathcal{M}(T_2)$. Συνεπώς ο $\mathcal{M}$ είναι ένας ανταναλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{V}$ στον εαυτό της.

Ορισμός 19.4.5. Έστωσαν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{A}$ κατηγορίες και F, G συναρτητές από την πρώτη στην δεύτερη κατηγορία. **Φυσικός μετασχηματισμός του συναρτητή** F **στον συναρτητή** G είναι μία οικογένεια μορφισμών T_C, $C \in \mathcal{O}bj(\mathcal{C})$ με $T_C : F(C) \to G(C)$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow{\scriptstyle T_C} & & \downarrow{\scriptstyle T_{C'}} \\ G(c) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

να είναι μεταθετικό για κάθε μορφισμό $f : C \to C'$, με $C, C' \in \mathcal{O}bj(\mathcal{C})$.

Παράδειγμα 19.4.1. Έχουμε την κατηγορία των τοπολογικών ζευγών και την κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Αν σταθεροποιήσουμε τον p, τότε για τις κατηγορίες αυτές έχουμε δύο συναρτητές. Ο πρώτος είναι ο $H_p : (X, A) \to H_p(X, A)$ και ο δεύτερος είναι ο $H_{p-1} : (A, \varnothing) \to H_{p-1}(A, \varnothing)$. Ο συνδετικός ομομορφισμός είναι ένας **φυσικός μετασχηματισμός**, γιατί το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A) & \xrightarrow{d_p} & H_{p-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle H_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{p-1}(f)} \\ H_p(Y,B) & \xrightarrow{d_p} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

19.5 Τα αξιώματα των Eilenberg-Steenrod

Στο κυρίως κείμενο συναντήσαμε τρία είδη ομολογίας: την ιδιάζουσα, την απλή και την κυτταρική ομολογία. Οι Eilenberg και Steenrod [6] το 1945, κάνοντας χρήση των εννοιών της θεωρίας κατηγοριών, όρισαν γενικά το τι είναι μία θεωρία ομολογίας σε έναν τοπολογικό χώρο, ως εξής:

Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Ομολογία του ζεύγους αυτού είναι μία ακολουθία συναναλλοίωτων συναρτητών H_n, $n \geq 0$ από το την κατηγορία των τοπολογικών ζευγών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα: [7]

- **Αξίωμα ομοτοπίας**: Αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες, τότε $H_n(f) = H_n(g)$ για κάθε $n \geq 0$.
- **Αξίωμα εκτομής**: Αν (X, A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και $U \subseteq A$, ώστε $\overline{U} \subseteq A^0$, τότε η ένθεση $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει στην ομολογία H_n ισομορφισμό για κάθε $n \geq 0$, δηλαδή $H_n(X, A) \simeq H_n(X \setminus U, A \setminus U)$.
- **Αξίωμα διάστασης**: Αν $X = \{x\}$, τότε $H_n(X) \simeq \{0\}$ για κάθε $n > 0$.
- **Αξίωμα προσθετικότητας**: Αν $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, τότε $H_n(X) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ για κάθε $n \geq 0$.
- **Αξίωμα ακρίβειας**: Υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός (συνδετικός ομομορφισμός) $d : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, ώστε η ακολουθία

  $$\cdots H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

  να είναι ακριβής.

19.6 Σημαντικές στιγμές στην ιστορία της τοπολογίας

...
Είναι παιδιά πολλών ανθρώπων τα λόγια μας.
Σπέρνονται γεννιούνται σαν τα βρέφη

[6]Norman Steenrod (1910-1971) Αμερικανός μαθηματικός

[7]Για τα επόμενα συμφωνούμε $H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$.

ριζώνουν θρέφουνται με το αίμα
Όπως τα πεύκα
κρατούνε τη μορφή του αγέρα
ενώ ο αγέρας έφυγε, δεν είναι εκεί
το ίδιο τα λόγια
φυλάγουν τη μορφή του ανθρώπου
κι' ο άνθρωπος έφυγε, δεν είναι εκεί...
Γιώργος Σεφέρης
Επί σκηνής ΣΤ!

1752 O Leonard Euler αποδεικνύει τον τύπο $V - E + F = 2$ για τα πολύεδρα.

1847 O Johann Listing δημοσιεύει το βιβλίο του "Εισαγωγικές μελέτες στην τοπολογία", όπου για πρώτη φορά εμφανίζεται ο όρος τοπολογία.

1858 O Augustus Moebius ανακαλύπτει την περίφημη ομώνυμη λωρίδα, ως μια επιφάνεια με μία μόνον όψη.

1871 O Ιταλός μαθηματικός Enrico Betti, δημοσιεύει εργασία, στην οποία ορίζονται οι ομώνυμοι αριθμοί.

1872 O Felix Klein εγκαινιάζει το "Erlangen program".

1877 O Georg Cantor βρίσκει μια 1-1 και επί απεικόνιση των σημείων μιας πλευράς ενός τετραγώνου στο σύνολο όλων των σημείων του τετραγώνου.

1882 O Felix Klein ανακαλύπτει την περίφημη ομώνυμη μποτίλια του.

1883 O Georg Cantor ανακαλύπτει το περίφημο σύνολο που φέρει το όνομά του.

1892 O Camile Jordan διατυπώνει και αποδεικνύει το ομώνυμο θεώρημα της απλής κλειστής καμπύλης, αν και η απόδειξή του παρουσιάζει κάποια κενά.

1890 O Giuseppe Peano ανακαλύπτει την γνωστή χωροπληρωτική καμπύλη.

1891 O Georg Cantor αποδεικνύει το περίφημο θεώρημα των κιβωτισμένων διαστημάτων.

1895 O Henri Poincare δημοσιεύει την εργασία του "Analysis Situs", η οποία σηματοδοτεί την απαρχή της αλγεβρικής τοπολογίας. Εκεί πρώτη φορά γίνεται λόγος για τη θεμελιώδη ομάδα.

1904 O Henri Poincare διατυπώνει τη περίφημη "εικασία Poincare", σύμφωνα με την οποία, μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα, συμπαγής και απλά συνεκτική είναι ομοιόμορφη με την τρισδιάστατη σφαίρα.

1904 O Luitzen Brouwer γενικεύει το θεώρημα της απλής κλειστής καμπύλης του Jordan.

1905 O Αμερικανός μαθηματικός Oswald Veblen (1880-1960) δίνει ολοκληρωμένη απόδειξη του θεωρήματος κλειστής καμπύλης του Jordan.

1906 O Maurice Frechet εισάγει την έννοια του μετρικού χώρου και της συμπάγειας.

1907 O Max Dehn με τον Paul Heegaard εισάγουν την έννοια της ομοτοπίας.

1908 O Rene Baire μεταξύ των ετών 1905 και 1908 μελετά τις πραγματικές συναρτήσεις σε συνδυασμό με τη θεωρία συνόλων και καταλήγει στο ομώνυμο θεώρημα κατηγορίας, δίνοντας και τον ορισμό του πουθενά πυκνού συνόλου.

1910 O Luitzen Brouwer αποδεικνύει το θεώρημα για το αναλλοίωτο του πεδίου ορισμού και ορίζει την έννοια του βαθμού των σφαιρικών απεικονίσεων.

1912 O Luitzen Brouwer δημοσιεύει το θεώρημα του σταθερού σημείου.

1914 O Felix Hausdorff δίνει στη δημοσιότητα το περίφημο βιβλίο του "Θεωρία συνόλων", όπου για πρώτη φορά δίνεται ένας ορισμός για τον τοπολογικό χώρο.

1921 Οι Mark Knaster και Kazimierz Kuratowski δημοσιεύουν τα σημαντικά συμπεράσματά τους για τους ολικά μη συνεκτικούς χώρους.

1922 Ο Kazimierz Kuratowski δίνει τον ορισμό του τοπολογικού χώρου, όπως τον ξέρουμε σήμερα.

1923 Ο Pavel Urysohn αποδεικύει το θεώρημα μετρικοποίησης για τους 2ους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους, χρησιμοποιώντας το καταπληκτικό λήμμα που φέρει το όνομά του.

1924 Ο James Alexander παρουσιάζει την "κερατοειδή σφαίρα".

1925 Ο Tibor Rado αποδεικνύει ότι κάθε επιφάνεια επιδέχεται τριγωνισμό.

1926 Ο Tychonoff δημοσιοποιεί την έννοια της τοπολογίας γινόμενο και αποδεικνύει το ομώνυμο θεώρημα στη συμπάγεια.

1926 Ο Otto Shreier δίνει τον ορισμό της τοπολογικής ομάδας.

1928 Ο Heinz Hopf εισάγει την έννοια της ομάδας ομολογίας.

1928 Ο Pavel Alexandroff εισάγει την έννοια της ακριβούς ακολουθίας.

1929 Ο Pavel Alexandroff δίνει τα αξιώματα του τοπολογικού χώρου, όπως τα γνωρίζουμε σήμερα.

1929 Ο Walter Mayer εισάγει τις έννοιες του αλυσιδωτού συμπλέγματος, του συνόρου και του κύκλου.

1930 Ο Karol Borsuk στη διατριβή τους αναπτύσσει τη θεωρία των συστολών.

1930 Ο Heinz Hopf αποδεικνύει την ύπαρξη μη μηδενοτοπικής συνεχούς απεικονισης από την $\mathbb{S}^3$ στην $\mathbb{S}^2$.

1933 Ο Karol Borsuk και ο Stanislaw Ulam δημοσιεύουν το θεώρημα των αντιποδικών σημείων, γνωστό ως θεώρημα Borsuk-Ulam.

1933 Ο Solomon Lefschetz εισηγείται την ιδιάζουσα ομολογία.

1933 Ο E. Van Kampen αποδεικνύει το ομώνυμο θεώρημα για τον υπολογισμό των θεμελιωδών ομάδων.

1935 Ο Witold Hurewitz εισηγείται τις ομάδες ομοτοπίας τάξης μεγαλύτερης της μονάδος και εισάγει την έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας.

1935 Ο H. Hopf ανακαλύπτει τις λεγόμενες απεικονίσεις Hopf $p : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n}$, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στις ομάδες ομοτοπίας.

1935 Ο W. Hurewitz διατυπώνει και αποδεικνύει το θεώρημα για τη σχέση των ομάδων $\pi_n(X)$ και $H_n(X)$.

1936 Ο Solomon Lefschetz χρησιμοποιεί για πρώτη φορά τον όρο αλγεβρική τοπολογία.

1945 Ο Ralf Fox γενικεύει τον ορισμό του Hurewitz των ομάδων ομοτοπίας ανώτερης τάξης για τον οποιονδήποτε τοπολογικό χώρο, εισηγούμενος την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία.

1945 Οι Saunders MacLane και Samuel Eilenmberg εισάγουν την έννοια της κατηγορίας. Την ίδια χρονιά οι Norman Steenrod και Samuel Eilenberg δημοσιεύουν τα ομώνυμα αξιώματα για την ομολογία και τη συνομολογία.

1949 Ο John Henry Whitehead εισηγείται την έννοια του CW-συμπλέγματος.

1950 Ο Juniti Nagata αποδεικνύει το πλήρες θεώρημα μετρικοποίησης, το οποίο αποδεικνύει ανεξάρτητα ένα χρόνο αργότερα και ο Yuri Smirnov.

1950 Ο John Kelley αποδεικνύει την ισοδυναμία του θεωρήματος Tychonoff με το αξίωμα επιλογής.

1961 Ο C. Zeeman αποδεικνύει την εικασία Poincare για $n = 5$.

1962 Ο J. Stallings αποδεικνύει την εικασία Poincare για $n = 6$.

1966 Ο Stefen Smale αποδεικνύει την εικασία Poincare για n-διάστατες πολλαπλότητες με $n \geq 7$.

1982 Ο M. Freedman αποδεικνύει την εικασία Poincare για $n = 4$.

1994 Ο Grigori Perelman αποδεικνύει την εικασία Poincare.

20

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΣΥΝΟΛΑ

20.1 Εισαγωγικά-Πράξεις στα σύνολα-Διμελείς σχέσεις

Συνοπτικά αναφερόμαστε στο μέρος της συνολοθεωρίας που είναι απαραίτητο για την κατανόηση των πραγματευόμενων στο βιβλίο. Οι προτάσεις που ακολουθούν παρατίθενται χωρίς αποδείξεις.

Η έννοια του συνόλου, του στοιχείου του συνόλου, καθώς και εκείνη του "ανήκει" ένα στοιχείο σε ένα σύνολο είναι έννοιες που δεν ορίζονται. Τα σύνολα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά. Την πρόταση το a είναι στοιχείο του συνόλου A συμβολικά την σημειώνουμε με $a \in A$ και την πρόταση το a δεν είναι στοιχείο του A την σημειώνουμε με $a \notin A$. Η θεωρία συνόλων ξεκινά με την αποδοχή κάποιων αξιωμάτων, τα οποία αφορούν τις ανωτέρω έννοιες και είναι γνωστά με την ονομασία "Αξιώματα των Zermelo-Fraenkel". Τα αξιώματα αυτά είναι

- **Αξίωμα έκτασης**: Ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία του και μόνον. Με άλλα λόγια δύο σύνολα είναι ίσα, όταν και μόνον, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Συμβολικά: $A = B \Leftrightarrow \big(x \in A \Leftrightarrow x \in B\big)$.

- **Αξίωμα κενού συνόλου**: Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με το $\varnothing$.

- **Αξίωμα ζεύγους**: Δοθέντων δύο x, y υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο, το οποίο έχει ως στοιχεία τα x, y και μόνον αυτά.

- **Αξίωμα ένωσης**: Δοθέντος ενός συνόλου A, το οποίο έχει ως στοιχεία σύνολα υπάρχει σύνολο, το οποίο έχει ως στοιχεία τα στοιχεία των συνόλων αυτών και μόνον αυτά. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε δύο σύνολα A, B, από το αξίωμα του ζεύγους, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$ και, από το αξίωμα της ένωσης υπάρχει το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία των A και B και μόνον αυτά. Το σύνολο αυτό ονομάζουμε **ένωση** των A και B και συμβολίζουμε με $A \cup B$. Συμβολικά: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

- **Αξίωμα απείρου**: Υπάρχει σύνολο το οποίο έχει ως στοιχείο το κενό σύνολο και μαζί με κάθε στοιχείο του B, έχει ως στοιχείο και το $B \cup \{B\}$.

- **Αξίωμα δυναμοσυνόλου**: Δοθέντος ενός συνόλου A υπάρχει σύνολο $\mathcal{P}(A)$, το οποίο έχει ως στοιχεία του τα υποσύνολα του A και μόνον. Ένα σύνολο B λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου A, αν και μόνον, αν κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A $(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Το ότι το σύνολο B είναι υποσύνολο του συνόλου A συμβολίζουμε με $B \subseteq A$. Το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ ονομάζουμε **δυναμοσύνολο** του A .

- **Αξίωμα κανονικότητας**: Κάθε σύνολο A έχει στοιχείο y, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $x \notin y$.

- **Αξίωμα διαχωρισμού**: Δοθέντος ενός συνόλου A και ενός προτασιακού τύπου $p(x)$ υπάρχει ένα σύνολο B, του οποίου τα στοιχεία είναι εκείνα τα στοιχεία του συνόλου A, τα οποία αληθεύουν τον $p(x)$.

Ορισμός 20.1.1. Δοθέντων δύο συνόλων A και B, από το αξίωμα διαχωρισμού συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σύνολο, το οποίο έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B και μόνον αυτά. Το σύνολο αυτό ονομάζουμε **τομή** των A και B και συμβολίζουμε με $A \cap B$. Δηλαδή $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$. Αν $A \cap B = \varnothing$ λέμε ότι τα A και B είναι **ξένα**. Όταν η τομή δύο συνόλων είναι μη κενή, τότε λέμε ότι τα σύνολα **τέμνονται**

Ορισμός 20.1.2. Αν τα σύνολα A και B είναι ξένα, τότε η ένωση τους ονομάζεται **ξένη ένωση** και συμβολίζεται $A \sqcup B$.

Ορισμός 20.1.3. Δοθέντων δύο συνόλων A και B, από το αξίωμα διαχωρισμού συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σύνολο, το οποίο έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του συνόλου A, τα οποία δεν ανήκουν στο σύνολο B και μόνον αυτά. Το σύνολο αυτό ονομάζουμε **διαφορά** των A και B και συμβολίζουμε $A \setminus B$. Δηλαδή $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

Για τις συνολοθεωρητικές πράξεις ισχύουν οι προτάσεις:

Πρόταση 20.1.1.

i) $A \cup A = A$.

ii) $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.

iii) $A \cup B = B \cup A$.

iv) $A \cup \big(B \cup C\big) = \big(A \cup B\big) \cup C$.

v) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

Πρόταση 20.1.2. *i)* $A \cap A = A$.

ii) $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$.

iii) $A \cap B = B \cap A$.

iv) $A \cap \big(B \cap C\big) = \big(A \cap B\big) \cap C$.

Πρόταση 20.1.3.

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Πρόταση 20.1.4.

i) $A \setminus A = \varnothing$.

ii) $A \setminus \varnothing = A$.

iii) $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

v) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

vi) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

vii) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Πιο πάνω ορίσαμε τη σχέση του εγκλεισμού ($\subseteq$). Ακολουθεί ο ορισμός της σχέσης του γνήσιου εγκλεισμού.

Ορισμός 20.1.4. Ο γνήσιος εγκλεισμός ορίζεται ως εξής: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B.

Για τις σχέσεις εγκλεισμού έχουμε την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 20.1.5.

i) $A \subseteq A$.

ii) $\varnothing \subseteq A$.

iii) $A \subseteq A \cup B$.

iv) $A \cap B \subseteq A$.

v) $A \setminus B \subseteq A$.

vi) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

vii) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

viii) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Ορισμός 20.1.5. Όταν έχουμε ένα σύνολο αναφοράς X, το οποίο σημαίνει ότι μας ενδιαφέρουν τα υποσύνολα του X και μόνον, τότε για κάθε υποσύνολο A του X ορίζουμε το **συμπληρωματικό** του $A^c = X \setminus A$.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 20.1.6.

i) $X^c = \varnothing$.

ii) $\varnothing^c = X$.

iii) $\big(A^c\big)^c = A$.

iv) $\big(A \cup B\big)^c = A^c \cap B^c$.

v) $\big(A \cap B\big)^c = A^c \cup B^c$.

vi) $A \setminus B = A \cap B^c$.

vii) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.

Ορισμοί 20.1.1. Διαισθητικά, όταν λέμε διατεταγμένο ζεύγος των x, y, το οποίο συμβολίζουμε με (x, y), εννοούμε το διμελές σύνολο $\{x, y\}$, στο οποίο μας ενδιαφέρει το στοιχείο x να είναι πρώτο και το στοιχείο y να είναι δεύτερο. Το **διατεταγμένο ζεύγος** ορίζεται αυστηρά ως $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Από τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel προκύπτει ότι δοθέντων δύο συνόλων A, B υπάρχει το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y), με $x \in A$ και $y \in B$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο** των A και B και συμβολίζεται, με $A \times B$.

Ορίζουμε $A \times B \times C = \big(A \times B\big) \times C$. Τα στοιχεία του $A \times B \times C$ ονομάζουμε **διατεταγμένες τριάδες**. Μια διατεταγμένη τριάδα συμβολίζεται, με (x, y, z), όπου $x \in A$, $y \in B$ και $z \in C$.

Επαγωγικά ορίζουμε το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, ως $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}\big) \times A_n$. Το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, συμβολίζουμε και $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Τα στοιχεία του $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ονομάζουμε **διατεταγμένες n-αδες**. Μια διατεταγμένη n-αδα συμβολίζεται με $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in A_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ισχύει η

Πρόταση 20.1.7.

i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

ii) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$ *και, γενικά* $\prod_{i=1}^{n} A_i = \varnothing \Leftrightarrow A_1 = \varnothing \vee \ldots \vee A_n = \varnothing$.

iii) $A \times (B \cup C) = \big(A \times B\big) \cup \big(A \times C\big)$.

iv) $\big(B \cup C\big) \times A = \big(B \times A\big) \cup \big(C \times A\big)$.

v) $A \times (B \cap C) = \big(A \times B\big) \cap \big(A \times C\big)$.

vi) $\big(B \cap C\big) \times A = \big(B \times A\big) \cap \big(C \times A\big)$.

vii) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$ *για κάθε σύνολο* C.

viii) $A \subseteq B \Rightarrow C \times A \subseteq C \times B$ *για κάθε σύνολο* C.

ix) $A \subset B \wedge C \neq \varnothing \Rightarrow A \times C \subset B \times C.$

x) $A \subset B \wedge C \neq \varnothing \Rightarrow C \times A \subset C \times B.$

Ορισμοί 20.1.2.

- Αν A, B είναι μη κενά σύνολα, τότε **διμελή σχέση μεταξύ των** A **και** B ονομάζουμε κάθε μη κενό υποσύνολο σ του $A \times B$. Αν $(a, b) \in \sigma$, τότε γράφουμε $a\sigma b$ ή $\sigma(a) = b$.
- Η σχέση σ^{-1} μεταξύ των B και A, για την οποία ισχύει η ισοδυναμία

$$b\sigma^{-1}a \Leftrightarrow a\sigma b$$

  ονομάζεται **αντίστροφη** της σ.

- Όταν $A = B$, τότε λέμε ότι έχουμε μια σχέση στο σύνολο A.
- Έστω σ είναι μια σχέση μεταξύ των A και B. Αν επιπλέον τ είναι μια σχέση μεταξύ των B και C, τότε ορίζουμε τη σχέση $\tau \circ \sigma$ μεταξύ του A και του C, την οποία ονομάζουμε **σύνθεση της** σ **με την** τ, ως εξής:

$$a \in A, c \in C \wedge a(\tau \circ \sigma)c \Leftrightarrow \exists b \in B; a\sigma b \wedge b\tau c.$$

Πρόταση 20.1.8. *Αν σ μια σχέση μεταξύ των A και B, τ μια σχέση μεταξύ των B και C και ρ μια σχέση μεταξύ των C και D, τότε $(\rho \circ \tau) \circ \sigma = \rho \circ (\tau \circ \sigma)$.*

Πρόταση 20.1.9. *Αν σ είναι μια σχέση μεταξύ των A και B. Επιπλέον τ μια σχέση μεταξύ των B και C, τότε $(\tau \circ \sigma)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ και $\left(\sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma$.*

Ορισμός 20.1.6. Μια σχέση σ στο σύνολο A ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας στο** A, αν και μόνον, αν ισχύουν τα:

α΄) $a\sigma a \quad \forall a \in A$ (ανακλαστική ιδιότητα).

β΄) $a\sigma b \Leftrightarrow b\sigma a, \quad \forall a, b \in A$ (συμμετρική ιδιότητα).

γ΄) $a\sigma b \wedge b\sigma c \Rightarrow a\sigma c \quad \forall a, b, c \in A$ (μεταβατική ιδιότητα).

Οι σχέσεις ισοδυναμίας παίζουν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά. Στο κυρίως κείμενο τις έχουμε συναντήσει αρκετές φορές.

Ορισμός 20.1.7. Μια σχέση $\leq$ ονομάζεται **σχέση μερικής διάταξης** στο A, αν και μόνον, αν ισχύουν τα

α΄) $a \leq a$ για κάθε $a \in A$. (Ανακλαστική ιδιότητα)

β΄) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in A$, (Μεταβατική ιδιότητα)

γ΄) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$ (Αντισυμμετρική ιδιότητα)

Στη περίπτωση αυτή το A ονομάζεται **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** με τη σχέση $\leq$. Όταν για τη σχέση μερικής διάταξης $\leq$ σε ένα σύνολο A έχουμε για κάθε $a, b \in A$ αληθεύει ένα εκ των $a \leq b$ ή $b \leq a$, τότε η σχέση $\leq$, λέγεται **σχέση ολικής διάταξης στο** A και το σύνολο A **ολικώς διατεταγμένο ή αλυσίδα**. Αν σε ένα σύνολο έχουμε ορίσει σχέση μερικής διάταξης $\leq$, τότε μπορούμε να ορίσουμε και σχέση **γνήσιας μερικής διάταξης** $<$, ως εξής:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b.$$

Παραδείγματα 20.1.1.

1. Ένα απλό παράδειγμα μερικής διάταξης είναι η σχέση του περιέχεσθαι ($\subseteq$) σε ένα μη κενό υποσύνολο B του $\mathcal{P}(A)$, όπου $A \neq \varnothing$. Αν στο B ανήκουν τα $\{x\}$ και $\{y\}$, με $x, y \in A$ και $x \neq y$, τότε το B δεν είναι ολικώς διατεταγμένο, γιατί δεν ισχύει η $\{x\} \subseteq \{y\}$, ούτε η $\{y\} \subseteq \{x\}$.

2. Απλά παραδείγματα ολικώς διατεταγμένων συνόλων είναι τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, με σχέση ολικής διάταξης τη σχέση του μικρότερου ή ίσου.

Ορισμοί 20.1.3. Έστω $\leq$ μια σχέση διάταξης στο σύνολο A και $b \in B \subseteq A$.

- Το b ονομάζεται **μέγιστο** (αντ. **ελάχιστο**) στοιχείο του B, αν και μόνον, αν $x \leq b$ (αντ. $b \leq x$) για κάθε $x \in B$.

- Το b ονομάζεται **μεγιστικό** (αντ. **ελαχιστικό**) στοιχείο του B, αν και μόνον, αν δεν υπάρχει $x \in B$, ώστε $b < x$ (αντ. $x < b$).

- Το $a \in A$ ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) **φράγμα** του B, αν και μόνον, αν $x \leq a$ (αντ. $a \leq x$) για κάθε $x \in B$. Αν το B έχει στο A άνω (αντ. κάτω) φράγμα ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) **φραγμένο**. Αν το A έχει και άνω και κάτω φράγμα, τότε ονομάζεται **φραγμένο**.

- Αν σε ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο A κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε και μόνον, τότε το A ονομάζεται **καλώς διατεταγμένο**. Από τα γνωστά ολικώς διατεταγμένα σύνολα αριθμών $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, με τη σχέση $\leq$ το μοναδικό καλώς διατεταγμένο είναι το $\mathbb{N}$.

Ορισμοί 20.1.4.

- Μια διμελής σχέση f μεταξύ των μη κενών συνόλων A και B ονομάζεται **απεικόνιση του** A **στο** B, αν και μόνον, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει ένα και μόνον ένα $y \in B$, ώστε $y = f(x)$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $x \xrightarrow{f} y$. Την απεικόνιση f από το A στο B συμβολίζουμε με $f : A \to B$. Το σύνολο των απεικονίσεων από το A στο B συμβολίζουμε με B^A. Το σύνολο A στην απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζουμε **σύνολο αφετηρίας** της f και συμβολίζουμε με $domain(f)$. Το σύνολο B στην απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζουμε **σύνολο αφίξεως** της f και συμβολίζουμε με $range(f)$. Αν $C \subseteq A$, τότε με $f(C)$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{y \in B / \exists x \in C; y = f(x)\}$, το οποίο ονομάζουμε **σύνολο των εικόνων** του C, μέσω της f. Αν $D \subseteq B$, τότε, με $f^{-1}(D)$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{x \in A / \exists y \in D; y = f(x)\}$, το οποίο ονομάζουμε **σύνολο των αντίστροφων εικόνων** του D, μέσω της f.

- Η απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **1-1 (ένα προς ένα)**, αν και μόνον, αν αληθεύει η συνεπαγωγή

$$x_1, x_2 \in A \wedge f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ή η ισοδύναμη συνεπαγωγή

$$x_1, x_2 \in A \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Η απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί**, αν και μόνον, αν για κάθε $y \in B$, υπάρχει $x \in A$, ώστε $y = f(x)$ ή αλλιώς $f(A) = B$.

- Η απεικόνιση $i_A : A \to A$, με $i_A(x) = x$ ονομάζεται **ταυτοτική απεικόνιση του** A.

- Αν $\varnothing \neq B \subseteq A$, τότε η απεικόνιση $i : B \to A$, με $i(x) = x$ ονομάζεται **ένθεση του** B **στο** A. Την ένθεση του B στο A συμβολίζουμε με $B \hookrightarrow A$.

Πρόταση 20.1.10. *Έστω $f : A \to B$ απεικόνιση και $C \subseteq A$, τότε $C \subseteq f^{-1}\big(f(C)\big)$. Αν η f είναι 1-1, τότε $f^{-1}\big(f(C)\big) = C$.*

Πρόταση 20.1.11. *Έστω $f : A \to B$ απεικόνιση και $D \subseteq B$, τότε $f\big(f^{-1}(D)\big) \subseteq D$. Αν η f είναι επί, τότε $f\big(f^{-1}(D)\big) = D$.*

Πρόταση 20.1.12. *Αν $f : A \to B$ απεικόνιση, για να είναι η σχέση f^{-1} μεταξύ των B και A απεικόνιση, πρέπει και αρκεί, η f να είναι 1-1 και επί.*

Πρόταση 20.1.13. *Αν η $f : A \to B$ είναι 1-1 και επί απεικόνιση, τότε $f^{-1} \circ f = i_A$ και $f \circ f^{-1} = i_B$.*

Πρόταση 20.1.14. *Αν $f : A \to B$ και $g : B \to A$ απεικονίσεις, ώστε $g \circ f = i_A$ και $f \circ g = i_B$, τότε η f είναι 1-1 και επί και επιπλέον, $g = f^{-1}$.*

Ορισμοί 20.1.5.

- Αν A, B, C είναι σύνολα και οι $f : A \to B$, $g : B \to C$ και $h : A \to C$ είναι απεικονίσεις, με $h = g \circ f$, τότε λέμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow^{h} & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

- Αν A, B, C και D είναι σύνολα και οι $f : A \to B$, $g : B \to D$ και $h : A \to C$ και $r : C \to D$ είναι απεικονίσεις, με $g \circ f = r \circ h$, τότε λέμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{r} & D \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις στα μαθηματικά χρειαζόμαστε την έννοια της οικογένειας, η οποία είναι γενίκευση της γνωστής από τον απειροστικό λογισμό, έννοιας της ακολουθίας. Για να ορίσουμε την οικογένεια μας χρειάζονται κάποιες διμελείς σχέσεις, ασθενέστερες των απεικονίσεων, οι οποίες είναι, τρόπον τινά, απεικονίσεις που δεν ενδιαφέρονται για το σύνολο αφίξεως. Τις σχέσεις αυτές ονομάζουμε μονοσήμαντες αντιστοιχίες και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 20.1.8. Μια σχέση a μεταξύ των μη κενών συνόλων I και A ονομάζουμε **μονοσήμαντη αντιστοιχία του I στο A**, αν και μόνον, αν το $a(i)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο στοιχείο του A για κάθε $i \in I$. Επιπλέον, αν $a : I \to A$ και $b : I \to B$ είναι δύο μονοσήμαντες αντιστοιχίες, ορίζουμε $a = b$, αν και μόνον, αν $a(i) = b(i)$ για κάθε $i \in I$. Συμβολίζουμε κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία του I στο A, με $a : I \rightsquigarrow A$ και την ονομάζουμε **οικογένεια στο A με δείκτες από το I**. Στη περίπτωση αυτή το $a(i)$ το γράφουμε a_i και την οικογένεια τη γράφουμε $a_i, i \in I$.

Μια κατηγορία οικογενειών αποτελούν είναι οι οικογένειες, των οποίων το σύνολο αφίξεως έχει ως στοιχεία σύνολα. Σ'αυτές τις οικογένειες μπορούμε να ορίσουμε πράξεις συνόλων που αποτελούν γενίκευση των ορισμών των πράξεων που έχουμε ήδη δώσει.

Ορισμοί 20.1.6.

- Έστω $A_i, i \in I$ οικογένεια συνόλων. Ορίζουμε ως **ένωση της οικογένειας** το σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i$, για το οποίο
$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I; x \in A_i.$$
- Αν τα σύνολα της οικογένειας είναι ξένα μεταξύ τους, τότε η ένωση της οικογένειας ονομάζεται **ξένη** και συμβολίζεται $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.
- Ορίζουμε ως **τομή της οικογένειας** το σύνολο $\bigcap_{i\in I} A_i$, για το οποίο
$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in A_i \quad \forall i \in I.$$
`
- Ορίζουμε ως **γινόμενο της οικογένειας**, το οποίο συμβολίζουμε, με $\prod_{i\in I} A_i$, το σύνολο των μονοσήμαντων αντιστοιχιών a του I στο σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i$, για τις οποίες $a(i) \in A_i$.

Παρατήρηση: Άμεση συνέπεια του ορισμού της μονοσήμαντης αντιστοιχίας και του γινομένου μιας οικογένειας συνόλων είναι το ότι: αν $B_i \subseteq A_i$ για κάθε $i \in I$, τότε $\prod_{i\in I} B_i \subseteq \prod_{i\in I} A_i$.

Πρόταση 20.1.15. *Ισχύουν τα*

i) $A \cap \big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} \big(A \cap B_i\big)$.

ii) $A \cup \big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I} \big(A \cup B_i\big)$.

iii) $\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcup\limits_{i\in J} B_i\big) = \bigcup\limits_{(i,j)\in I\times J} \big(A_i \cap B_j\big)$.

iv) $\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) \cup \big(\bigcap\limits_{i\in J} B_i\big) = \bigcap\limits_{(i,j)\in I\times J} \big(A_i \cup B_j\big)$.

Πρόταση 20.1.16. *Ισχύουν τα*

i) $A \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I} \big(A \setminus B_i\big)$.

ii) $A \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} \big(A \setminus B_i\big)$.

Για τα καρτεσιανά γινόμενα

Πρόταση 20.1.17. *Ισχύουν τα*

i) $\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcup\limits_{i\in J} B_i\big) = \bigcup\limits_{(i,j)\in I\times J} \big(A_i \times B_j\big)$.

ii) $\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcap\limits_{i\in J} B_i\big) = \bigcap\limits_{(i,j)\in I\times J} \big(A_i \times B_j\big)$.

iii) $A \times \big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} \big(A \times B_i\big)$.

iv) $\big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\big) \times A = \bigcup\limits_{i\in I} \big(B_i \times A\big)$.

v) $A \times \big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I} \big(A \times B_i\big)$.

vi) $\big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\big) \times A = \bigcap\limits_{i\in I} \big(B_i \times A\big)$.

Πρόταση 20.1.18. *Ισχύει:* $\big(\prod\limits_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\prod\limits_{i\in I} B_i\big) = \prod\limits_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

Έστω η απεικόνιση $f : A \to B$, τότε η σχέση f^{-1} (όχι κατ' ανάγκη απεικόνιση) συμπεριφέρεται "καλά" σε όλες τις πράξεις των υποσυνόλων του B, δηλαδή

Πρόταση 20.1.19. *Αν* $C, D \subseteq B$ *και* $C_i \subseteq B \quad \forall i \in I$, *τότε*

i) $f^{-1}\big(\bigcup\limits_{i\in I} C_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(C_i)$.

ii) $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i\in I} C_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(C_i)$.

iii) $f^{-1}\big(C \setminus D\big) = f^{-1}\big(C\big) \setminus f^{-1}\big(D\big)$.

Ενώ η f συμπεριφέρεται "καλά", μόνον στην ένωση υποσυνόλων του A.

Πρόταση 20.1.20. *Αν $A_i, i \in I$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του A, τότε $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.*

Αλλά

Πρόταση 20.1.21. *Αν $A_i, i \in I$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του A, τότε $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Αν η f είναι 1-1, τότε $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.*

Επίσης

Πρόταση 20.1.22. *Αν $C, D \subseteq A$, τότε $f(C) \setminus f(D) \subseteq f(C \setminus D)$. Αν η f είναι 1-1, τότε $f(C) \setminus f(D) = f(C \setminus D)$.*

Ορισμός 20.1.9. Έστω A ένα μη κενό σύνολο και $A_i, i \in I$ μια οικογένεια ξένων μεταξύ τους μη κενών υποσυνόλων του. Αν $\bigsqcup_{i\in I} A_i = A$, τότε και μόνον, τότε η $A_i, i \in I$ ονομάζεται **διαμέριση του** A.

Με την ευκαιρία του ορισμού της διαμέρισης, επανερχόμαστε στη σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο. Έστω A ένα μη κενό σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Ορίζουμε το υποσύνολο $[a], a \in A$ του , ως το σύνολο των στοιχείων του A, τα οποία είναι ισοδύναμα με το a. Δηλαδή $x \in [a] \Leftrightarrow x \sim a$. Το $[a]$ ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** που ορίζεται από το a.

Πρόταση 20.1.23.

i) Αν $[a]$ και $[b]$ είναι δύο κλάσεις ισοδυναμίας, οι οποίες ορίζονται από τη σχέση $\sim$ στο μη κενό σύνολο A, τότε ή $[a] \cap [b] = \varnothing$ ή $[a] = [b]$.

ii) Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι μία διαμέριση του A.

iii) Μια διαμέριση $A_i, i \in I$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο A, ως εξής:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I, \text{ ώστε } x, y \in A_i.$$

Παράδειγμα 20.1.1. Η γνωστή σχέση ισοδυναμίας $\equiv (\mod n)$, n ακέραιος ≥ 2, ορίζει στο σύνολο $\mathbb{Z}$ τις εξής κλάσεις ισοδυναμίας $[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n$, όπου $[k]_n = \{rn+k / r \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 0 \leq k < n\}$. Το σύνολο $\{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$ είναι ο γνωστός από την άλγεβρα, με τις πράξεις της πρόσθεσης κλάσεων και πολλαπλασιασμού κλάσεων δακτύλιος $\mathbb{Z}_n$ και αποτελεί μια διαμέριση του $\mathbb{Z}$.

20.2 Το αξίωμα επιλογής

Το αξίωμα επιλογής είναι εκείνη η πρόταση που στις αρχές του προηγούμενου αιώνα ξεσήκωσε θύελλα έντονων αντιπαραθέσεων μεταξύ των μαθηματικών για το, αν πρέπει ή όχι να την χρησιμοποιούμε. Είναι αλήθεια πως με τη χρήση του οδηγούμαστε σε υπαρκτικά συμπεράσματα, όπως εκείνο των Banach-Tarski, τα οποία έρχονται σε αντίθεση με τις διαισθητικές αντιλήψεις μας, τα λεγόμενα "παράδοξα". Από την άλλη η μη χρήση του "φτωχαίνει" σε πολύ μεγάλο βαθμό τα μαθηματικά, γιατί παρά πολλές και σημαντικές προτάσεις δεν μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση του. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα , που είδαμε στο κυρίως κείμενο είναι το σημαντικότατο για τη τοπολογία θεώρημα του Tychonoff, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αξίωμα επιλογής , δηλαδή δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς την χρήση του. Στο εξαίρετο βιβλίο Axiom of Choice του Horst Herrlich από τις εκδόσεις Springer, μπορεί να βρει κάποιος λεπτομέρειες για τη χρήση του αξιώματος επιλογής σ' ολόκληρο το φάσμα των μαθηματικών.

Αξίωμα Επιλογής Αν $A_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια ξένων μεταξύ τους συνόλων, τότε υπάρχει σύνολο (σύνολο επιλογής της οικογένειας), τέτοιο ώστε να έχει ακριβώς ένα κοινό στοιχείο με κάθε A_i.

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες με το αξίωμα επιλογής:

- **Ύπαρξη απεικόνισης επιλογής** Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχει απεικόνιση (απεικόνιση επιλογής) $r : \mathcal{P}(X) \setminus \{\{\varnothing\}\} \to X$, ώστε $r(A) \in A$.
- **Πολλαπλασιαστική αρχή** Αν $X_i, i \in I$ οικογένεια συνόλων, τότε

$$\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing \Leftrightarrow X_i \neq \varnothing \quad \forall i \in I.$$

- **Αρχή της καλής διάταξης** Κάθε σύνολο X μπορεί να διαταχθεί καλώς.
- **Λήμμα Zorn** Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο έχει μεγιστικό στοιχείο, αν κάθε αλυσίδα σ' αυτό το σύνολο έχει άνω φράγμα.

20.3 Πληθάριθμοι

Κάποιες συλλογές αντικειμένων, όπως η συλλογή όλων των τοπολογικών χώρων ή η συλλογή όλων των ομάδων ή η συλλογή όλων των συνόλων, δεν είναι σύνολα, γιατί η ύπαρξή τους ως συνόλων δεν προκύπτει από τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel. Για να χαρακτηρίσουμε αυτές τις συλλογές, χρησιμοποιούμε τον όρο "κλάση".

Ορισμός 20.3.1. Στην κλάση $\mathcal{S}et$ όλων των συνόλων ορίζουμε τη σχέση $\sim$, ως εξής:

α΄) $A \sim \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$.

β΄) Αν $A, B \in \mathcal{S}et$ και $A, B \neq \varnothing$, τότε $A \sim B$, αν και μόνον, αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : A \to B$.

Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Ορίζουμε ως **πληθάριθμο του συνόλου** A την κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σχέση $\sim$, στην οποία ανήκει το σύνολο A. Τον πληθάριθμο του συνόλου A συμβολίζουμε, με $|A|$ και συμφωνούμε $|\varnothing| = 0$ και $|\{1, \dots, n\}| = n$, αν $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 20.3.2. Ένα σύνολο A ονομάζεται **απειροσύνολο**, αν και μόνον, αν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο B του A, ώστε $B \sim A$. Αν το A δεν είναι απειροσύνολο, τότε και μόνον, τότε ονομάζεται **πεπερασμένο**.

Πρόταση 20.3.1. *Το κενό σύνολο και το σύνολο $\{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένα.*

Πρόταση 20.3.2. *Τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ είναι απειροσύνολα.*

Πρόταση 20.3.3. *Ισχύει: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.*

Ορισμός 20.3.3. Αν A, B σύνολα, ορίζουμε $|A| \le |B|$, αν και μόνον, αν υπάρχει υποσύνολο C του B, ώστε $A \sim C$.

Ορισμός 20.3.4. Ένα σύνολο A ονομάζεται **αριθμήσιμο**, αν και μόνον, αν $|A| \le |\mathbb{N}|$. Τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ονομάζουμε **άπειρα αριθμήσιμα** και συμφωνούμε $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Πρόταση 20.3.4. *Ισχύει:$\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$ ή αλλιώς το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο.*

Ορισμός 20.3.5. Τα απειροσύνολα, τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα ονομάζονται **υπεραριθμήσιμα**.

Ορισμός 20.3.6. Έστω A, B σύνολα. Ορίζουμε $|A| < |B|$, αν και μόνον, αν $A \nsim B$ και υπάρχει γνήσιο υποσύνολο C του B, ώστε $A \sim C$.

Η ακόλουθη πρόταση είναι ισοδύναμη με το αξίωμα επιλογής

Πρόταση 20.3.5. ***(Θεώρημα συγκρισιμότητας πληθαρίθμων)*** *Αν A, B σύνολα, τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα $|A| = |B|$ ή $|A| < |B|$ ή $|B| < |A|$.*

Πρόταση 20.3.6. ***(Θεώρημα Cantor-Bernstein)*** *Αν για τα σύνολα A, B ισχύουν οι σχέσεις $|A| \le |B|$ και $|B| \le |A|$, τότε $|A| = |B|$.*

Πρόταση 20.3.7. *Αν A, B, C σύνολα, ώστε το A να είναι πεπερασμένο, το B να είναι άπειρο αριθμήσιμο και το C υπεραριθμήσιμο, τότε $|A| < |B| < |C|$.*

20.4 Πράξεις με πληθάριθμους

Πρόταση 20.4.1. *Αν $A_i \sim B_i$ για κάθε $i \in I$, τότε $\bigsqcup\limits_{i \in I} \big(A_i \times \{i\}\big) \sim \bigsqcup\limits_{i \in I} \big(B_i \times \{i\}\big)$.*

Ορισμός 20.4.1. Αν $|A_i| = a_i$ για κάθε $i \in I$, τότε και μόνον, τότε ορίζουμε

$$\sum_{i \in I} a_i = \Big|\bigsqcup_{i \in I} \big(A_i \times \{i\}\big)\Big|.$$

Πρόταση 20.4.2. *Αν* $A_i \sim B_i$ *για κάθε* $i \in I$, *τότε* $\prod_{i\in I}\big(A_i \times \{i\}\big) \sim \prod_{i\in I}\big(B_i \times \{i\}\big)$.

Ορισμός 20.4.2. Αν $|A_i| = a_i$ για κάθε $i \in I$, τότε και μόνον, τότε ορίζουμε

$$\prod_{i\in I} a_i = \left|\prod_{i\in I}\big(A_i \times \{i\}\big)\right|.$$

Πρόταση 20.4.3. *Αν* A, B, C, D *μη κενά σύνολα, ώστε* $A \sim C$ *και* $B \sim D$, *τότε* $B^A \sim D^C$.

Ορισμός 20.4.3. Αν $|A| = a > 0$ και $|B| = b > 0$, τότε, και μόνον τότε, ορίζουμε $b^a = |B^A|$.

Συμφωνούμε $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$.

Πρόταση 20.4.4. *Ισχύουν τα*

i) *Αν* $|A| = a$, *τότε* $|\mathcal{P}(A)| = 2^a$.

ii) $n + \aleph_0 = \aleph_0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

iii) $n\aleph_0 = \aleph_0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

iv) $\aleph_0^n = \aleph_0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

v) $\aleph_0 + \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

vi) $\aleph_0\mathbf{c} = \mathbf{c}$.

vii) $n + \mathbf{c} = \mathbf{c}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

viii) $n\mathbf{c} = \mathbf{c}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

ix) $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

x) $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

21 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΟΜΑΔΕΣ

21.1 Εισαγωγικά

Η θεωρία ομάδων, η βάση της σύγχρονης άλγεβρας έχει, όπως είδαμε μεγάλη συμβολή στην τοπολογία. Ως εκ τούτου κρίνεται απαραίτητη μια ανασκόπηση των βασικότερων εννοιών της θεωρίας αυτής.

Ορισμός 21.1.1. Έστω G ένα μη κενό σύνολο. Κάθε απεικόνιση $* : G \times G \to G$ ονομάζεται **πράξη στο** G. Όταν έχει οριστεί μια τέτοια απεικόνιση λέμε ότι **το** G **είναι εφοδιασμένο με την πράξη** $*$. Την εικόνα του ζεύγους (a, b), μέσω της απεικόνισης $*$ σημειώνουμε με $a * b$.

Ορισμός 21.1.2. Έστω G ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με την πράξη $*$. Το ζεύγος $(G, *)$ ονομάζεται **ομάδα**, αν και μόνον, αν ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $a * (b * c) = (a * b) * c$ για κάθε $a, b, c \in G$. (Προσεταιριστική ιδιότητα)

ii) Υπάρχει $e \in G$, ώστε $a * e = e * a = a$ για κάθε $a \in G$. (Ουδέτερο στοιχείο)

iii) Για κάθε $a \in G$, υπάρχει $a' \in G$, ώστε $a * a' = a' * a = e$. (Συμμετρικό στοιχείο)

Παρατηρήσεις:

1. Το e, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικό και ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο της ομάδας**. Αν η πράξη της ομάδας είναι η πρόσθεση, τότε το ουδέτερο στοιχείο της συμβολίζεται συνήθως με 0. Αν η πράξη της ομάδας είναι ο πολλαπλασιασμός, τότε το ουδέτερο στοιχείο της συμβολίζεται συνήθως με 1.

2. Το a' είναι για κάθε $a \in G$ μονοσήμαντα ορισμένο και ονομάζεται **συμμετρικό** του a. Στην περίπτωση που πράξη είναι η πρόσθεση, ονομάζεται **αντίθετο** και συμβολίζεται με $-a$. Στην περίπτωση που πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός ονομάζεται **αντίστροφο** και συμβολίζεται με a^{-1}.

3. Όταν θέλουμε να δηλώσουμε την ομάδα G, ταυτόχρονα με τη πράξη της $*$, γράφουμε ομάδα $(G, *)$. Στις περιπτώσεις που η πράξη είναι γνωστή γράφουμε απλώς η ομάδα G.

4. Ο πιο πάνω ορισμός της ομάδας γίνεται πιο λιτός, αν αντικαταστήσουμε την απαίτηση $a*e = e*a = a$ με μόνον την απαίτηση $e*a = a$ και την απαίτηση $a*a' = a'*a = e$ με μόνον την απαίτηση $a'*a = e$. Αποδεικνύεται ότι (βλέπε J. Rotman: A first course in Abstract Algebra σελ. 123-124) οι πρόσθετες απαιτήσεις αποδεικνύονται από τις νέες, οι οποίες είναι ασθενέστερες.

Πρόταση 21.1.1. *Σε κάθε ομάδα G ισχύει ο νόμος της διαγραφής, δηλαδή για κάθε $a, b, c \in G$ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:*

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

και

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

Πρόταση 21.1.2. *Σε κάθε ομάδα G και για κάθε $a, b \in G$ ισχύει η ισότητα $\big(a * b\big)' = b' * a'$.*

Ορισμός 21.1.3. **Τάξη** μιας ομάδας G ονομάζουμε τον πληθάριθμο του G. Αν $|G| < \aleph_0$ λέμε ότι η G έχει **πεπερασμένη τάξη**. Αλλιώς λέμε ότι η ομάδα έχει **άπειρη τάξη**.

Παραδείγματα 21.1.1.

1. Το $\mathbb{R}$, με την πράξη της πρόσθεσης είναι ομάδα.

2. Το $\mathbb{R}^*$, με την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ομάδα.

3. Το $\mathbb{Q}$, με την πράξη της πρόσθεσης είναι ομάδα ($\big(\mathbb{Q}, +\big)$).

4. Το $\mathbb{Q}^*$, με την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ομάδα.

5. Το $\mathbb{Z}$, με την πράξη της πρόσθεσης είναι ομάδα.

6. Το σύνολο $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, \ldots, [n-1]_n\}$, των κλάσεων ισοτιμίας $\mod n$ είναι ομάδα, με πράξη την πρόσθεση κλάσεων ισοτιμίας, δηλαδή
$$[k]_n + [l]_n = \begin{cases} [k+l]_n, & k+l < n \\ [k+l-n]_n, & k+l \geq n \end{cases}.$$

7. Το σύνολο $M_{m \times n}$ των $m \times n$ πινάκων, με πράξη τη πράξη της πρόσθεσης είναι ομάδα.

8. Το σύνολο $GL(\mathbb{R}, n)$ των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι ομάδα, με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων (n- οστη γενική γραμμική ομάδα).

9. Το σύνολο $O(\mathbb{R}, n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) / \det(A) = \pm 1\}$ των ορθογώνιων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι ομάδα, με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων (n-οστή ορθογώνια ομάδα).

10. Το σύνολο $SO(\mathbb{R}, n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) / \det(A) = 1\}$ είναι ομάδα, με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων (n- οστή ειδική ορθογώνια ομάδα).

11. Αν $A \neq \emptyset$, τότε το σύνολο $S(A)$ των 1-1 και επί απεικονίσεων του A στον εαυτό του είναι ομάδα, με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων (Συμμετρική ομάδα του A).

Ορισμός 21.1.4. Έστω G μια πολλαπλασιαστική (αντ. προσθετική) ομάδα και $a \in G$, με $a \neq 1$ (αντ. $a \neq 0$). Αν υπάρχει θετικός ακέραιος n, ώστε $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n} = 1$ (αντ. $na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n} = 0$) και $a^k \neq 1$, (αντ. $ka \neq 0$) για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$), τότε λέμε ότι η **τάξη του στοιχείου** a είναι n και το συμβολίζουμε με $ord(a) = n$. Αν δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n, ώστε $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n} = 1$ (αντ. $na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n} = 0$), τότε λέμε ότι η τάξη του στοιχείου a είναι άπειρη και το συμβολίζουμε, με $ord(a) = \infty$. Σε μια πολλαπλασιαστική ομάδα ορίζουμε ως τάξη του 1, τον αριθμό 1 και σε μία προσθετική ομάδα ορίζουμε ως τάξη του 0, επίσης τον αριθμό 1.

Ορισμός 21.1.5. Αν όλα τα στοιχεία μιας ομάδας G έχουν πεπερασμένη τάξη, τότε η ομάδα G ονομάζεται **ομάδα στρέψης**.Αν όλα τα στοιχεία της G, εκτός του ουδέτερου έχουν άπειρη τάξη, τότε η ομάδα G ονομάζεται **ελεύθερη στρέψης**.

Παραδείγματα 21.1.2.

1. Όλα τα στοιχεία της ομάδας $(\mathbb{R}, +)$ εκτός του 0, καθώς και των ομάδων $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, εκτός του 0 έχουν άπειρη τάξη.

2. Το μοναδικό στοιχείο της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{R}^*$, με πεπερασμένη τάξη >1 είναι το -1, το οποίο έχει τάξη 2. Το ίδιο ισχύει και την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Q}^*$.

3. Αν n ακέραιος ≥ 2, τότε η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{C}^*$ έχει $n-1$ στοιχεία τάξης n, τα $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός 21.1.6. Η ομάδα $(G, *)$ ονομάζεται **αβελιανή**, αν και μόνον, αν $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in G$.

Παρατήρηση: Από τα παραδείγματα 19.1.1 οι ομάδες 8,9,10 και η 11, αν $|A| \geq 3$ δεν είναι αβελιανές.

Ορισμός 21.1.7. Το υποσύνολο H της ομάδας G ονομάζεται **υποομάδα** της $(G, *)$ (συμβολικά: $H \leq G$), αν και μόνον, αν

- $e \in H$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G.
- $a * b \in H$, αν $a, b \in H$.
- Αν $a \in H$, τότε $a' \in H$, όπου a είναι το συμμετρικό του a στην H.

.

Πρόταση 21.1.3. *Αν H ένα μη κενό υποσύνολο της ομάδας G, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

i) $H \leq G$.

ii) $a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H$.

Παρατήρηση: Κάθε ομάδα έχει ως υποομάδες, τον εαυτό της και την τετριμμένη υποομάδα $\{e\}$.

Παραδείγματα 21.1.3.

1. Αν πράξη είναι η πρόσθεση έχουμε $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$.
2. Αν πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός έχουμε $\mathbb{Q}^* \leq \mathbb{R}^* \leq \mathbb{C}^*$.
3. Η ομάδα $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$, με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$. Με τη σειρά της η $\mathbb{S}^1$ έχει υποομάδα την $C = \{z \in \mathbb{C}^*/\exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\}$.
4. Τα υποσύνολα $n\mathbb{Z} = \{na/a \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδες της προσθετικής ομάδας των ακεραίων.
5. Το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}^*$ και $c \in \mathbb{R}$ είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $GL(\mathbb{R}, 2)$.

21.2 Ομομορφισμοί

Ορισμός 21.2.1. Έστωσαν G, H ομάδες, με πράξεις τις $*$ και $\bullet$, αντιστοίχως. Η απεικόνιση $f : G \to H$ ονομάζεται **ομομορφισμός**, αν και μόνον, αν

$$f(a * b) = f(a) \bullet f(b)$$

για κάθε $a, b \in G$. Δηλαδή ο ομομορφισμός διατηρεί την αλγεβρική δομή της πρώτης ομάδας στη δεύτερη. Ο ομομορφισμός $\hat{0} : G \to H$, με $\hat{0}(a) = e_H$ για κάθε $a \in G$, όπου e_H είναι το ουδέτερο στοιχείο της H λέγεται **μηδενικός ή τετριμμένος ομομορφισμός**.

Παρατήρηση: Οι ομομορφισμοί στην κατηγορία των ομάδων είναι ότι είναι οι συνεχείς απεικονίσεις στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 21.2.1. *Έστω $f : G \to H$ ένας ομομορφισμός, τότε*

i) $f(e_G) = e_H$*, όπου* e_G, e_H *τα ουδέτερα στοιχεία των* G, H*, αντιστοίχως.*

ii) $f(a') = \big(f(a)\big)'$ *για κάθε* $a \in G$.

Παραδείγματα 21.2.1.

1. Η απεικόνιση f από την πολλαπλασιαστική ομάδα $GL(\mathbb{R}, n)$ στη πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}^*$, με $f(A) = \det(A)$ είναι ένας ομομορφισμός.

2. Η απεικόνιση f από την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}^*$ στη πολλαπλασιαστική ομάδα $(0,\infty)$, με $f(x) = |x|$ είναι ένας ομομορφισμός.

3. Η απεικόνιση F από την προσθετική ομάδα των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ στη προσθετική ομάδα $\mathbb{R}$, με $F(f) = \int_0^1 f(x)dx$ είναι ένας ομομορφισμός.

4. Η απεικόνιση f από την προσθετική ομάδα $\mathbb{R}$ στην πολλαπλασιαστική ομάδα $(0,\infty)$, με $f(x) = e^x$ είναι ένας ομομορφισμός.

Ορισμός 21.2.2. Αν $f : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, τότε ορίζουμε

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\big(\{e_H\}\big) = \{x \in G / f(x) = e_H\}$$

και

$$\operatorname{Im} f = f(G) = \{y \in H / \exists x \in G; f(x) = y\}.$$

Πρόταση 21.2.2. *Αν $f : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός, τότε $\operatorname{Ker} f \leq G$ και $\operatorname{Im} f \leq H$.*

Ορισμός 21.2.3. Ο ομομορφισμός $f : G \to H$ λέγεται **μονομορφισμός**, αν και μόνον, αν η απεικόνιση f είναι 1-1. Λέγεται **επιμορφισμός**, αν και μόνον, αν η απεικόνιση f είναι επί και, τέλος λέγεται **ισομορφισμός**, αν και μόνον αν, η f είναι 1-1 και επί. Αν, υπάρχει ισομορφισμός $f : G \to H$, τότε και μόνον, τότε οι ομάδες G και H λέγονται **ισόμορφες**, το οποίο συμβολίζουμε, με $G \simeq H$. Με $G \not\simeq H$, συμβολίζουμε το ότι οι ομάδες G και H δεν είναι ισόμορφες.

Παρατηρήσεις:

1. Οι ισόμορφες ομάδες έχουν την ίδια αλγεβρική δομή, συνεπώς θεωρούμε ότι ταυτίζονται. Όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση: Η ομάδα G που έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι μοναδική κατ'ισομορφισμό θέλουμε να δηλώσουμε το ότι κάθε ομάδα, η οποία έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι ισόμορφη με την G.

2. Οι ισομορφισμοί για την κατηγορία των ομάδων είναι ότι οι ομοιομορφισμοί για την κατηγορία των τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 21.2.3. *Αν $f : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

i) *Η f είναι ισομορφισμός.*

ii) $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$ *και* $\operatorname{Im} f = H$.

Πρόταση 21.2.4. *Αν $G \simeq H$, τότε*

i) $|G| = |B|$.

ii) $a \in G \wedge ord(a) = n \in \mathbb{N} \Rightarrow ord\big(f(a)\big) = n.$

iii) $a \in G \wedge ord(a) = \infty \in \mathbb{N} \Rightarrow ord\big(f(a)\big) = \infty.$

iv) *Η G είναι αβελιανή, αν και μόνον, αν η H είναι αβελιανή.*

Παραδείγματα 21.2.2.

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbb{Z} \simeq n\mathbb{Z}$. Πράγματι, η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$, με $f(a) = na$ είναι ένας ισομορφισμός.

2. Η προσθετική ομάδα των πραγματικών είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών πραγματικών. Πράγματι, η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, με $f(x) = e^x$ είναι ένας ισομορφισμός.

3. Οι ομάδες $S_3 = S\big(\{1, 2, 3\}\big)$ και $\mathbb{Z}_6$, έχουν την ίδια τάξη, αλλά δεν είναι ισόμορφες, γιατί η δεύτερη είναι αβελιανή ενώ η πρώτη δεν είναι.

4. Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $V = \{1, a, b, c\}$ του Klein, για την οποία $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ και $ab = ba = c$, $bc = cb = a$, $ca = ac = b$. Η V και η $\mathbb{Z}_4$ έχουν την ίδια τάξη, είναι και οι δύο αβελιανές, αλλά δεν είναι ισόμορφες, γιατί η V έχει τρία στοιχεία τάξης 2, ενώ η $\mathbb{Z}_4$ μόνον ένα, το $[2]_4$.

5. Οι προσθετικές ομάδες $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ είναι και οι δύο αβελιανές, αλλά δεν είναι ισόμορφες, γιατί $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$.

Ορισμός 21.2.4. Η ομάδα $(G, *)$ ονομάζεται **κυκλική**, αν και μόνον, αν υπάρχει $a \in G$, ώστε για κάθε $b \in G$ να ισχύει $b = \underbrace{a * \cdots * a}_{n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Το a ονομάζεται **γεννήτορας** της G. Το ότι ο a είναι γεννήτορας της G συμβολίζουμε, με $G = \langle a \rangle$.

Πρόταση 21.2.5. *Αν G είναι μια κυκλική ομάδα, τότε*

1. *Η G είναι αβελιανή.*
2. *Κάθε υποομάδα της G είναι κυκλική.*
3. $|G| = n \in \mathbb{N} \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_n$.
4. $|G| \geq \aleph_0 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$.

21.3 Κανονικές υποομάδες

Στη παράγραφο αυτή η πράξη στις ομάδες θα είναι ο πολλαπλασιασμός.

Ορισμός 21.3.1. Έστω G ομάδα. Η υποομάδα H της G, ονομάζεται **κανονική** (συμβολισμός: $H \lhd G$), αν και μόνον, αν για κάθε $g \in G$ και για κάθε $h \in H$ ισχύει $ghg^{-1} \in H$ ή αλλιώς $gHg^{-1} \subseteq H$ για κάθε $g \in G$.

Παρατήρηση: Όλες οι υποομάδες μιας αβελιανής ομάδες είναι κανονικές.

Ορισμός 21.3.2. **Κέντρο μιας ομάδας** G ονομάζεται το σύνολο $Z(G) = \{x \in G / xg = gx \quad \forall g \in G\}$.

Πρόταση 21.3.1. *Για κάθε ομάδα G ισχύει $Z(G) \lhd G$.*

Ορισμός 21.3.3. Έστω G μια ομάδα και H υποομάδα της. Το σύνολο $aH = \{ah/h \in H\}$ (αντ. $Ha = \{ha/h \in H\}$) ονομάζεται **αριστερό (αντ. δεξιό) σύμπλοκο** της H στην G.

Πρόταση 21.3.2. *Έστω G μια ομάδα και H υποομάδα της, τότε ισχύουν τα:*

i) *Για κάθε $a, b \in G$ είναι ή $aH = bH$ ή $aH \cap bH = \varnothing$.*

ii) $\bigcup_{a \in G} aH = G$.

iii) *Για κάθε $a \in G$ είναι $|aH| = |H|$.*

iv) *Το πλήθος των αριστερών συμπλόκων της H στην G είναι ίσο με το πλήθος των δεξιών συμπλόκων.*

Ορισμός 21.3.4. Αν H υποομάδα της ομάδας G, τότε το πλήθος των αριστερών ή των δεξιών συμπλόκων της H στην G ονομάζεται δείκτης της H στην G και συμβολίζεται με $[G : H]$.

Πρόταση 21.3.3. ***(Θεώρημα Lagrange)*** *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H υποομάδα της, τότε $k|H| = |G|$, όπου k ο δείκτης της H στην G.*

Πόρισμα. *Η τάξη κάθε υποομάδας σε μια πεπερασμένη ομάδα, διαιρεί την τάξη της ομάδας.*

Πρόταση 21.3.4. *Έστω G μια ομάδα και H κανονική υποομάδα της, τότε ισχύουν τα:*

i) $gH = Hg$ *για κάθε* $g \in G$.

ii) *Η πράξη $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ στο σύνολο $G/H = \{gH/g \in G\}$ είναι καλώς ορισμένη.*

iii) *Το σύνολο G/H, με την πράξη που ορίσαμε πριν είναι ομάδα. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **ομάδα πηλίκο** της H στην G.*

Πρόταση 21.3.5. *Αν $f : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός, τότε $\operatorname{Ker} f \lhd G$.*

Πρόταση 21.3.6. *Αν $H \lhd G$, τότε η απεικόνιση $p : G \to G/H$, με $p(a) = aH$ είναι ομομορφισμός, με $\operatorname{Ker} p = H$.*

Πρόταση 21.3.7. ***(1ο Θεώρημα των ισομορφισμών)*** *Αν η $f : G \to H$ είναι ομομορφισμός, τότε*

$$G/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f.$$

Πρόταση 21.3.8. ***(2ο Θεώρημα των ισομορφισμών)*** *Έστω G ομάδα, $H \leq G$ και $N \lhd G$, τότε*

α΄) $N \cap H \lhd H$.

β΄) *Το σύνολο $NH = \{nh/n \in N \wedge h \in H\}$ είναι υποομάδα της G και $N \lhd NH$.*

γ΄) $\frac{H}{N\cap H} \simeq \frac{NH}{N}$.

Πρόταση 21.3.9. ***(3ο Θεώρημα των ισομορφισμών)*** *Έστω G ομάδα, $M \lhd G$ και $N \lhd G$, με $N \leq M$, τότε*

α΄) $M/N \lhd G/M$.

β΄) $\frac{G/N}{M/N} \simeq G/M$.

21.4 Γινόμενα και αθροίσματα ομάδων

Ορισμός 21.4.1. Έστω $G_i, i \in I$ μια οικογένεια ομάδων. Είναι γνωστό, από τη θεωρία συνόλων ότι το γινόμενο $\prod\limits_{i\in I} G_i$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων $f : I \to \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, για τις οποίες ισχύει $f(i) \in G_i$. Αν η πράξη σε κάθε μία από τις ομάδες G_i είναι ο πολλαπλασιασμός, τότε ορίζουμε πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\prod\limits_{i\in I} G_i$, ως εξής: Το γινόμενο των f και g του $\prod\limits_{i\in I} G_i$ να είναι η απεικόνιση $fg : I \to \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, με $(fg)(i) = f(i)g(i)$ (Πολλαπλασιασμός κατά συντεταγμένη). Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\prod\limits_{i\in I} G_i$, με την πράξη αυτή του πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένη είναι ομάδα. Την ομάδα αυτή ονομάζουμε **ευθύ γινόμενο των ομάδων** G_i και συμβολίζουμε με $\prod\limits_{i\in I} G_i$.

Πρόταση 21.4.1. *Για κάθε $k \in I$ η απεικόνιση $p_k : \prod\limits_{i\in I} G_i \to G_k$, με $p_k(f) = f(k)$ (Κανονική προβολή) είναι ένας επιμορφισμός ομάδων και η απεικόνιση $I_k : G_k \to \prod\limits_{i\in I} G_i$, με $I_k(a) = (a_i)_{i\in I}$, όπου $a_k = a$ και το a_m είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G_m για κάθε $m \neq k$ (Κανονική ένθεση) είναι ένας μονομορφισμός ομάδων.*

Πρόταση 21.4.2. *Ισχύει: $I_k(G_k) \lhd \prod\limits_{i\in I} G_i$.*

Πρόταση 21.4.3. ***(Καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου ομάδων)*** *Έστω $G_i, i \in I$ μια οικογένεια πολλαπλασιαστικών ομάδων, H ομάδα και $\phi_i : H \to G_i$ μια οικογένεια ομομορφισμών. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : H \to \prod\limits_{i\in I} G_i$, ώστε $p_k \circ \phi = \phi_k$.*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & \prod\limits_{i\in I} G_i \\ & \searrow^{\phi_k} & \downarrow p_k \\ & & G_i \end{array}.$$

Ορισμός 21.4.2. Για το υποσύνολο $\prod\limits_{i\in I}^{w} G_i$ του $\prod\limits_{i\in I} G_i$, το οποίο έχει ως στοιχεία εκείνες τις $f \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, για τις οποίες η σχέση $f(i) \neq e_i$ αληθεύει μόνον για ένα πεπερασμένο σύνολο

δεικτών $i \in I$, όπου e_i είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G_i αποδεικνύεται ότι είναι κανονική υποομάδα της ομάδας $\prod_{i\in I} G_i$. Την υποομάδα αυτή ονομάζουμε **ασθενές ευθύ γινόμενο των ομάδων** $G_i, i \in I$.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που το σύνολο των δεικτών I είναι πεπερασμένο το ασθενές ευθύ γινόμενο και το ευθύ γινόμενο συμπίπτουν.

Πρόταση 21.4.4. *Έστω* $N_i \lhd G_i$ *για κάθε* $i \in I$, *τότε*

α΄ $\prod_{i\in I} N_i \lhd \prod_{i\in I} G_i$.

β΄ $\frac{\prod_{i\in I} G_i}{\prod_{i\in I} N_i} \simeq \prod_{i\in I} \frac{G_i}{N_i}$.

γ΄ $\prod_{i\in I}^{w} N_i \lhd \prod_{i\in I}^{w} G_i$.

δ΄ $\frac{\prod_{i\in I}^{w} G_i}{\prod_{i\in I}^{w} N_i} \simeq \prod_{i\in I}^{w} \frac{G_i}{N_i}$.

Ορισμός 21.4.3. Έστω A ένα υποσύνολο της ομάδας G. Λέμε ότι το A **παράγει την ομάδα** G και το συμβολίζουμε με $G = \langle A\rangle$, αν και μόνον, αν κάθε $g \in G$ γράφεται ως $g = a_1 \cdots a_n$, όπου τα $a_1, ..., a_n$ είναι στοιχεία του A, όχι κατ'ανάγκην διακεκριμένα.

Πρόταση 21.4.5. *Έστω* $N_i, i \in I$ *οικογένεια υποομάδων της ομάδας* A, *ώστε*

- $A = \langle \bigcup_{i\in I} N_i\rangle$.
- *Για κάθε* $k \in I$ *ισχύει* $\langle N_k\rangle \cap \langle \bigcup_{i\in I\setminus\{k\}} N_i\rangle = \{e\}$, *όπου* e *είναι το ουδέτερο στοιχείο της* G. *Τότε*

$$A \simeq \prod_{i\in I}^{w} N_i.$$

Ορισμός 21.4.4. Αν η οικογένεια $N_i, i \in I$ των υποομάδων της ομάδας A ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πρότασης 21.4.5 λέμε ότι η A είναι **εσωτερικό ευθύ γινόμενο** των ομάδων $N_i, i \in I$.

Η περίπτωση της οικογένειας αβελιανών ομάδων $G_i, i \in I$ είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, γιατί αυτή συναντάμε στην ιδιάζουσα ομολογία τοπολογικών χώρων. Όταν έχουμε αβελιανές ομάδες επισημαίνουμε ότι η πράξη τους σημειώνεται με πρόσθεση. Έτσι

Ορισμός 21.4.5. Αν $G_i, i \in I$, είναι οικογένεια αβελιανών ομάδων, τότε το ασθενές ευθύ γινόμενο της οικογένειας ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** της οικογένειας και συμβολίζεται με $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Αν G είναι μια αβελιανή ομάδα, τότε το σύμβολο $\bigoplus_{i\in I} G$ σημαίνει το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i\in I} G_i$, όπου $G_i = G$ για κάθε $i \in I$.

Για το ευθύ άθροισμα αβελιανών ομάδων ισχύει η πρόταση

Πρόταση 21.4.6. *Αν οι $G_i, i \in I$ είναι οικογένεια αβελιανών ομάδων και $A_i \leq G_i$ για κάθε $i \in I$, τότε*

α΄ $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq \bigoplus_{i\in I} G_i$.

β΄ $\frac{\bigoplus_{i\in I} G_i}{\bigoplus_{i\in I} A_i} \simeq \bigoplus_{i\in I} \frac{G_i}{A_i}$.

Επίσης ισχύει η πρόταση

Πρόταση 21.4.7. *Αν $G_i, i \in I$ είναι οικογένεια αβελιανών ομάδων, G είναι μια αβελιανή ομάδα και $\phi_i : G_i \to G, i \in I$ οικογένεια ομομορφισμών. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : \bigoplus_{i\in I} G_i \to G$, ώστε το επόμενο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\phi_k} & G \\ \downarrow{\scriptstyle I_k} & \nearrow{\scriptstyle \phi} & \\ \bigoplus_{i\in I} G_i & & \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Παραδείγματα 21.4.1.

1.
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\{0\}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \\ &\simeq \big(\mathbb{Z}/\{0\}\big)\oplus\big(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\big) \\ &\simeq \mathbb{Z}\oplus\{0\}\simeq\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

2. $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \simeq \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)\oplus\big(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\big) \simeq \mathbb{Z}_2\oplus\{0\}\simeq\mathbb{Z}_2$.

3. $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\{0\}\oplus 2\mathbb{Z} \simeq \big(\mathbb{Z}/\{0\}\big)\oplus\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$.

Πρόταση 21.4.8. *Έστω $G_i, i \in I$ οικογένεια υποομάδων της αβελιανής ομάδας G, ώστε*

- $G = \langle \bigcup_{i\in I} G_i \rangle$.
- *Για κάθε $k \in I$ ισχύει $\langle G_k \rangle \cap \langle \bigcup_{i\in I\setminus\{k\}} G_i \rangle = \{0\}$, όπου 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της G. Τότε*

$$G \simeq \bigoplus_{i \in I} G_i.$$

Ορισμός 21.4.6. Αν η οικογένεια $G_i, i \in I$ των υποομάδων της αβελιανής ομάδας G ικανοποιεί τις απαιτήσεις της πρότασης 21.4.8 λέμε ότι η G είναι **εσωτερικό ευθύ άθροισμα** των ομάδων $G_i, i \in I$.

Πρόταση 21.4.9. *Αν η αβελιανή ομάδα G είναι εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποομάδων της $G_i, i \in I$, τότε και μόνον, τότε κάθε $g \in G \setminus \{0\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $g_{i_1} + \cdots + g_{i_n}$, όπου τα $g_{i_k} \neq 0_{G_{i_k}}$ είναι στοιχεία των ομάδων G_{i_k} και τα i_k, είναι διακεκριμένα στοιχεία του I.*

Παρατηρήσεις:

1. Αν το σύνολο δεικτών στο ευθύ άθροισμα είναι πεπερασμένο , δηλαδή $I = \{1, ..., n\}$, τότε το $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ το γράφουμε και ως $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.

2. Αν η οικογένεια του ορισμού 21.4.6 ικανοποιεί μόνον την πρώτη από τις απαιτήσεις της πρότασης 21.4.8 τότε λέμε ότι είναι άθροισμα των υποομάδων της $G_i, i \in I$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $G = \sum_{i \in I} G_i$.

Παραδείγματα 21.4.2.

1. Η προσθετική ομάδα $\mathbb{R}^2$ είναι εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποομάδων της $A = \{(a, 0)/a \in \mathbb{R}\}$ και $B = \{(0, b)/b \in \mathbb{R}\}$.

2. Η προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}^3 = \{(a, b, c)/a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ είναι εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποομάδων της $A = \{(a, 0, 0)/a \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(0, b, 0)/b \in \mathbb{Z}\}$ και $C = \{(0, 0, c)/c \in \mathbb{Z}\}$. Επειδή $A \simeq B \simeq C \simeq \mathbb{Z}$, γράφουμε $\mathbb{Z}^3 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Η προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}$ είναι άθροισμα των υποομάδων της $2\mathbb{Z}$ και $3\mathbb{Z}$ και όχι ευθύ άθροισμα τους, γιατί $6 \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, άρα $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \neq \{0\}$.

Πρόταση 21.4.10. *Αν η αβελιανή ομάδα G είναι το εσωτερικό ευθύ άθροισμα της οικογένειας G_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ υποομάδων της, τότε υπάρχουν ομομορφισμοί $j_\beta : G_\beta \to G$ και $\pi_\beta : G \to G_\beta$, ώστε $\pi_\beta \circ j_\alpha = \hat{0}$, αν $\beta \neq \alpha$ και $\pi_\beta \circ j_\alpha = i_{G_\alpha}$, αν $\beta = \alpha$.*
Αντιστρόφως, αν G_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ είναι μια οικογένεια αβελιανών ομάδων και υπάρχουν ομομορφισμοί j_β και π_β, όπως πιο πάνω, τότε οι ομομορφισμοί j_β είναι 1-1. Επιπλέον, αν οι ομάδες $j_\alpha(G_\alpha)$ παράγουν την G, τότε $G \simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} j_\alpha(G_\alpha)$.

Πρόταση 21.4.11. *Αν A_i και A'_i, $i \in I$ είναι οικογένειες αβελιανών ομάδων, με $A_i \simeq A'_i$ για κάθε $i \in I$, τότε $\bigoplus_{i \in I} A_i \simeq \bigoplus_{i \in I} A'_i$.*

21.5 Πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες

Στη παράγραφο αυτή η πράξη στις ομάδες θα είναι η πρόσθεση.

Ορισμός 21.5.1. Η αβελιανή ομάδα G ονομάζεται **πεπερασμένα παραγόμενη**, αν, και μόνον αν, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο της $\{a_1, \ldots, a_n\}$, ώστε κάθε στοιχείο της να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, \ldots, a_n$, με συντελεστές ακέραιους, δηλαδή για κάθε $a \in G$, υπάρχουν $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, ώστε $a = m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n$.

Παραδείγματα 21.5.1.

1. Η $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, γιατί $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. Ένα σύνολο που παράγει την $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ είναι το $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

2. Η $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_7$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Ένα σύνολο που τη παράγει είναι το $\{(1, [0]_7), (0, [1]_7)\}$.

3. Η προσθετική ομάδα των ρητών δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Πράγματι, υποθέτουμε ότι το σύνολο $A = \{\frac{r_1}{l_1}, \ldots, \frac{r_n}{l_n} \,/\, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}^* \wedge (r_i, l_i) = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ παράγει την $\mathbb{Q}$. Θεωρούμε έναν πρώτο p, ο οποίος δεν διαιρεί το γινόμενο $l_1 \cdots l_n$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $m_1, \ldots, m_n$, ώστε

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} = m_1 \frac{r_1}{l_1} + \cdots + m_n \frac{r_n}{l_n} \Rightarrow \frac{1}{p} &= \frac{k}{l_1 \cdots l_n}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow kp = l_1 \cdots l_n \\ &\Rightarrow p \mid l_1 \cdots l_n\,,\end{aligned}$$

   άτοπο.

Πρόταση 21.5.1. *Αν G μια αβελιανή ομάδα, τότε το σύνολο H των στοιχείων της G, τα οποία έχουν πεπερασμένη τάξη είναι υποομάδα της G. Η υποομάδα H ονομάζεται **υποομάδα στρέψης** της G.*

Ακολουθεί το **θεμελιώδες θεώρημα των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων**.

Πρόταση 21.5.2. *Αν G μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, τότε υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n και $r_1, \ldots, r_n$ και πρώτοι $p_1, \ldots, p_n$, όχι κατ' ανάγκην διακεκριμένοι, ώστε*

$$G \simeq \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}\Big).$$

Παρατήρηση: Στο ανωτέρω θεώρημα ο προσθετέος $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}$ ονομάζεται **ελεύθερο μέρος** της G και ο αριθμός k, **αριθμός Betti** της G. Ο προσθετέος $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$ είναι η **υποομάδα στρέψης** της G.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Adams C. - Fenrosa R.** Introduction to Topology, Pearson 2009.

[2] **Αθανασόπουλος K.** Εισαγωγή στην γεωμετρική τοπολογία. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[3] **Αθανασόπουλος K.** Σημειώσεις Τοπολογίας. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[4] **Armstrong M. A.** Basic Topology. Springer 1983.

[5] **Βαλέττας Π.** Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[6] **Basener W. F.** Topology and its applications. A John Willey and Sons, Inc, 2006.

[7] **Bredon G. E.** Topology and geometry. Springer Verlang 1993.

[8] **Buskes G. - Van Rooij A.** Topological Spaces. Springer 1997.

[9] **Γεωργίου Δ.- Ηλιάδης Σ.** Γενική Τοπολογία (Μετρικοί και Τοπολογικοί χώροι). Εκδόσεις Τζιόλα 2019.

[10] **Croom M. D.** Concepts of Algebraic Topology. Springer 1978.

[11] **Crossley M. D.** Essential Topology. Springer 2005.

[12] **Deo S.** Algebraic Topology. Hundustan Book Agency India 2006.

[13] **Dugundji J.** Topology. Allyn and Bacon 1966.

[14] **Greenberg M. J. - Harper J. R.** Algebraic Topology. The Benjamin Cummings Publishing Company 1981.

[15] **Hatcher A.** Algebraic Topology. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.
pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

[16] **Hocking J. G - Young G. S.** Topology. Dover Publications Inc New York 1961.

[17] **Jaenich K.** Topology. Springer 1980.

[18] **Kelley J. L.** Topology. Van Nostrand Reinold 1970.

[19] **Kinsey C.** Topology of Surfaces. Springer 1993.

[20] **Kolmogorov A. N. - Fomin S. V.** Introductory Real Analysis. Dover 1970.

[21] **Kosniowski C.** A First Course in Algebraic Topology.Cambringe University Press 1980.

[22] **Kuratowski K.** Introduction to set theory and topology. Pergamon Press 1972.

[23] **Lee J. M.** Introduction to Topological Manifolds. Springer 2010.

[24] **Lelek A.** Εισαγωγή στα σύνολα και την Τοπολογία. (Μτφ. Σκανδάλης Κ.). Εκδόσεις Τροχαλία 1992.

[25] **Lipschutz S.** General Topology. Schaum's Outline Series 1965.

[26] **Massey N. S.** Algebraic Topology. Springer 1991.

[27] **Μερκουράκης Σ.** Εισαγωγή στην τοπολογία. Ελεύθερο στο διαδικτυο.

[28] **Moise E. E.** Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Springer 1977.

[29] **Munkres J. R.** Elements of Algebraic Topology. Addison-Wesley Publishing Company 1984.

[30] **Munkres J. R.** Topology. Prentice Hall 2000.

[31] **Νεγρεπόντης Σ. - Ζαχαριάδης Θ. - Καλαμίδας Ν. - Φαρμάκη Β.** Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση. Εκδόσεις Συμμετρία 1997.

[32] **Νταής Δ.** Ακριβείς ακολουθίες και μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[33] **Νταής Δ.** Αλγεβρική τοπολογία-Σημειώσεις παραδόσεων. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[34] **Παπάζογλου Π.** Αλγεβρική Τοπολογία. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[35] **Πλατής Ι.** Σημειώσεις Τοπολογίας. Ελεύθερο στο διαδίκτυο.

[36] **Ποδάρα Χρ. Π.** Διδασκαλία της Γενικής Τοπολογίας με χρήση αντιπαραδειγμάτων. Εκδόσεις Καρδαμίτσα 2004.

[37] **Rotman J. J.** An Introduction to Algebraic Topology. Springer 1991.

[38] **Sierpinski W.** General Topology. Dover 2000.

[39] **Steen L. A. - Seebach J. A.** Counterexamples in topology, Dover 1995.

[40] **Τσαμάτος Π.** Τοπολογία, Εκδόσεις Τζιόλα 2009.

[41] **Vassiliev V. A.** Introduction to Topology A.M.S. 2001.

[42] **Vick J. W.** Homology Theory. Springer 1991.

[43] **Viro O. Ya. - Ivanov O. A. - Netsvetaev N. Yu. - Klarlamov V. M.** Elementary Topology Problem Textbook. A.M.S.

[44] **Willard S.** General Topology. Dover 2004.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Υ

Φ

Χ